

# PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

## I. Produit scalaire de deux vecteurs

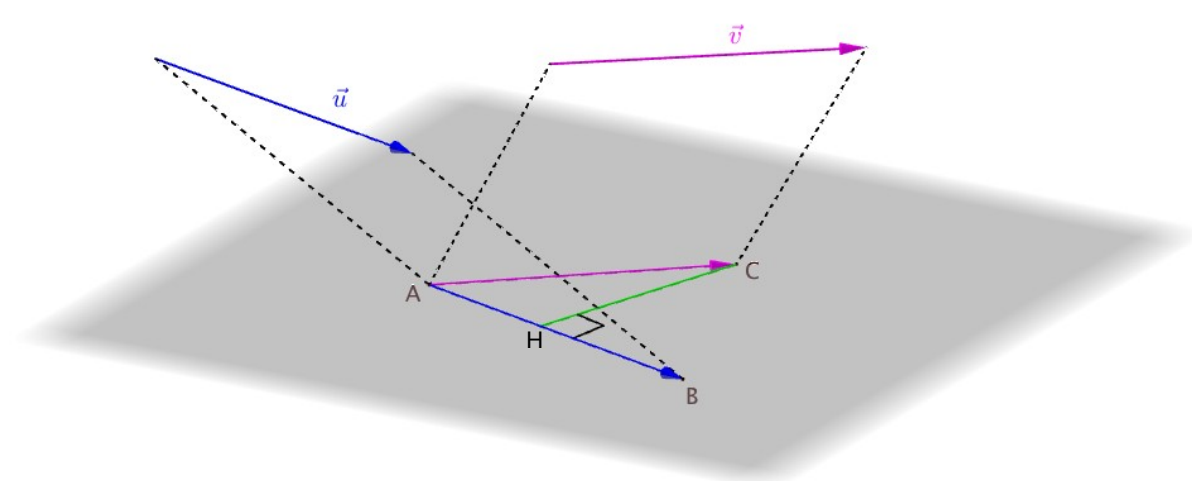
### 1) Définition

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

Il existe un plan  $P$  contenant les points A, B et C.

#### Définition :

On appelle produit scalaire de l'espace de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le produit  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  égal au produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  dans le plan  $P$ .



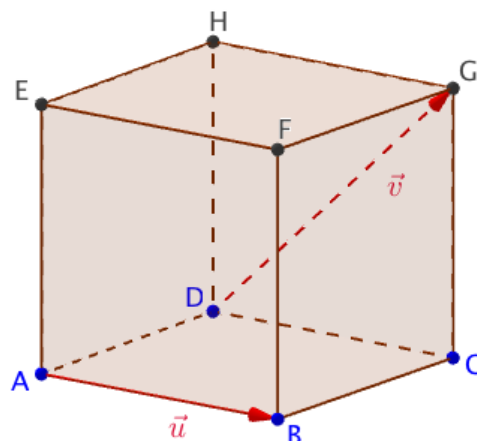
On a ainsi :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  si  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  est nul,
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$

#### Exemple :

ABCDEFGH est un cube d'arête  $a$ .

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} \\ &= AB \times AB \\ &= a^2 \end{aligned}$$



## 2) Propriétés

Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

**Propriétés :** Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace.

$$- \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$- \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$- \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$- (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$- \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

**Démonstration :**

Il existe un plan  $P$  tel que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  admettent des représentants dans  $P$ . Dans le plan, les règles de géométrie plane sur les produits scalaires s'appliquent.

## 3) Expression analytique du produit scalaire

**Propriété :** Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de l'espace muni d'un repère

orthonormé  $(O, i, j, k)$ . Alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ .

Et en particulier :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Démonstration :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{x}i + \vec{y}j + \vec{z}k) \cdot (\vec{x}'i + \vec{y}'j + \vec{z}'k)$$

$$= xx'i \cdot i + xy'i \cdot j + xz'i \cdot k + yx'j \cdot i + yy'j \cdot j + yz'j \cdot k + zx'k \cdot i + zy'k \cdot j + zz'k \cdot k$$

