

## FONCTION LOGARITHME NEPERIEN



En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* ».

Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.

*Neper* construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).

Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William*

*Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.

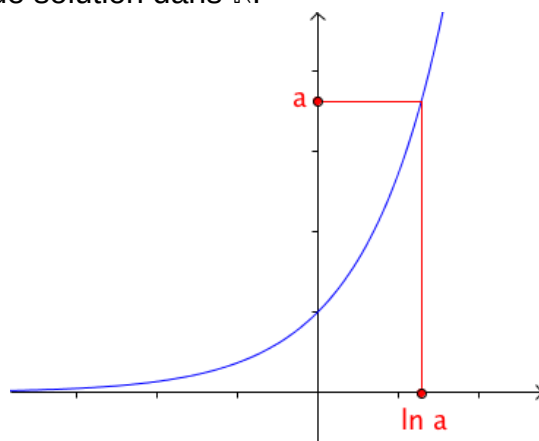
Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.

L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (paragraphe II). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

### I. Définition

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $]0; +\infty[$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel  $a$  de  $]0; +\infty[$  l'équation  $e^x = a$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ .



**Définition :** On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif  $a$ , l'unique solution de l'équation  $e^x = a$ . On la note  $\ln a$ .

La fonction logarithme népérien, notée **ln**, est la fonction :

$$\ln : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

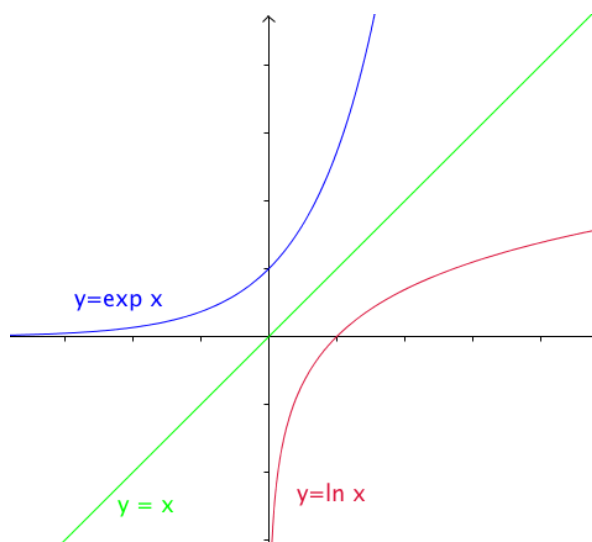
Remarques :

- Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log** est définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$



Conséquences :

a)  $y = \ln x$  avec  $x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$

b)  $\ln 1 = 0$  ;  $\ln e = 1$  ;  $\ln \frac{1}{e} = -1$

c) Pour tout  $x$ ,  $\ln e^x = x$

d) Pour tout  $x$  positif,  $e^{\ln x} = x$

Démonstrations :

a) Par définition

b) - Car  $e^0 = 1$

- Car  $e^1 = e$

- Car  $e^{-1} = \frac{1}{e}$

c) Si on pose  $y = e^x$ , alors  $x = \ln y = \ln e^x$

d) Si on pose  $y = \ln x$ , alors  $x = e^y = e^{\ln x}$

## II. Propriété de la fonction logarithme népérien

### 1) Relation fonctionnelle

**Théorème :** Pour tous réels  $x$  et  $y$  strictement positifs, on a :  $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

Démonstration :

$$e^{\ln(x \times y)} = x \times y = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$$

$$\text{Donc } \ln(x \times y) = \ln x + \ln y$$

Corollaires : Pour tous réels  $x$  et  $y$  strictement positifs, on a :

$$\text{a) } \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\text{b) } \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\text{c) } \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\text{d) } \ln x^n = n \ln x \text{ avec } n \text{ entier relatif}$$

Démonstrations :

$$\text{a) } \ln \frac{1}{x} + \ln x = \ln \left( \frac{1}{x} \times x \right) = \ln 1 = 0$$

$$\text{b) } \ln \frac{x}{y} = \ln \left( x \times \frac{1}{y} \right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\text{c) } 2 \ln \sqrt{x} = \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt{x} = \ln (\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln x$$

d) On démontre ce résultat par récurrence.

L'initialisation est triviale.

La démonstration de l'hérédité passe par la décomposition :

$$\ln x^{n+1} = \ln (x^n \times x) = \ln x^n + \ln x = n \ln x + \ln x = (n+1) \ln x.$$

Méthode : Simplifier une expression

$$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$$

$$B = 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3$$

$$C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}$$

$$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$$

$$B = 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3$$

$$C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}$$

$$= \ln(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})$$

$$= \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2$$

$$= 2 \ln e - \ln 2 + \ln e$$

$$= \ln(9 - 5)$$

$$= \ln \frac{2^3 \times 5}{3^2}$$

$$= 2 - \ln 2 + 1$$

$$= \ln 4$$

$$= \ln \frac{40}{9}$$

$$= 3 - \ln 2$$

### III. Etude de la fonction logarithme népérien

#### 1) Continuité et dérivabilité

**Propriété :** La fonction logarithme népérien est continue sur  $]0; +\infty[$ .

- Admis -

**Propriété :** La fonction logarithme népérien est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

Démonstration :

La fonction  $\ln$  est continue sur  $]0; +\infty[$ , donc pour tout réel  $a > 0$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$ .

Donc par composée de limites, en posant  $X = \ln x$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{X \rightarrow \ln a} \frac{X - \ln a}{e^X - e^{\ln a}} = \lim_{X \rightarrow \ln a} \frac{1}{\frac{e^X - e^{\ln a}}{X - \ln a}}$$

Comme la fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\lim_{X \rightarrow \ln a} \frac{1}{\frac{e^X - e^{\ln a}}{X - \ln a}} = \frac{1}{e^{\ln a}} = \frac{1}{a} \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

Exemple :

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  :  $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \times x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2} \\ &= \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \ln x \frac{2 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

#### 2) Variations

**Propriété :** La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

Démonstration :

Pour tout réel  $x > 0$ ,  $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ .

**Corollaires :** Pour tous réels  $x$  et  $y$  strictement positifs, on a :

a)  $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$

b)  $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

**Méthode :** Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :  $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$

a) Ensemble de définition :

$$x-3 > 0 \quad 9-x > 0$$

$$x > 3 \quad \text{et} \quad x < 9$$

L'équation est définie sur  $]3; 9[$ .

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-3)(9-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-3)(9-x) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(9-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \text{ et } x = \frac{-12 \pm \sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc  $6 - 2\sqrt{2}$  et  $6 + 2\sqrt{2}$  car elles appartiennent bien à l'ensemble de définition.

b) Ensemble de définition :

$$3-x > 0 \quad x+1 > 0$$

$$x < 3 \quad \text{et} \quad x > -1$$

L'équation est définie sur  $] -1; 3[$ .

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{3-x}{x+1} \leq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{x+1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-2x}{x+1} \leq 0$$

| $x$                | -1 | 1 | 3 |
|--------------------|----|---|---|
| $2-2x$             | +  | 0 | - |
| $x+1$              | 0  | + | + |
| $\frac{2-2x}{x+1}$ |    | + | 0 |

L'ensemble solution est donc  $[1; 3[$ .

### 3) Limites aux bornes

**Propriété :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Démonstration :

- Soit un intervalle  $]a; +\infty[$  quelconque.

Démontrons que cet intervalle contient toutes les valeurs de  $\ln$  dès que  $x$  est suffisamment grand.

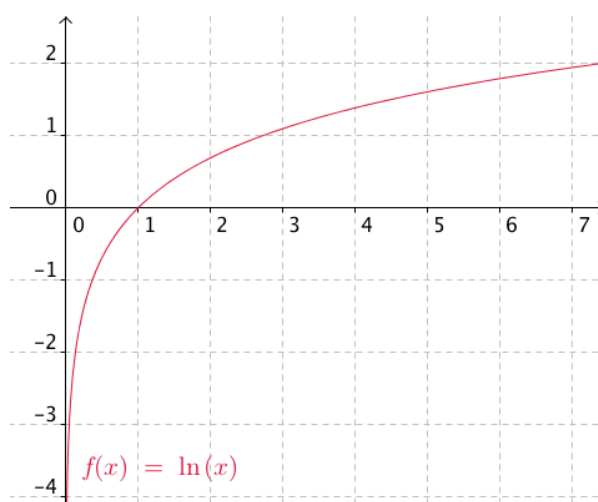
$\ln x > a$  à condition que  $x > e^a$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = \lim_{\substack{X \rightarrow +\infty \\ X > 0}} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-\ln X) = -\infty.$$

### 4) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| $x$       | 0         | $+\infty$ |
| $\ln'(x)$ |           | +         |
| $\ln x$   | $-\infty$ | $+\infty$ |



## IV. Limites et croissances comparées

**Propriétés (croissances comparées) :**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et pour tout entier non nul  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$  et pour tout entier  $n$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$

Démonstrations dans les cas où  $n = 1$  :

En posant  $X = \ln x$  :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \text{ par croissance comparée de } x \mapsto x \text{ et } x \mapsto e^x.$$

$$b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X \times X = 0 \text{ par croissance comparée de } x \mapsto x \text{ et } x \mapsto e^x.$$

Remarque : Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

**Propriétés :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration :

La fonction  $\ln$  est dérivable en 1 et  $\ln'(1) = 1$ .

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = 1 \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ car } \ln 1 = 0.$$

Méthode : Déterminer une limite

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\infty - \infty$ ".

Levons l'indétermination :

$$x - \ln x = x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1.$$

$$\text{Et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty.$$

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \text{ comme composée de limites.}$$

c) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$

Et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$ .

## V. Fonctions de la forme $\ln u$

**Propriété :** Soit  $u$  une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ .  
La fonction  $x \mapsto \ln u(x)$  est dérivable sur  $I$ . Sa dérivée est la fonction  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

- Admis -

Exemple :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0;2[$  par  $f(x) = \ln(2x - x^2)$  alors  $f'(x) = \frac{2 - 2x}{2x - x^2}$ .

**Propriété :** Soit  $u$  une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ .  
Les fonctions  $x \mapsto u(x)$  et  $x \mapsto \ln u(x)$  ont le même sens de variation.

Démonstration :

On a  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ .

Comme  $u > 0$ ,  $u'$  et  $(\ln u)'$  sont de même signe.

Méthode : Etudier une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -2;1[$  par  $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$ .

- Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$ .
- Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$ .
- Tracer sa courbe représentative.

a) -  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{1-x} = 0$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$  comme composée de limites.

-  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x+2}{1-x} = +\infty$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$  comme composée de limites.

b) La fonction  $u : x \mapsto \frac{x+2}{1-x}$  est strictement positive et dérivable sur  $] -2; 1[$  donc  $f$  est dérivable sur  $] -2; 1[$ .

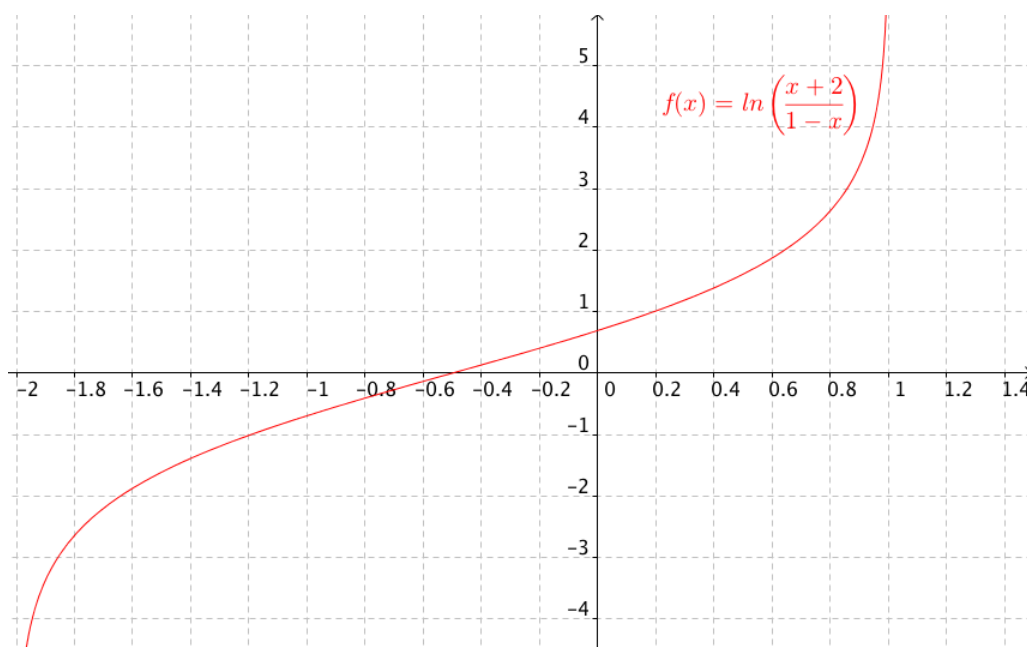
$$c) u'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

Donc  $u'(x) > 0$ .

La fonction  $u$  est donc strictement croissante sur  $] -2; 1[$ , d'où :

La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] -2; 1[$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | -2        | 1         |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)