

FONCTION EXPONENTIELLE

I. Définition

Théorème : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration de l'unicité (exigible BAC) :
L'existence est admise

- Démontrons que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)f(-x)$.
Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) \\ &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction h est donc constante.

Comme $h(0) = f(0)f(0) = 1$, on a pour tout réel x : $f(x)f(-x) = 1$.

La fonction f ne peut donc pas s'annuler.

- Supposons qu'il existe une fonction g telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

Comme f ne s'annule pas, on pose $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

$$k'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{(f(x))^2} = 0.$$

k est donc une fonction constante.

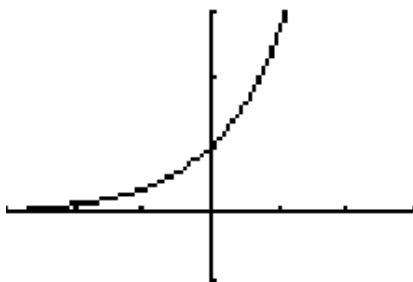
Or $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$ donc pour tout x : $k(x) = 1$.

Et donc $f(x) = g(x)$. L'unicité de f est donc vérifiée.

Définition : On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On note cette fonction **exp**.

Conséquence : $\exp(0) = 1$

Avec la calculatrice, il est possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque : On prouvera dans le paragraphe II. que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi $\exp(21)$ dépasse le milliard.

II. Etude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp x)' = \exp x$

Démonstration : Conséquence immédiate de sa définition

2) Variations

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : On a démontré dans le paragraphe I. que la fonction exponentielle ne s'annule jamais.

Or, par définition, $\exp(0) = 1$ donc pour tout x , $\exp x > 0$.

Comme $(\exp x)' = \exp x > 0$, la fonction exponentielle est strictement croissante.

3) Limites en l'infini

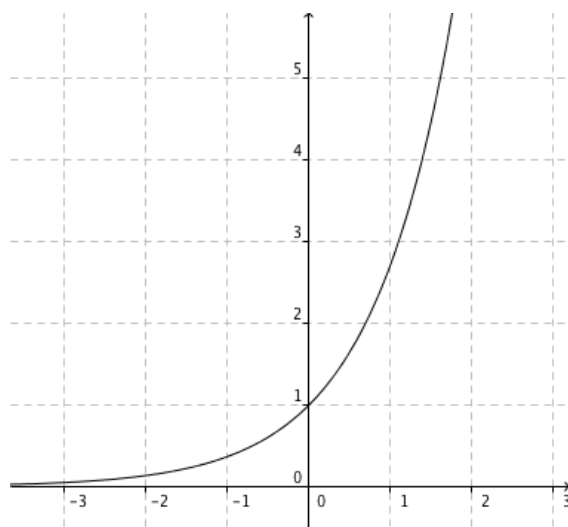
Propriété : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$

- Propriété démontrée au paragraphe III. -

4) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp x)'$	+	
$\exp x$	0	$+\infty$



III. Propriété de la fonction exponentielle

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y , on a : $\exp(x + y) = \exp x \exp y$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Démonstration :

Comme $\exp x \neq 0$, on pose $f(x) = \frac{\exp(x + y)}{\exp x}$ avec y un nombre réel.

Pour tout x , on a $f'(x) = \frac{\exp(x + y) \exp x - \exp(x + y) \exp x}{(\exp x)^2} = 0$.

Donc la fonction f est constante.

Comme $f(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp y$, on en déduit que $\frac{\exp(x + y)}{\exp x} = \exp y$.

Corollaires : Pour tous réels x et y , on a :

a) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$

b) $\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$

c) $\exp(nx) = (\exp x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration :

a) $\exp x \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$

b) $\exp(x - y) = \exp(x + (-y))$

$$= \exp x \exp(-y)$$

$$= \exp x \frac{1}{\exp y} = \frac{\exp x}{\exp y}$$

c) La démonstration s'effectue par récurrence.

L'initialisation est triviale.

La démonstration de l'hérédité passe par la décomposition :

$$\exp((n+1)x) = \exp(nx + x) = \exp(nx) \exp x = (\exp x)^n \exp x = (\exp x)^{n+1}.$$

2) Le nombre e

Définition : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e .

On a ainsi $\exp 1 = e$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e .

e^1

2.718281828

Notation nouvelle :

$$\exp x = \exp(x \times 1) = (\exp(1))^x = e^x$$

On note pour tout x réel, $\exp x = e^x$



Comme π , le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Ses premières décimales sont :

$e \approx 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274...$

Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit «algébrique».

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentiel.

Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, *Euler* explique que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Rappelons que par exemple $5!$ se lit "factoriel 5" et est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.

Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e .

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriétés : Pour tous réels x et y , on a :

a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

b) $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$

c) $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $(e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Remarque : On retrouve les propriétés des puissances.

Démonstration de d) (exigible BAC) :

- Soit la fonction g définie par $g(x) = e^x - x$.

Pour x positif, $g'(x) = e^x - 1 \geq e^0 - 1 = 0$ car la fonction exponentielle est croissante.

Donc la fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$.

Comme $g(0) = 1$, on a pour tout x , $g(x) \geq 1$.

On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$	1	

Et donc $g(x) = e^x - x \geq 0$, soit $e^x \geq x$.

D'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

Méthode : Simplifier les écritures

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$\begin{array}{lll}
 A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} & B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} & C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} \\
 \\
 A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} & B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} & C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} \\
 = \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} & = e^{5 \times (-6)} \times e^{-3} & = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{e^{4 \times (-1)}}{e^{2-6}} \\
 = \frac{e^3}{e^{-5}} & = e^{-30} \times e^{-3} & = \frac{1}{e^{-3 \times 2}} + \frac{e^{-4}}{e^{2-6}} \\
 = e^{3-(-5)} & = e^{-30-3} & = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} \\
 = e^8 & = e^{-33} & = e^6 + 1
 \end{array}$$

Propriétés : Pour tous réels a et b , on a :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 1$

Les solutions sont -3 et 1.

b) $e^{4x-1} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$

$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$.

IV. Limites et croissances comparées

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ et pour tout entier n , $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

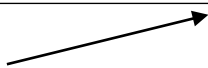
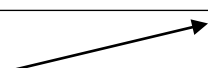
Démonstration :

a) - On pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

On a : $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.

Pour tout x strictement positif, $f''(x) = e^x - 1 \geq 0$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f'(x)$	1	
Signe de $f'(x)$		+
$f(x)$	1	

On en déduit que pour tout x strictement positif $f(x) > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.

Et donc $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Dans le cas général, il faut montrer que :

$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n$ et appliquer le résultat précédent.

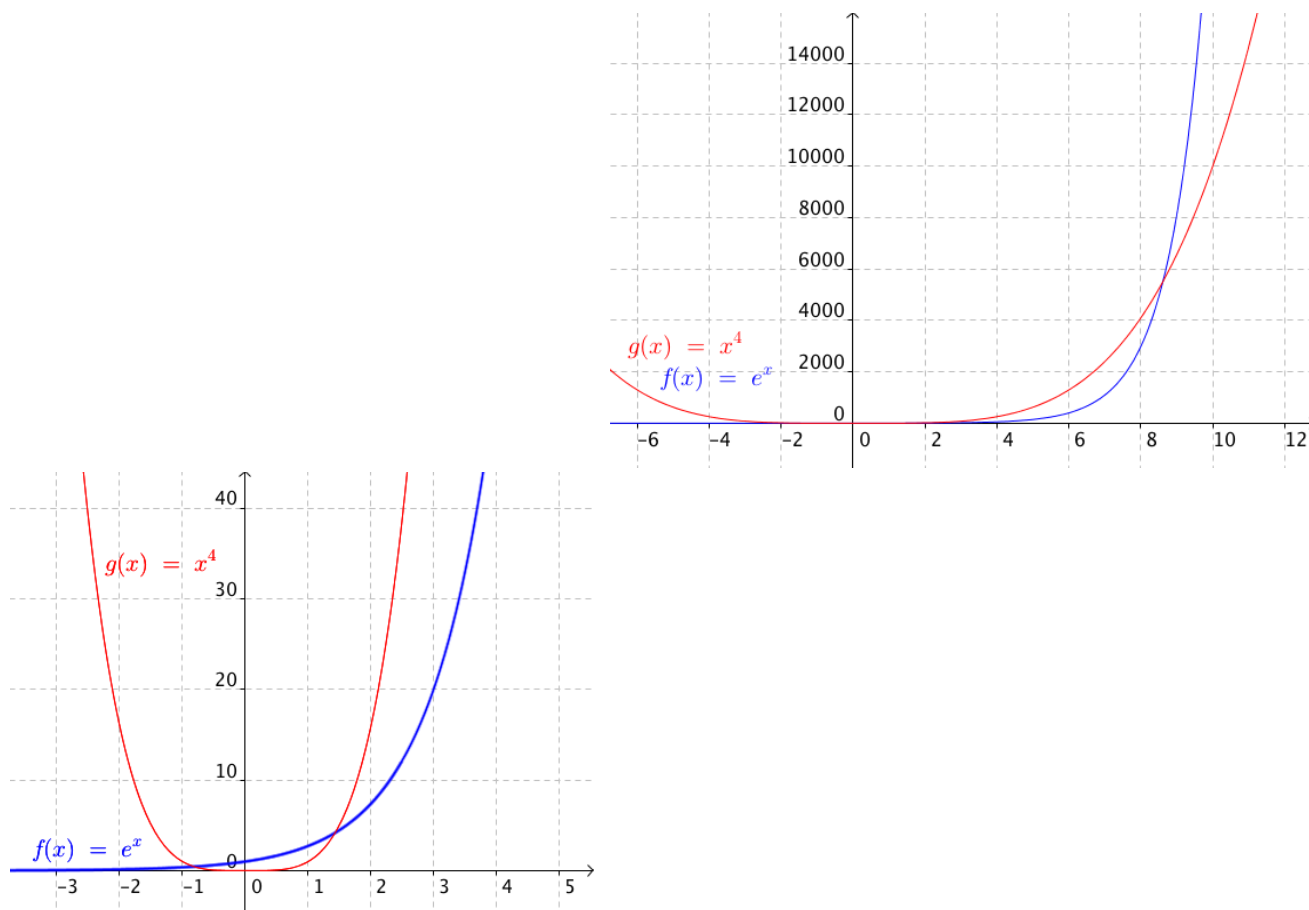
b) - $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-X e^{-X}) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{X}{e^X} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\frac{e^X}{X}} \right) = 0$.

- Dans le cas général, il faut montrer que :

$\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \right) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x \leq \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \right)$ et appliquer le résultat précédent.

Remarque : Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Exemple : Comparaison de la fonction exponentielle et de la fonction $x \mapsto x^4$ dans différentes fenêtres graphiques.



On constate que pour x suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction $x \mapsto x^4$.

Propriété :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration : Il s'agit de la définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.

Méthode : Calculer des limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-3x})$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1 - \frac{1}{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-3x}) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1 - \frac{1}{x}} = e^1 = e$

c) Le dénominateur comprend une forme indéterminée de type " $\infty - \infty$ ".
Levons l'indétermination :

$$\frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1}{1} = 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = 1$.

V. Fonctions de la forme e^u

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto e^u$ est dérivable sur I . Sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

- Admis -

Exemple :

Soit $f(x) = e^{4x+3}$ alors $f'(x) = 4e^{4x+3}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto e^{u(x)}$ ont le même sens de variation.

Démonstration :

On a $(e^u)' = u'e^u$

Comme $e^u > 0$, u' et $(e^u)'$ sont de même signe.

Exemple :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$ donc la fonction

$x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

Méthode : Etudier une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

- Etudier les limites de f à l'infini.
- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- Tracer la courbe représentative de la fonction f .

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \times \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} \right) = 0$$

$$b) f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}}$$

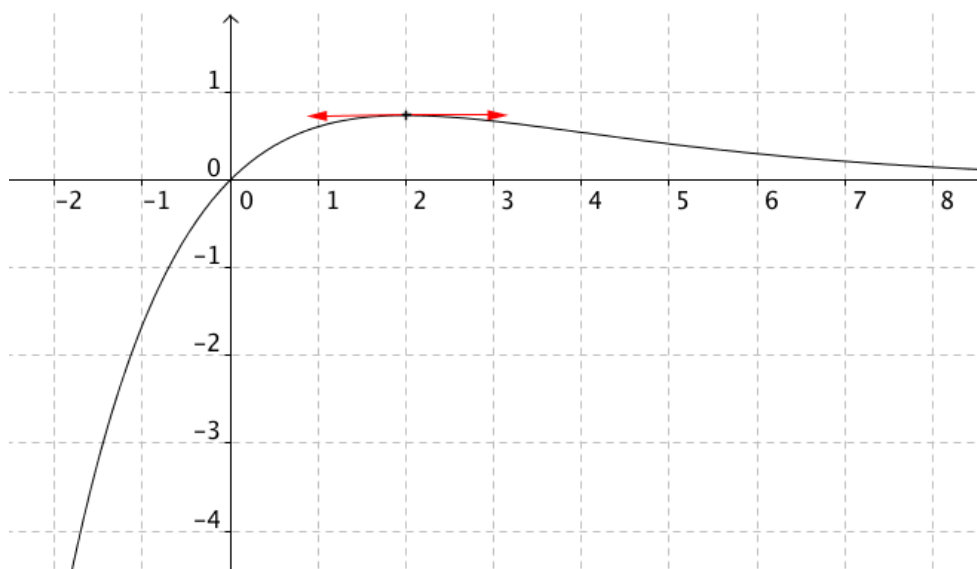
$$c) \text{ Comme } e^{-\frac{x}{2}} > 0, f'(x) \text{ est du signe de } 1 - \frac{x}{2}.$$

f est donc croissante sur l'intervalle $] -\infty; 2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

d)



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales