

INTEGRATION (Partie 1)

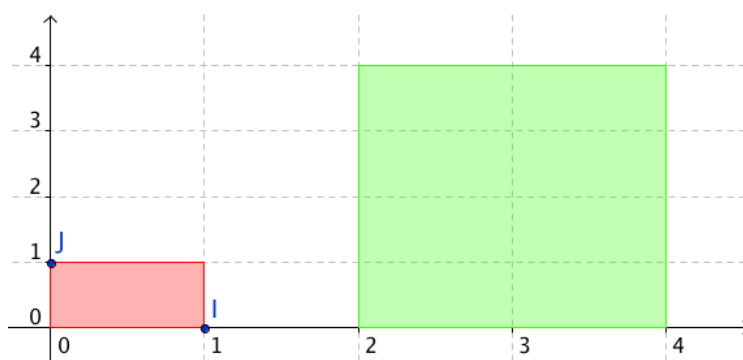


En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIV^e siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on parlait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).

Au milieu du XIX^e siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.

I. Intégrale et aire

1) Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

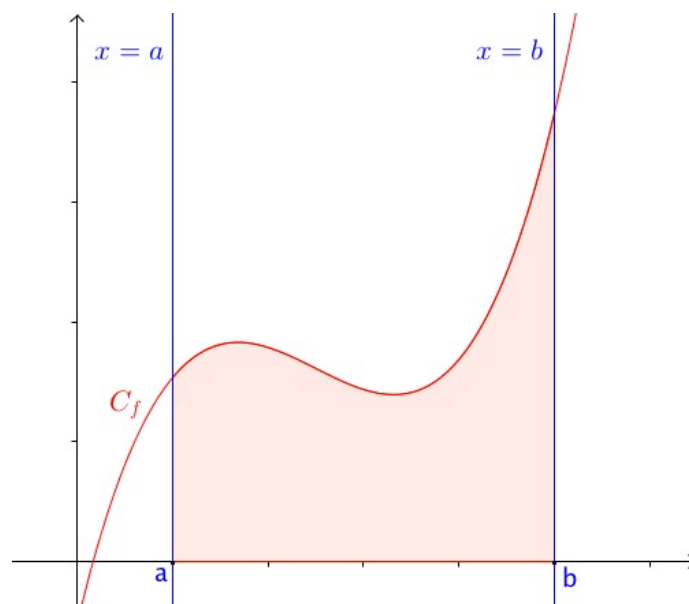
L'aire du rectangle vert est égale 8 fois à l'aire du rectangle rouge.

L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a ; b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ se note : $\int_a^b f(x) dx$

Et on lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$ ".



Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.

Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Remarques :

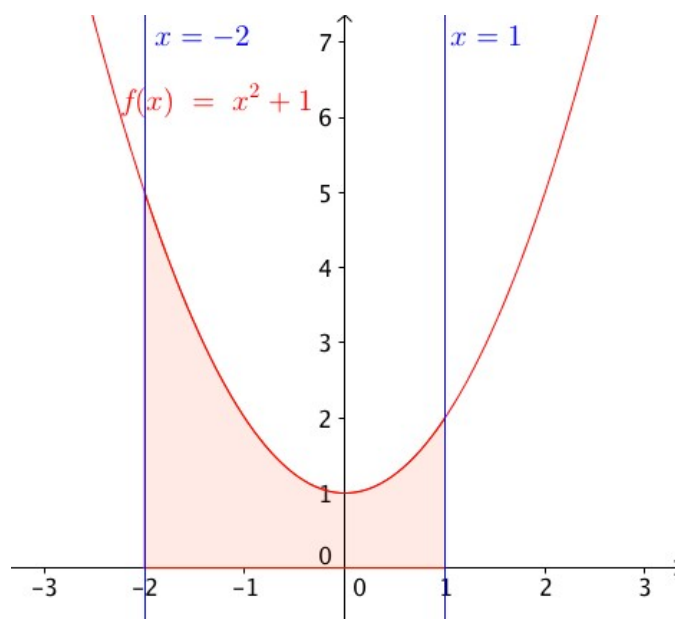
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

" dx " ou " dt " nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 1]$ et se note $\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx$.



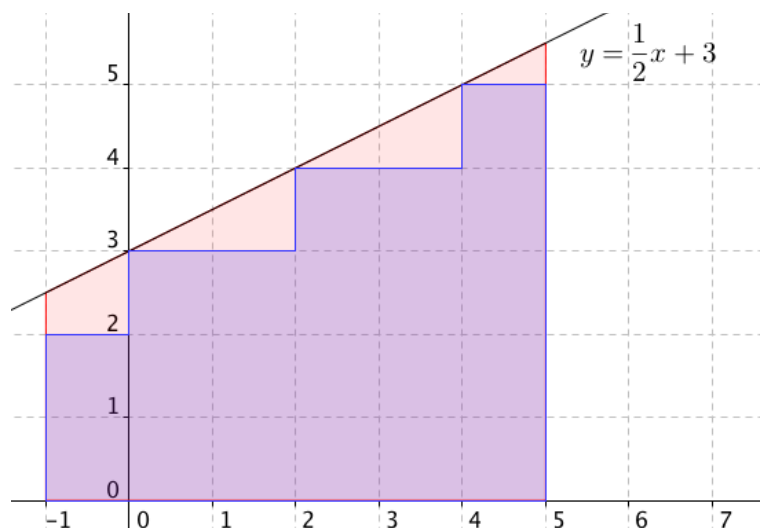
Un logiciel de calcul formel peut permettre d'obtenir l'aire cherchée.

Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_1^5 f(x) dx$.

a)



b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$.

Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^5 f(x) dx = 21 \text{ u.a.} + 3 \text{ u.a.} = 24 \text{ u.a.}$

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a ; b]$.

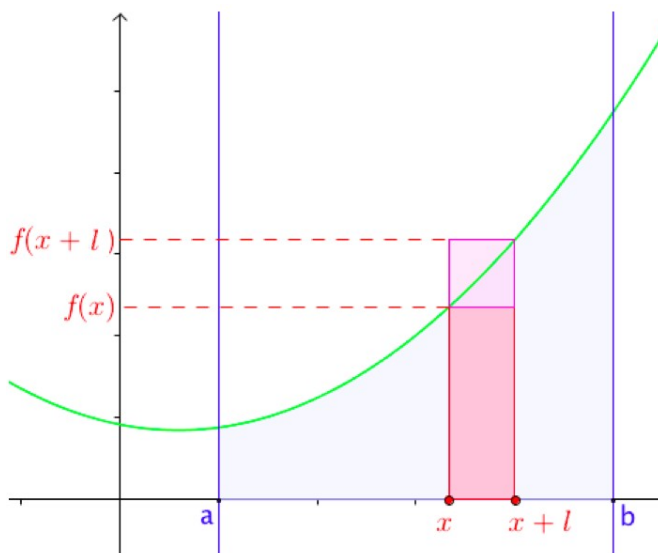
On partage l'intervalle $[a ; b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$.

Sur un sous-intervalle $[x ; x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire $l \times f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire $l \times f(x+l)$.

Sur l'intervalle $[a ; b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement.



Langage naturel
Entrée
Saisir les réels a et b
Saisir l'entier n
Initialisation
Affecter à L la valeur $(b-a)/n$
Affecter à x la valeur a
Affecter à m la valeur 0
Affecter à p la valeur 0
Traitement des données
Pour i allant de 0 à $n-1$
Faire
Affecter à m la valeur $m+L \times f(x)$
Affecter à x la valeur $x+L$
Affecter à p la valeur $p+L \times f(x)$
Sortie
Afficher m et p

```

1 a=input("a=")
2 b=input("b=")
3 n=input("n=")
4 L=(b-a)/n
5 x=a
6 m=0
7 p=0
8 for i=0:(n-1)
9     m=m+L*f(x)
10    x=x+L
11    p=p+L*f(x)
12 end
13 afficher(m)
14 afficher(p)

```

Exemple :

Avec le logiciel Scilab, on programme l'algorithme pour la fonction $f(x) = x^2$.

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur $[1 ; 2]$.

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.

```
-->exec(' /Users/ymonka
a=1
b=2
n=10
```

2.185

2.485

```
-->exec(' /Users/ymonka
a=1
b=2
n=50
```

2.3034

2.3634

```
-->exec(' /Users/ymonka
a=1
b=2
n=100
```

2.31835

2.34835

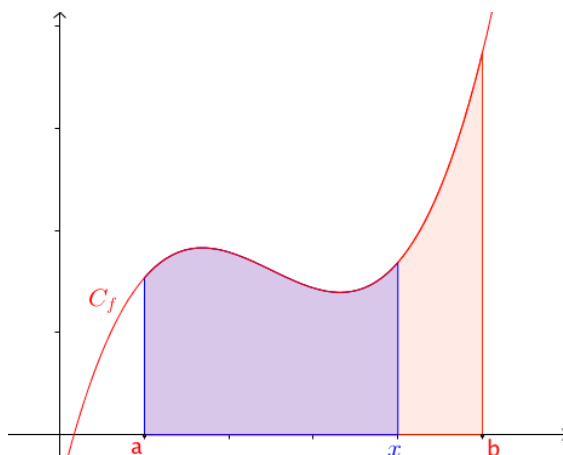
On vérifie avec un logiciel de calcul formel :