$$= xx' + yy' + zz'$$

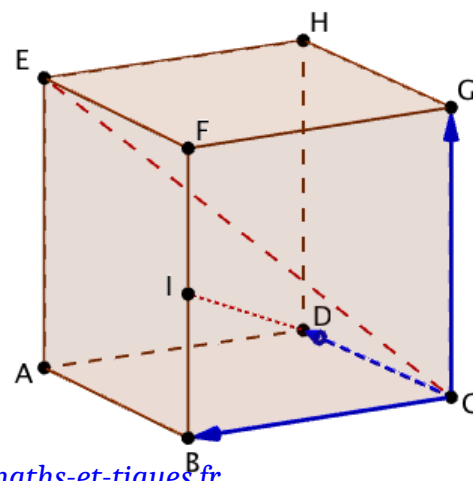
En effet, on a par exemple dans le plan défini par le couple  $(i, j)$  :

$$i \cdot i = \|i\|^2 = 1, \quad j \cdot j = \|j\|^2 = 1 \text{ et } i \cdot j = j \cdot i = 0.$$

$$\text{On a en particulier : } \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2.$$

**Exemple :**

On considère le repère de l'espace  $(C; \vec{CB}, \vec{CD}, \vec{CG})$ .



Alors :  $\vec{CE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{DI} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 0,5-0 \end{pmatrix}$  soit  $\vec{DI} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ .

Alors  $\vec{CE} \cdot \vec{DI} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0,5 = 0,5$ .

Les vecteurs  $\vec{CE}$  et  $\vec{DI}$  ne sont pas orthogonaux.

## II. Vecteur normal à un plan

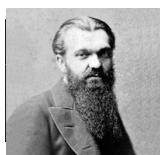
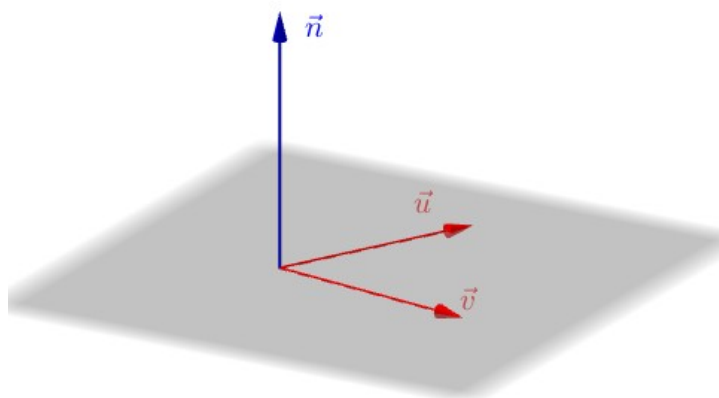
### 1) Définition et propriétés

**Définition :** Un vecteur non nul  $\vec{n}$  de l'espace est normal à un plan  $P$  lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans  $P$ .

**Théorème :** Un vecteur non nul  $\vec{n}$  de l'espace est normal à un plan  $P$  s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de  $P$ .

Démonstration :

Elle est incluse dans la démonstration du corollaire qui suit.



Au XIX<sup>e</sup> siècle, le vecteur normal  $\vec{n}$ , appelé produit vectoriel, est noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ . Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, *Hermann Günther Grassmann* (1809 ; 1877).

**Corollaire :** Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration (exigible BAC) :

- Si une droite est orthogonale à toute droite d'un plan  $P$  alors elle est en particulier orthogonale à deux droites sécantes de  $P$ .

- Démontrons la réciproque :

Soit une droite  $(d)$  de vecteur directeur  $n$  orthogonale à deux droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  de  $P$  sécantes et de vecteurs directeurs respectifs  $u$  et  $v$ .

Alors  $u$  et  $v$  sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur  $n$ .

Soit une droite quelconque  $(\Delta)$  de  $P$  de vecteur directeur  $w$ .

Démontrons que  $(\Delta)$  est orthogonale à  $(d)$ .

$w$  peut se décomposer en fonction de  $u$  et  $v$  qui constituent une base de  $P$  (car non colinéaires).

Il existe donc deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $w = xu + yv$ .

Donc  $w \cdot n = xu \cdot n + yv \cdot n = 0$ , car  $n$  est orthogonal avec  $u$  et  $v$ .

Donc  $n$  est orthogonal au vecteur  $w$ .

Et donc  $(d)$  est orthogonale à  $(\Delta)$ .

### Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan

ABCDEFGH est un cube.

Démontrer que le vecteur  $\vec{CF}$  est normal au plan (ABG).

On considère le repère  $(B; \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BF})$ .

Dans ce repère :  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

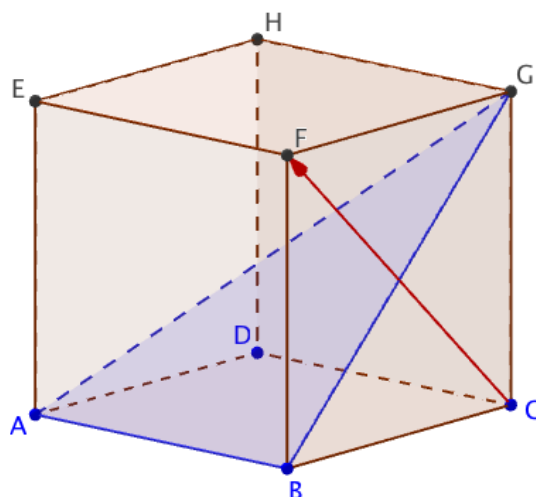
On a ainsi :

$\vec{CF} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc :

$$\vec{CF} \cdot \vec{BG} = 0 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$$

$$\vec{CF} \cdot \vec{AB} = 0 \times (-1) - 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$$

Donc  $\vec{CF}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG), il est donc normal à (ABG).



### Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

Dans un repère orthonormé, soit  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $C \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

On a :  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Soit un vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  orthogonal au plan (ABC). Il est tel que :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} -2a + b + 3c = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \times 2b + b + 3c = 0 \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b + 3c = 0 \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 2b \end{cases}$$

Prenons par exemple,  $b=1$  alors  $c=1$  et  $a=2$ .

Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est donc normal au plan (ABC).

## 2) Equation cartésienne d'un plan

**Théorème :** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; i, j, k)$ .

Un plan P de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  non nul admet une équation cartésienne de la forme  $ax + by + cz + d = 0$ , avec  $d \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, si  $a, b$  et  $c$  sont non tous nuls, l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que  $ax + by + cz + d = 0$ , avec  $d \in \mathbb{R}$ , est un plan.

**Démonstration (exigible BAC) :**

- Soit un point  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  de P.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux}$$

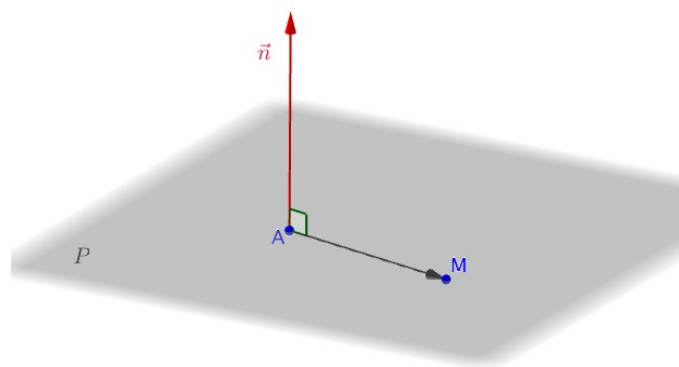
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ avec}$$

$$d = -ax_A - by_A - cz_A.$$



- Réciproquement, supposons par exemple que  $a \neq 0$  ( $a$ ,  $b$  et  $c$  sont non tous nuls).

On note  $E$  l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  vérifiant l'équation  $ax + by + cz + d = 0$

Alors le point  $A \left( -\frac{d}{a}; 0; 0 \right)$  vérifie l'équation  $ax + by + cz + d = 0$ .

Et donc  $A \in E$ .

Soit un vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . Pour tout point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a \left( x + \frac{d}{a} \right) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0.$$

$E$  est donc l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .

Donc l'ensemble  $E$  est le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

Exemple :

Le plan d'équation cartésienne  $x - y + 5z + 1 = 0$  a pour vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

### Méthode : Déterminer une équation cartésienne de plan

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan  $P$  passant

par le point  $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Une équation cartésienne de  $P$  est de la forme  $3x - 3y + z + d = 0$ .

Le point A appartient à  $P$  donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$3 \times (-1) - 3 \times 2 + 1 + d = 0 \text{ donc } d = 8.$$

Une équation cartésienne de  $P$  est donc  $3x - 3y + z + 8 = 0$ .

### Méthode : Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Dans un repère orthonormé, le plan  $P$  a pour équation  $2x - y + 3z - 2 = 0$ .

Soit  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- 1) Démontrer que la droite (AB) et le plan  $P$  sont sécants.
- 2) Déterminer leur point d'intersection.

1) Un vecteur normal de  $P$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

(AB) et  $P$  sont sécants si  $\vec{n}$  et  $\vec{AB}$  ne sont pas orthogonaux.

On a  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Comme  $\vec{AB} \cdot \vec{n} = -2 \times 2 + 3 \times 3 = 5 \neq 0$ , on conclut que (AB) et le plan  $P$  ne sont pas parallèles et donc sécants.

2) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \text{ réel.}$$

Le point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  intersection de (AB) et de  $P$  vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

On a donc  $2(1 - 2t) - 2 + 3(-3 + 3t) - 2 = 0$

$$5t - 11 = 0 \text{ soit } t = \frac{11}{5}.$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x = 1 - 2 \times \frac{11}{5} = -\frac{17}{5} \\ y = 2 \\ z = -3 + 3 \times \frac{11}{5} = \frac{18}{5} \end{cases}$$

Ainsi la droite (AB) et le plan  $P$  sont sécants en  $M\left(-\frac{17}{5}; 2; \frac{18}{5}\right)$ .

### Méthode : Déterminer l'intersection de deux plans

Dans un repère orthonormé, les plans  $P$  et  $P'$  ont pour équations respectives  $-x + 2y + z - 5 = 0$  et  $2x - y + 3z - 1 = 0$ .

- 1) Démontrer que les plans  $P$  et  $P'$  sont sécants.
- 2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection  $d$ .

1)  $P$  et  $P'$  sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Un vecteur normal de  $P$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et un vecteur normal de  $P'$  est  $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc leurs vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Le point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de  $d$ , intersection de  $P$  et de  $P'$ , vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases} -x + 2y + z - 5 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

On choisit par exemple  $x$  comme paramètre et on pose  $x = t$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = t \\ -t + 2y + z - 5 = 0 \\ 2t - y + 3z - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y + 3z = 1 - 2t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y + 3(-2y + t + 5) = 1 - 2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y - 6y + 3t + 15 = 1 - 2t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -7y = -14 - 5t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 + \frac{5}{7}t \\ z = -2\left(2 + \frac{5}{7}t\right) + t + 5 \end{cases} \end{aligned}$$

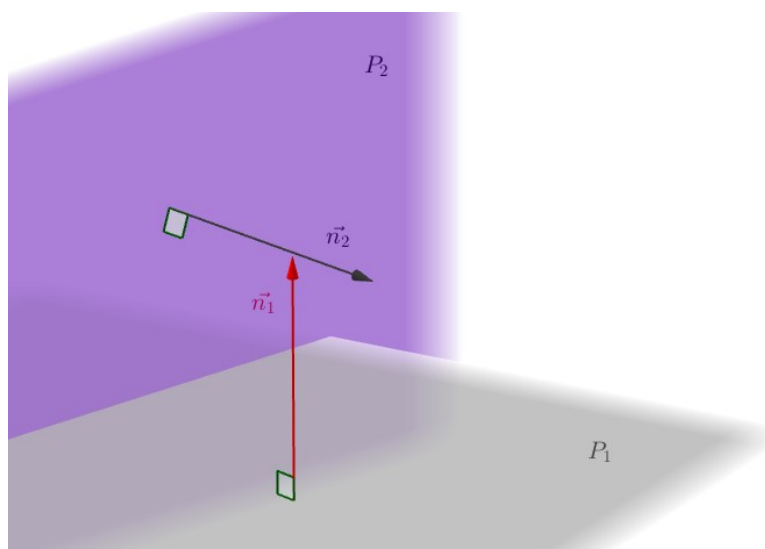
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2+\frac{5}{7}t \\ z=1-\frac{3}{7}t \end{cases}$$

Ce dernier système est une représentation paramétrique de  $d$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ .

### 3) Plans perpendiculaires

**Propriété :** Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

- Admis -



#### Méthode : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

Dans un repère orthonormé, les plans  $P$  et  $P'$  ont pour équations respectives  $2x + 4y + 4z - 3 = 0$  et  $2x - 5y + 4z - 1 = 0$ .

Démontrer que les plans  $P$  et  $P'$  sont perpendiculaires.

Les plans  $P$  et  $P'$  sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Un vecteur normal de  $P$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  et un vecteur normal de  $P'$  est  $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times 2 + 4 \times (-5) + 4 \times 4 = 0$$

Les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux donc les plans  $P$  et  $P'$  sont perpendiculaires.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.  
[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – [www.maths-et-tiques.fr](http://www.maths-et-tiques.fr)