

DERIVATION

I. Rappels

1) Fonction dérivable

Définition : On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L , tel que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$.
 L est appelé le nombre dérivé de f en a .

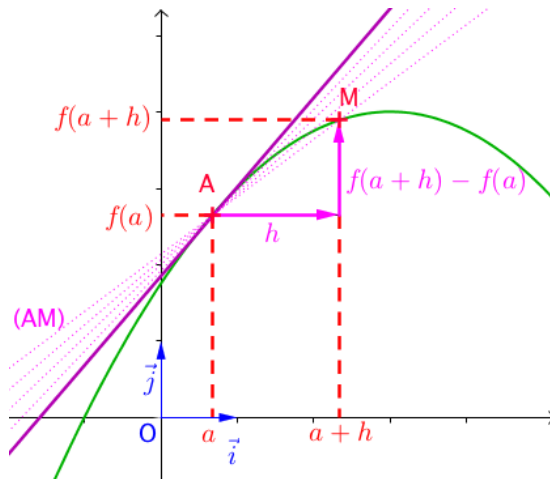
2) Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I .

L est le nombre dérivé de f en a .

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f .

Définition : La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L .



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple :

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 + 3(2+h) - 1 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 7h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 7) = 7$$

Le coefficient directeur de la tangente est égal à 7.

Donc son équation est de la forme : $y = 7(x - 2) + f(2)$, soit :

$$y = 7(x - 2) + 9$$

$$y = 7x - 5$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x - 5$.

3) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Exemples :

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^5$.

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^4}$ alors f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$.

4) Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I , où k est une constante	$(ku)' = ku'$

uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I , où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

a) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$

On pose $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 2x^2 - 5x \rightarrow u'(x) = 4x - 5$
 $v(x) = 3x - 2 \rightarrow v'(x) = 3$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (4x - 5)(3x - 2) + (2x^2 - 5x) \times 3 \\ &= 12x^2 - 8x - 15x + 10 + 6x^2 - 15x \\ &= 18x^2 - 38x + 10 \end{aligned}$$

b) $g(x) = \frac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1}$

On pose $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$
 $v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 3x^2 - 4x$

Donc :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{6(x^3 - 2x^2 - 1) - (6x - 5)(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{6x^3 - 12x^2 - 6 - 18x^3 + 24x^2 + 15x^2 - 20x}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

Un logiciel de calcul formel permet de vérifier les résultats :

$\frac{d}{dx} \left((2x^2 - 5x) \cdot (3x - 2) \right) = 18x^2 - 38x + 10$
$\frac{d}{dx} \left(\frac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1} \right) = \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2}$

5) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

- Admis -

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$.

Réolvons l'équation $f'(x) \leq 0$

$$2x - 4 \leq 0$$

$$2x \leq 4$$

$$x \leq 2$$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 2]$.

De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

II. Dérivées de fonctions composées

1) Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété : u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I .

Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Démonstration :

Soit $a \in I$ et un réel h tel que $a + h \in I$.

On calcule le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)})(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})}{h(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} \end{aligned}$$

Or, la fonction u est dérivable sur I , donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.

Et donc, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = u'(a) \times \frac{1}{2\sqrt{u(a)}}$.

Exemple :

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$$

On pose $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x - 1 \rightarrow u'(x) = 6x + 4$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{6x + 4}{2\sqrt{3x^2 + 4x - 1}} \\ &= \frac{3x + 2}{\sqrt{3x^2 + 4x - 1}} \end{aligned}$$

2) Dérivée de la fonction $x \mapsto (u(x))^n$

Propriété : n est un entier relatif non nul. u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I dans le cas où n est négatif.

Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$ est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}.$$

Démonstration par récurrence :

- Initialisation :

$$f'(x) = u'(x) = 1 \times u'(x) \times (u(x))^{1-1}$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

- Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $(u^k)' = k u' u^{k-1}$.

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$: $(u^{k+1})' = (k+1)u' u^k$.

$$\begin{aligned} (u^{k+1})' &= (u^k u)' \\ &= (u^k)' u + u^k u' \\ &= k u' u^{k-1} u + u^k u' \\ &= k u' u^k + u^k u' \\ &= (k+1) u' u^k \end{aligned}$$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Exemple :

$$f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$$

On pose $f(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4u'(x)(u(x))^3 \\ &= 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3 \end{aligned}$$

3) Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$

Propriété : a et b sont deux nombres réels. f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Alors la fonction g définie sur I par $g(x) = f(ax + b)$ est dérivable sur tout intervalle J tel que pour tout $x \in J$, $ax + b \in I$ et on a : $g'(x) = af'(ax + b)$.

Démonstration :

Soit $t \in J$ et un réel h tel que $t + h \in J$.

On calcule le taux d'accroissement de g entre t et $t+h$:

$$\begin{aligned} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} &= \frac{f(a(t+h) + b) - f(at + b)}{h} \\ &= \frac{f(at + ah + b) - f(at + b)}{h} \end{aligned}$$

On pose $T = at + b$ et $H = ah$.

$$\text{Donc } \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = a \times \frac{f(T+H) - f(T)}{H}.$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, on a $ah \rightarrow 0$ donc $H \rightarrow 0$.

$$\text{Ainsi } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{H \rightarrow 0} a \times \frac{f(T+H) - f(T)}{H} = a \times f'(T) = af'(at + b).$$

Exemple :

$$f(x) = \frac{1}{5x - 4}$$

$$\text{Alors } f'(x) = 5 \frac{-1}{5x - 4} = \frac{-5}{5x - 4}$$

En effet :

$$(5x - 4)' = 5 \text{ et } \left(\frac{1}{x} \right)' = \frac{-1}{x^2}$$

4) Formules de dérivation sur les fonctions composées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$	$nu' u^{n-1}$
$f(ax + b)$	f dérivable	$af'(ax + b)$

Méthode : Etude d'une fonction composée

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe C .
- 3) Etudier la dérivabilité de f .
- 4) Etudier les variations de f .
- 5) Tracer les asymptotes à C puis la courbe C .
- 6) Vérifier à l'aide de la calculatrice graphique.

1) La fonction racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$ donc la fonction f est définie pour

$$\frac{2x}{3x+1} \geq 0.$$

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$2x$	-	-	0	+
$3x+1$	-	0	+	+
$\frac{2x}{3x+1}$	+	-	0	+

Donc la fonction f est définie sur $\left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[\cup [0; +\infty[$.

2) - Recherche des limites à l'infini :

La limite de la fonction rationnelle sous la racine est une forme indéterminée. Levons l'indétermination :

$$\frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3 + \frac{1}{x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3}.$

De plus $\lim_{X \rightarrow \frac{2}{3}} \sqrt{X} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$

On en déduit, comme limite de fonction composée, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$

On démontre de même que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$

Ainsi la droite d'équation $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ est asymptote horizontale à la courbe C en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Recherche de la limite en $-\frac{1}{3}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} (3x+1) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} 2x = -\frac{2}{3} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{3} \\ x < -\frac{1}{3}}} \frac{2x}{3x+1} = +\infty.$$

En effet, pour $x < -\frac{1}{3}$, $3x+1 < 0$.

De plus $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Donc, comme limite de fonction composée, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{3} \\ x < -\frac{1}{3}}} f(x) = +\infty.$

Ainsi la droite d'équation $x = -\frac{1}{3}$ est asymptote verticale à la courbe C .

3) $x \mapsto \frac{2x}{3x+1}$ est strictement positive et dérivable sur $\left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[\cup \left] 0; +\infty \right[.$

Comme dérivée de fonction composée, f est dérivable sur $\left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[\cup \left] 0; +\infty \right[.$

Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{\frac{2h}{3h+1}} - 0}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2h}{3h+1}} \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sqrt{\frac{1}{h^2} \times \frac{2h}{3h+1}} \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sqrt{\frac{2}{3h^2 + h}} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

4) Pour tout réel x de $\left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[\cup \left] 0; +\infty \right[$, on pose $u(x) = \frac{2x}{3x+1}$.

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{2(3x+1) - 3 \times 2x}{(3x+1)^2} \\
&= \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2} \\
&= \frac{2}{(3x+1)^2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{2}{(3x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}$$

Et donc $f'(x) > 0$.

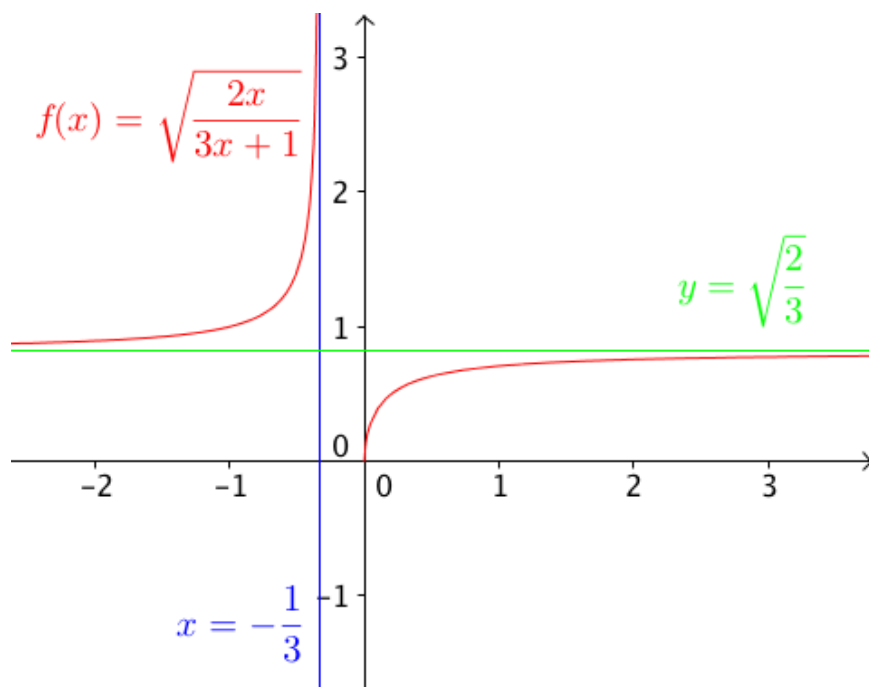
Par conséquent la fonction f est croissante sur $\left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[$ et sur $\left] 0; +\infty \right[$.

On dresse le tableau de variations :

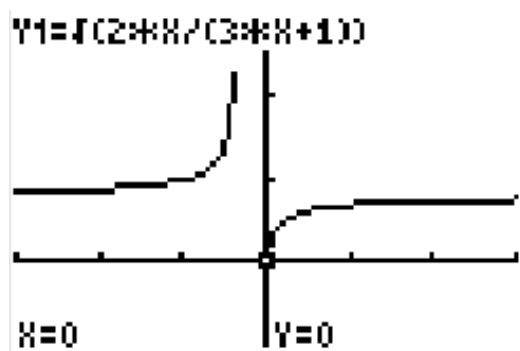
x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	////////////////////		+
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$ 	////////////////////	0 	$\sqrt{\frac{2}{3}}$

$f(0) = 0$

5)



6)



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales