

Exercice 1 *Quelques résultats théoriques - Règles opératoires sur les fonctions dérivables*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un point à l'intérieur de I .

Démontrer que si f et g sont des fonctions dérivables en a alors :

1. $f + g$ est dérivable en a .
2. fg est dérivable en a
3. Si g est non nulle au voisinage de a alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a .

Exercice 2 *Dérivation d'une composition de fonctions dérivables*

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$.

Démontrer que la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) v'(u(x))$$

Exercice 3 *Un exemple de fonction dérivable à dérivée non continue*

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

Montrer que :

1. f est continue en 0.
2. f est dérivable en 0.
3. f' n'est pas continue en 0.

Exercice 4 *Un petit théorème de point fixe*

Soit f une fonction continue et définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Démontrer que f admet (au moins) un point fixe dans $[0 ; 1]$.

Exercice 5 *Où l'on applique le théorème de bijection à la dérivée*

Démontrer que l'équation

$$x^4 + x^3 - x + 1 = 0$$

n'a pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *Une limite classique*

On rappelle que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Étudier la limite suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$$

Exercice 7 Étude d'une fonction irrationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle des asymptotes horizontales ?
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

Exercice 8 Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$

Démontrer que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et préciser leur fonction dérivée.

On rappelle que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$

Exercice 9 Une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1 ; 1[$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

1. Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de f .
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Démontrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1 ; 1[$.

Exercice 10 On ne peut être dépassé par plus lent que soit.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [0 ; 1]$ telles que : $f(0) = g(0)$ et $f' \leq g'$ sur I .

Démontrer que $f \leq g$ sur I . (On pourra étudier les variations de $g - f$)

Exercice 11 Utilisation de l'accroissement moyen pour déterminer une limite

1. On se propose d'étudier la limite en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} \quad \text{pour } x \neq \frac{\pi}{2}.$$

Vérifier que l'on est en présence d'une forme indéterminée.

En considérant l'accroissement moyen de la fonction cosinus en $\frac{\pi}{2}$, déterminer la limite ci-dessus.

2. Par une méthode analogue, étudier les limites de f en a dans les cas suivants :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad \text{en } a = 0$$

$$f(x) = \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \quad \text{en } a = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 12 Deux fonctions continues qui commutent sur un segment ont un point fixe commun

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $I = [0, 1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'alors, il existe un réel ℓ de $[0, 1]$ tel que $f(\ell) = g(\ell)$.

1. Question préliminaire

Soit φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$.

Démontrer qu'il existe un réel $a \in [0, 1]$ tel que :

$$\varphi(a) = 0$$

On a donc $f(a) = a$. On dit que a est un point fixe de f .

Dans la suite du problème (questions 2, 3 et 4),

on suppose qu'il n'existe pas de réel ℓ dans $[0, 1]$ tel que $f(\ell) = g(\ell)$ et on déduit une contradiction.

(Il s'agit d'un raisonnement par l'absurde).

2. On note h la fonction définie sur I par $h = f - g$.

Démontrer que h est de signe constant.

3. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

a. Démontrer la suite (u_n) est bornée.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un point fixe de f . (C'est à dire : $f(u_n) = u_n$)

c. En déduire que la suite (u_n) est monotone.

d. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$. (On ne cherchera pas à calculer ℓ)

4. Dans cette question, nous allons en déduire une contradiction

a. Démontrer que $f(\ell) = \ell$

b. Démontrer que $g(\ell) = \ell$

c. En déduire une contradiction.

5. Conclure.

Exercice 1 Quelques résultats théoriques - Règles opératoires sur les fonctions dérivables

Par hypothèse, les accroissements moyens $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ admettent des limites lorsque h tend vers 0. On note $f'(a)$ et $g'(a)$ ces limites respectives.

1. On a :

$$\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

Donc $\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}$ admet une limite égale à $f'(a) + g'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Ce qui prouve que $f+g$ est dérivable en a (et de plus, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$).

2. On a :

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} &= \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\ &= \frac{[f(a+h)-f(a)]g(a+h)+f(a)[g(a+h)-g(a)]}{h} \\ &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a+h) + f(a) \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \end{aligned}$$

Donc $\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h}$ admet une limite égale à $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Ce qui prouve que fg est dérivable en a (et de plus, $(fg)'(a) = (f'g + fg')(a)$).

3. Soit V un voisinage de a sur lequel g est non nulle. Pour $h \in V$, on a :

$$\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)} = -\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \times \frac{1}{g(a)g(a+h)}$$

Or, g est continue en a puisque dérivable en a , donc $\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a)$.

Donc $\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}$ admet une limite égale à $-\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$ lorsque h tend vers 0.

Ce qui prouve $\frac{1}{g}$ est dérivable en a (et de plus, $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$).

Exercice 2 Dérivation d'une composition de fonctions dérivables

Soit $x_0 \in I$.

On écrit :

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

Posons $y_0 = u(x_0)$ et $y = u(x)$:

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

Or, v étant dérivable en y_0 , on a :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} = v'(y_0)$$

Et u étant dérivable en x_0 , on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) \times v'(y_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$$

C'est-à-dire :

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$$

Ceci étant valable pour tout $x_0 \in I$, on en déduit la dérivabilité de $v \circ u$ sur I et

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) v'(u(x))$$

Exercice 3 Un exemple de fonction dérivable à dérivée non continue

1. Nous avons, pour tout réel $x \neq 0$:

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$$

Donc :

$$x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$$

D'après le théorème de comparaison des limites (en 0), on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0 \quad (\text{puisque } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0)$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

2. Montrons que f est dérivable en 0 :

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(Même type de preuve que ci-dessus. On écrit : $\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$)

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Ce qui signifie que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

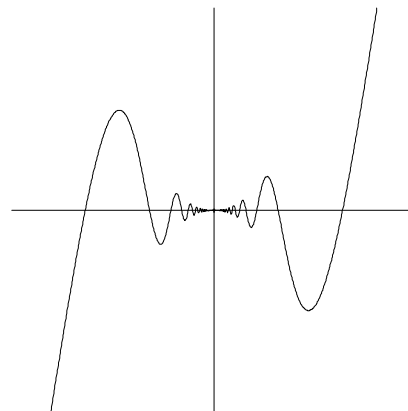
3. Montrons que f' n'est pas continue en 0.

En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

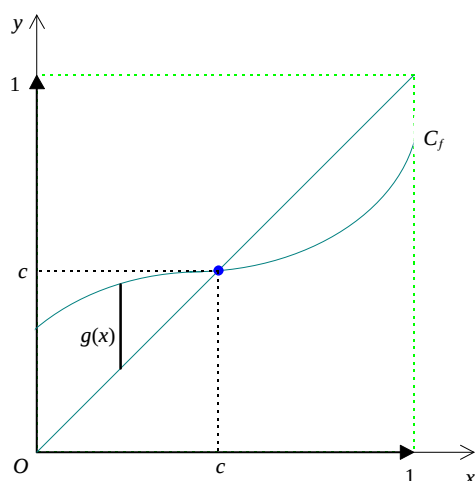
$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, mais la quantité $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0. (Voir leçon sur la continuité)

Donc f' n'a pas de limite en 0, ce qui signifie qu'elle n'est pas continue en 0.



Exercice 4 Un petit théorème de point fixe



Considérons la fonction g définie par :

$$g(x) = f(x) - x$$

Cette fonction g est continue sur $[0 ; 1]$ (différence de fonctions continues) et

$$g(0) = f(0) \geq 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

Le réel $\lambda = 0$ est bien intermédiaire entre $g(0)$ et $g(1)$, donc d'après le théorème du même nom, il existe un réel $c \in [0 ; 1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$f(c) = c$$

Donc f admet (au moins) un point fixe dans $[0 ; 1]$.

L'équation $f(x) = x$ est ainsi équivalente à $g(x) = 0$.

Exercice 5 Où l'on applique le théorème de bijection à la dérivée

Définissons la fonction f , pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x^4 + x^3 - x + 1$$

La fonction étant polynomiale, elle est indéfiniment dérivable et on a :

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x + 1)$$

On dérive deux fois afin de se ramener à une fonction polynôme de degré 2 (on sait étudier son signe)

Nous en déduisons les variations de la fonction f' :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	α	$+\infty$
Signe de f''	+	0	-	0	+
Variations de f'	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	-1	0	$+\infty$

La fonction f' est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus $f'(0) = -1 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

D'après le théorème de bijection, il existe donc un réel $\alpha \in]0 ; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

On en déduit que f' est négative sur $] -\infty ; \alpha]$ et positive sur $[\alpha ; +\infty[$.

La fonction f admet donc, sur $\mathbb{R}$, un minimum en α . Il nous reste à prouver que $f(\alpha)$ est strictement positif.

Pour cela, encadrons α . On sait que $f'(0) = -1$ et $f'(1) = 6$, donc $\alpha \in]0 ; 1[$. On en déduit :

$$0 < \alpha^4 < 1 \text{ et } 0 < \alpha^3 < 1 \text{ et } 0 < -\alpha + 1 < 1$$

En sommant ces trois encadrements : $0 < \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha + 1 < 3$

C'est-à-dire : $0 < f(\alpha) < 3$

Le minimum de f , sur $\mathbb{R}$, est strictement positif, donc f l'est aussi.

Par conséquent f ne s'annule pas. Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Une limite classique

Si $n = 0$, alors il est clair que : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = 0$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit : $\frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = n \times \frac{\sin(nt)}{nt} \times \frac{t}{\sin(t)}$

On sait que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(nt)}{nt} = 1$ d'où :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = n$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = n$

Exercice 7 Étude d'une fonction irrationnelle

Remarque : $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, la fonction f est effectivement bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. Limite en $-\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

D'où, par composition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$

Finalement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

La courbe C_f n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

Limite en $+\infty$

Pour lever l'indétermination (du type " $\infty - \infty$ "), on utilise la transformation d'écriture suivante :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

Dans le dernier quotient, on a encore une indétermination du type " ∞/∞ ". On écrit, pour $x > 0$:

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

On en déduit facilement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

La courbe C_f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \frac{1}{2}$.

2. On étudie la différence : $f(x) - y = \sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}$

Lorsque x tend vers $-\infty$, on a une indétermination du type " $\infty - \infty$ ". On procède comme précédemment :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} + \frac{1}{2}$$

Et pour $x < 0$, on obtient (attention $\sqrt{x^2} = -x$ dans ce cas) :

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} + \frac{1}{2} = -\frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} + \frac{1}{2}$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = 0$

La droite Δ d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est bien asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

Exercice 8 Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x + h) = \sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h)$$

D'où, pour $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x) \sin(h)}{h} = \frac{\cos(h) - 1}{h} \sin(x) + \frac{\sin(h)}{h} \cos(x)$$

Or, nous savons que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$

L'accroissement moyen $\frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h}$ admet donc une limite lorsque h tend vers 0 et :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$$

On a prouvé que la fonction sinus est dérivable en x et que :

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

Ceci étant valable pour tout réel x , on en déduit que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée la fonction cosinus.

On peut en déduire rapidement la dérivabilité de la fonction cosinus. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que :

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

D'après le théorème de dérivation d'une composée, on obtient :

$$\cos'(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$$

Exercice 9 Une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1 ; 1[$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1. Il est clair pour tout réel x , on a :

$$0 \leq |x| < 1 + |x|$$

En divisant par $1 + |x|$ (qui est strictement positif), on obtient :

$$0 \leq |f(x)| < 1$$

Ce qui prouve que f est bornée (par -1 et 1) sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0 (à savoir $\mathbb{R}$) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = \frac{(-x)}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -f(x)$$

Ce qui prouve que la fonction f est impaire.

Sa représentation graphique est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{1+|h|}$$

D'où :
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1$$

La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

4. Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tous x et y dans $\mathbb{R}_+$, on a :

$$f(y) - f(x) = \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}$$

D'où l'implication suivante : $0 \leq x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : on pouvait aussi calculer la dérivée f' . Sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

Même conclusion que ci-dessus.

Comme f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle l'est sur $\mathbb{R}$.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (comme quotient u/v de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, v ne s'annulant pas)

Et enfin, on montre facilement que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

Bilan : f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image $] -1 ; 1[$.

Exercice 10 On ne peut être dépassé par plus lent que soit.

Calculons la dérivée de la fonction $g - f$: $(g - f)' = g' - f'$

Comme $f' \leq g'$ sur I , on a : $g' - f' \geq 0$ sur I . La fonction $g - f$ est donc croissante sur I . Ce qui signifie :

$$\text{pour tous réels } u \text{ et } v \text{ de } I : u < v \Rightarrow (g - f)(u) \leq (g - f)(v)$$

C'est-à-dire : pour tous réels u et v de $I : u < v \Rightarrow g(u) - f(u) \leq g(v) - f(v)$

En particulier avec $u = 0$, on a : pour tout v de $I : g(0) - f(0) \leq g(v) - f(v)$

Et comme $f(0) = g(0)$: pour tout v de $I : 0 \leq g(v) - f(v)$

C'est-à-dire : pour tout v de $I : 0 \leq g(v) - f(v)$

Ce qui signifie : $f \leq g$ sur I

Exercice 11 Utilisation de l'accroissement moyen pour déterminer une limite

1. On est en présence d'une forme indéterminée car le numérateur et le dénominateur tendent vers 0.

On sait que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc elle l'est *a fortiori* en $\frac{\pi}{2}$) de dérivée la fonction $x \mapsto -\sin(x)$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

2. On considère la fonction φ définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \sqrt{1+x}$$

La fonction φ est dérivable sur $] -1, +\infty[$, donc elle l'est *a fortiori* en 0, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(0)$$

Or, φ est de la forme $\varphi = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 1 + x$, donc $\varphi' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, ce qui donne :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

Et en particulier : $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

La fonction tangente est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et : $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

Exercice 12 Deux fonctions continues qui commutent sur un segment ont un point fixe commun

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $I = [0, 1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'alors, il existe un réel ℓ de $[0, 1]$ tel que $f(\ell) = g(\ell)$.

1. Cette fonction φ est continue sur I (différence de fonctions continues) et :

$$\varphi(0) = f(0) > 0$$

$$\varphi(1) = f(1) - 1 < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $a \in [0, 1]$ tel que $\varphi(a) = 0$, c'est-à-dire :

$$f(a) = a$$

Donc f admet (au moins) un point fixe a dans $[0, 1]$

2. Cette fonction h est continue sur I (différence de fonctions continues).

Si h n'était pas de signe constant, on pourrait trouver des réels α et β dans $[0, 1]$ tels que :

$$h(\alpha) \leq 0 \text{ et } h(\beta) \geq 0$$

Du théorème des valeurs intermédiaires, on déduirait l'existence d'un réel c compris entre α et β tel que :

$$h(c) = 0$$

Ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc h est de signe constant.

3. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

- a. Comme $u_0 \in I$ et g est à valeurs dans I , la suite (u_n) est bien définie d'où :

$$u_n \in I, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

- b. Considérons la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : f(u_n) = u_n$$

- Comme $u_0 = a$ est un point fixe de f , on a $\wp(0)$. La propriété $\wp$ est donc initialisée en 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$. Alors :

$$f(u_{n+1}) = f(g(u_n)) \stackrel{f \circ g = g \circ f}{=} g(f(u_n)) \stackrel{\wp(n)}{=} g(u_n) = u_{n+1}$$

D'où $\wp(n+1)$.

La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang n .

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété $\wp$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \text{ est un point fixe de } f$$

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, examinons la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n \stackrel{3.b.}{=} g(u_n) - f(u_n) = h(u_n)$$

Or, d'après la question 2., h est de signe constant, donc la suite (u_n) est monotone.

- d. La suite (u_n) est monotone est bornée par 0 et 1. Dans tous les cas, elle converge donc vers un réel $\ell \in I$.

4. a. D'après la question 3.b., on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_n$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$$

Or, f est continue en ℓ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, d'où :

$$f(\ell) = \ell$$

b. Par définition, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$$

Or, g est continue en ℓ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell)$, d'où :

$$g(\ell) = \ell$$

c. On a donc :

$$h(\ell) = f(\ell) - g(\ell) = \ell - \ell = 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse faite avant la question 2.

5. L'hypothèse en question est donc fausse. Par conséquent :

il existe un réel ℓ dans I tel que $f(\ell) = g(\ell)$