$\int_1^2 x^2 dx$	$\frac{7}{3}$
$\int_1^2 x^2 dx$	2.33333

5) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

La fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a ; b]$ et sa dérivée est la fonction f .



Démonstration dans le cas où f est strictement croissante :

- On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle $[a ; b]$ avec $h > 0$.

On veut démontrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+h} f(x)dx.$$

On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f (en vert). Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, $\text{Aire}(ABFE) = h \times f(x)$ et

$$\text{Aire}(ABHG) = h \times f(x+h).$$

Comme f est croissante sur $[a ; b]$, on a :
 $h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$

Puisque $h > 0$, on a :

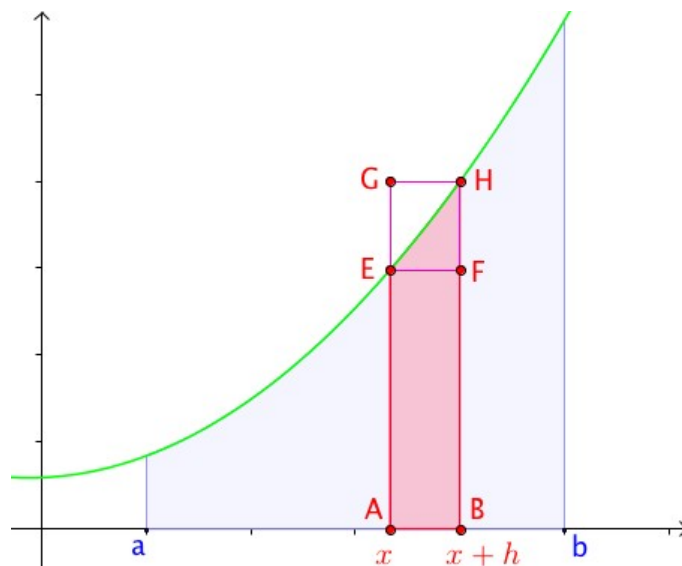
$$f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h).$$

Comme f est continue sur $[a ; b]$, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

- Dans le cas où $h < 0$, la démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

On en déduit que $F'(x) = f(x)$.



Méthode : Etudier une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur $[0 ; 10]$ par $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$.

- Etudier les variations de F .
- Tracer sa courbe représentative.

a) $t \mapsto \frac{t}{2}$ est continue et positive sur $[0 ; 10]$ donc F est dérivable sur $[0 ; 10]$ et

$$F'(x) = \frac{x}{2} > 0.$$

Donc F est croissante sur $[0 ; 10]$.

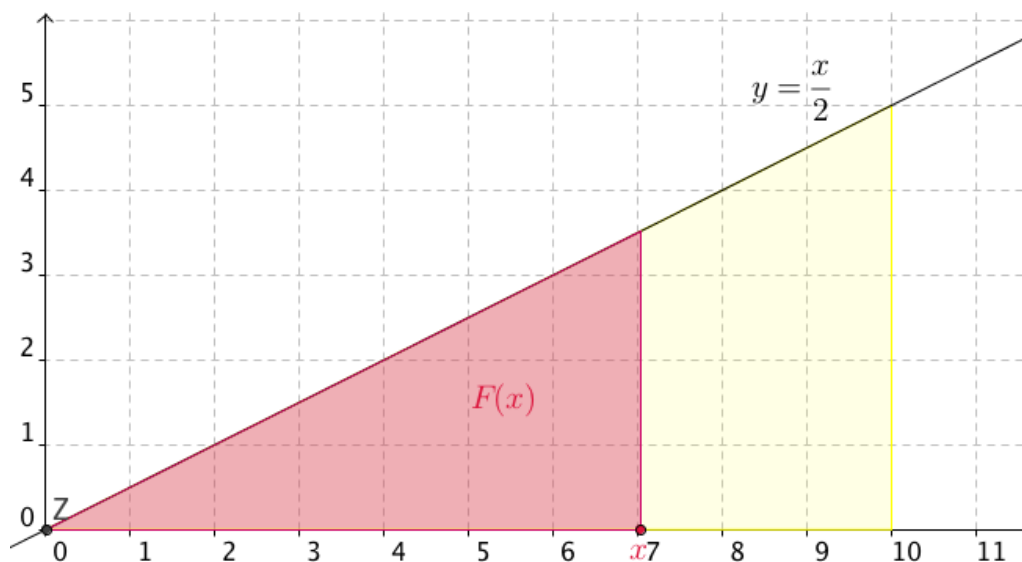
On dresse le tableau de variations :

x	0	10
-----	---	----

$F'(x)$	+
$F(x)$	0  25

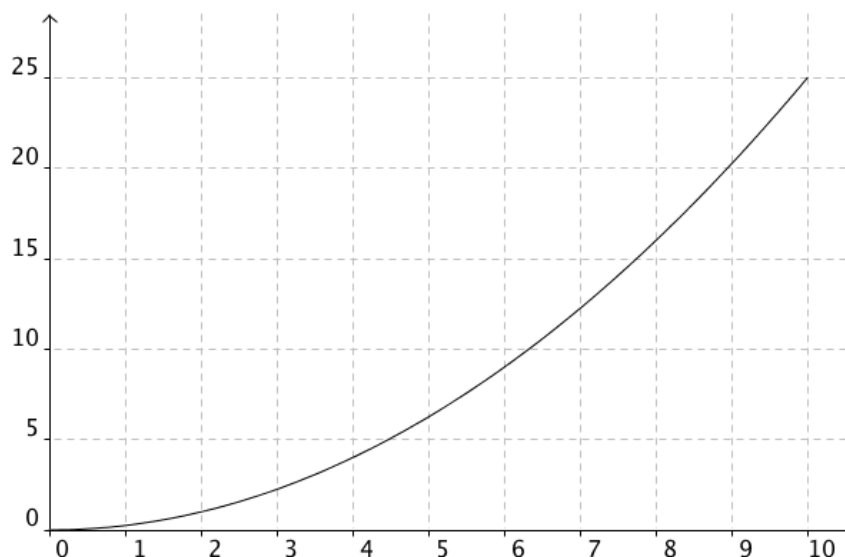
$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.

Ainsi $F(10) = \frac{10 \times 5}{2} = 25 \text{ u.a.}$



b) Pour tout x de $[0 ; 10]$, on a $F(x) = \frac{x \times \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4} \text{ u.a.}$

On a ainsi la représentation graphique de F :



II. Primitive d'une fonction continue

1) Définition et propriétés

Exemple :

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x + 3 \quad \quad x \mapsto x^2 + 3x - 1$$

On constate que $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.

On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I , une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

" F a pour dérivée f " et " f a pour primitive F ".

Exemple :

$F(x) = x$ est une primitive de $f(x) = \frac{x^2}{2}$ car $f'(x) = F(x)$ pour tout réel x .

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
,		$\mathbb{R}$
entier		$\mathbb{R}$
entier		ou
		$\mathbb{R}$
		$\mathbb{R}$
		$\mathbb{R}$

3) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur $[a ; b]$.

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a ; b]$ alors :

- est une primitive de ,
- est une primitive de avec k réel.

Démonstration :

-
-

4) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Une primitive	Conditions
entier		Si

Méthode : Recherche de primitives

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I .

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) sur $\mathbb{R}$ | b) sur |
| c) sur $\mathbb{R}$ | d) sur $\mathbb{R}$ |
| e) sur $\mathbb{R}$ | f) sur $\mathbb{R}$ |
| g) sur $\mathbb{R}$ | |

- a)
b) donc
c) du type avec
donc
d) du type avec
donc
e) du type avec
donc
f) du type avec
donc
g) donc

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I .
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C , la fonction est une primitive de f sur I .

Démonstration :

F est une primitive de f .

On pose .

Donc G est une primitive de f .

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, toute fonction de la forme , avec , est une primitive de f .

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Admis -

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par .

1) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par est une primitive de f .

2) Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

1) La fonction F est une primitive de f si $F' = f$.

.

2) Toutes les primitives de f sont de la forme : $G(x) = F(x) + C$ où C est un nombre réel.

On cherche la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit : $G(1) = 0$.

Donc $F(1) + C = 0$

La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est G telle que :

$$G(x) = F(x) - e^2 = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales