

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \cos(\pi x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

- ☐ $x \mapsto 2\pi \sin(\pi x^2)$. ☐ $x \mapsto 2\pi x \sin(\pi x^2)$. ☐ $x \mapsto -2\pi x \sin(\pi x^2)$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $[-2, 2]$ dont le tableau de variation de f' est le suivant.

x	-2	-1	0	1	2
f'	1	0	-2	-1	$-\frac{1}{4}$

• Alors

- ☐ $f(-2) < f(-1)$. ☐ $f(-1) < f(0)$. ☐ $f(0) < f(1)$.

• Dans un repère orthogonal, la courbe de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation

- ☐ $y = -\frac{1}{2}$. ☐ $y = \frac{1}{2}x$. ☐ $y = -\frac{1}{2}x$.

3. L'image de $[1, +\infty[$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} - 1$ est

- ☐ $]0, +\infty[$. ☐ $[-1, +\infty[$. ☐ $] -\infty, 0]$.

4. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{20}x^5 - 4x^2$ admet un point d'inflexion d'abscisse

- ☐ $x = 0$. ☐ $x = -2$. ☐ $x = 2$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

La courbe de f dans un repère orthogonal admet exactement

- ☐ deux tangentes horizontales. ☐ une tangente horizontale. ☐ aucune tangente horizontale.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction dérivable sur $[-1, 2]$ telle que $f(-1) = 2$, $f(2) = -1$.

Alors l'équation $f'(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[-1, 2]$.

2. Si le produit de deux fonctions est dérivable en un réel a alors chacune des deux fonctions est dérivable en a .

3. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction

$f : x \mapsto (x^2 - x)(x - 2)$ admet exactement deux tangentes horizontales.

4. Soit f une fonction dérivable sur $[2, 5]$ telle que $|f'(t)| \leq 2$ pour $t \in [2, 5]$.

Alors $|f(5) - f(2)| \leq 6$.

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Déterminer, dans chacun des cas suivants, une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

1. $f : x \mapsto (x-1)^2(x-3), \quad a = 2.$

2. $f : x \mapsto \frac{2x^4}{(x+2)^2}, \quad a = -1.$

3. $f : x \mapsto x(2\sqrt{x}-3), \quad a = 4.$

4. $f : x \mapsto \cos^3 x + \sin x, \quad a = \frac{\pi}{6}.$

2 1. Donner une approximation affine de $\frac{1}{(1+h)^2}$

pour h voisin de 0.

2. En déduire une estimation des réels

$$\frac{1}{(1.0000000002)^2} \text{ et } \frac{1}{(0.9999999998)^2}.$$

3 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto 3x^{10} - \frac{5}{4}x^8 + 3x - 10, \quad I = \mathbb{R}.$

2. $f : x \mapsto (1-x-3x^3)(x+2x)^3, \quad I = \mathbb{R}.$

3. $f : x \mapsto \frac{x^2}{1-x}, \quad I =]1, +\infty[.$

4. $f : x \mapsto \frac{(x+1)^3}{x^2}, \quad I = [1, +\infty[.$

5. $f : x \mapsto \cos(3x) - \sin(2x), \quad I = \mathbb{R}.$

6. $f : x \mapsto \frac{\sin x}{1 - \cos x}, \quad I =]0, \pi[.$

7. $f : x \mapsto (1 + \sin(2x))^3, \quad I = \mathbb{R}.$

8. $f : x \mapsto \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad I = [0, 1[.$

9. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad I =]1, +\infty[.$

10. $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}, \quad I =]0, +\infty[.$

4 Déterminer, dans chacun des cas, les dérivées successives de la fonction f .

1. $f : x \mapsto x^5 - 2x^3 + 3x + 4.$

2. $f : x \mapsto \cos x.$

3. $f : x \mapsto \sin(2x).$

5 Déterminer une fonction polynôme f de degré 3 telle que $f(1) = f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = 1.$

6 1. Calculer les dérivées d'ordre 3 des fonctions

$f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x+1}.$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par

$$h(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

a. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$h(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}.$$

b. En déduire la dérivée d'ordre 3 de la fonction h .

7 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3.$

Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(\sqrt{2+x})}{x-2}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f\left(2\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}{x-2}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(f(x))}{x-2}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + x + 2)}{x}.$

8 Vérifier, dans chacun des cas suivants, que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{x}, \quad I =]0, +\infty[.$

2. $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}, \quad I =]0, \frac{\pi}{2}].$

3. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), \quad I = [1, +\infty[.$

4. $f : x \mapsto \tan(\sin x), \quad I = \mathbb{R}.$

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

1. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{1}{10}]$,

$$0 \leq f'(x) \leq 1.234.$$

2. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{1}{10}]$, on a

$$1 \leq f(x) < 1 + 1.234x.$$

3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-8} de $f(0.0000000011)$.

10 Soit f la fonction définie sur

$$[0, 1] \text{ définie par } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ et que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$1 - \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 1.$$

3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-10} de $f(0.0000000002)$.

11 Montrer que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, pour tous réels x et y .

12 1. Montrer que

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y-x), \text{ pour tous } x \text{ et } y$$

de $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, $x < y$.

2. En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$.

13 Soit f la fonction définie sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan x} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montrer que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$-2 \leq f'(x) \leq -1.$$

3. En déduire que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1 - \tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x.$$

14 1. a. En utilisant l'inégalité des accroissements

finis, montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x \leq \tan x$.

b. En déduire que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. a. Montrer que $\frac{y-x}{\cos^2 x} \leq \tan y - \tan x \leq \frac{y-x}{\cos^2 y}$,

pour tous réels x et y de $[0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $x < y$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$x \leq \tan x \leq \frac{x}{\cos^2 x}.$$

c. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

3. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

15 On considère une fonction f dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$.

Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.
2. a. Montrer qu'il existe un réel c de $]0, 1[$ tel que $cf'(c) - f(c) = 0$.
- b. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal. Montrer que $\mathcal{C}$ possède au moins une tangente passant par l'origine du repère.

16 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 + ax + b$ dans un repère orthogonal. Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$, d'abscisses respectives x_A et x_B .

Montrer que $\mathcal{P}$ possède au point d'abscisse $\frac{x_A + x_B}{2}$ une tangente parallèle à la droite (AB) .

17 Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$.

1. Montrer que si la courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points distincts, alors elle admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. Montrer que si la courbe de f coupe l'axe des abscisses en n points distincts ($n \geq 2$), alors elle admet au moins $n - 1$ tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

18 Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)^3 (x^4 - 16)^2$.

Montrer que la dérivée f' de f admet au moins trois racines distinctes autres que les réels $-2, -1, 1$ et 2 .

19 Soit f une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annulant pour $n + 1$ valeurs distinctes de $[a, b]$ ($n \geq 1$).

Montrer que sa dérivée $n^{\text{ème}}$ s'annule au moins une fois dans $[a, b]$.

20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

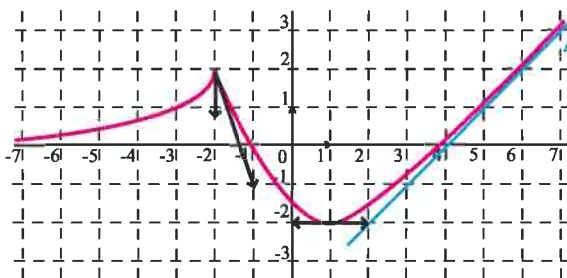
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que pour tout réel x non nul on a $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|$.
- b. En déduire que f est dérivable en 0 .
3. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
- b. Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $\left| f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right|$.

- c. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

21 On a représenté ci-dessous, une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite Δ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.



1. Dresser le tableau de variation de f .
2. Déterminer graphiquement, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 4)$.

22 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto 4x^3 + 6x - 2$.

23 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3 + 2x + 2}{2x}$

24 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2$.

25 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

26 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}$.

27 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{4 - x^2}$.

28 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que 2π est une période de f .
- b. Montrer que la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f .
2. a. Etudier les variations de f .
- b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0, \pi]$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
c. Tracer la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$.

30 I. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

II. Soit la fonction $h : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2}$ et on désigne par C_h sa courbe dans un repère orthonormé.
1. a. Déterminer l'ensemble de définition de h .

- b. Vérifier que 2π est une période de h .
- c. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour C_h .
2. a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x)$.
- b. En écrivant $h = f \circ \sin$, déduire le sens de variation de h sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- c. Résoudre l'équation $h'(x) = 0$.
- d. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de C_h .
3. Tracer C_h .

31 1. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x(x+1)}{x-2}$.
2. Déterminer graphiquement, suivant la valeur de m , le nombre de solutions de l'équation $x^2 + (1-m)x + 2m = 0$.
3. Déterminer graphiquement, suivant la valeur de m , le nombre de solutions de l'équation $\cos^2 x + (1-m)\cos x + 2m = 0$ dans $[0, 2\pi]$.

32 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)$.

33 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x}{2\cos x - 1}$.

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} |x^2 + x| & \text{si } x < 0, \\ x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -1 .
3. Etudier f et tracer C_f .

35 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1.$$

- Etudier les variations de g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
- En déduire le signe de g .

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x+x^3}{1-x^3}$ et C_f sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Etudier les variations de f .
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
- Préciser la position de C_f par rapport à T .
- Tracer C_f et T .

36 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$

$$\text{par } g(x) = 2x^3 + x - 2.$$

- Dresser le tableau de variation de g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
- Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- Déterminer le signe de g .

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{x^4 + (x-2)^2}.$$

- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
- Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe C_f de f dans un repère orthogonal.
- Déterminer graphiquement l'intersection de C_f et de la droite d'équation $y = x$.

37 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier

$$\text{naturel } n \text{ supérieur à } 1 \text{ par } u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}.$$

- Montrer que (u_n) est croissante.
- Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

a. Montrer que pour tout k de $[1, +\infty[$,

$$\frac{2}{(k+1)^3} \leq f(k) - f(k+1) \leq \frac{2}{k^3}.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur à 1,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq u_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

c. En déduire que (u_n) est majorée.

d. En déduire que (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

38 Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \tan x.$$

1. a. Etudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en précisant la demi-tangente au point d'abscisse 0.

b. Montrer que pour tout réel x de $[0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan(x) \geq x.$$

2. a. Montrer que l'équation $\tan x = 2x$ admet une unique solution α dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ et vérifier que

$$\alpha > \frac{\pi}{3}.$$

b. Déterminer le signe de $\tan x - 2x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{3}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \tan(u_n) - u_n$.

a. Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{3}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

39 Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'équation

$$(E_n) : x^2 + x^3 = n.$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation (E_n) a une solution unique que l'on notera a_n .

2. a. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b. Montrer que la suite (a_n) n'est pas majorée.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n) .

40 I. Soit la fonction $f : x \mapsto \sin x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Représenter la restriction de f à $[-\pi, 3\pi]$.
- b. Soit A et B deux points distincts de C_f .
Montrer que le coefficient directeur de la droite (AB) est compris entre -1 et 1 .

II. Soit la fonction $g : x \mapsto \sin(\sin x)$ et C_g sa courbe représentative.

1. a. Montrer que 2π est une période de g .
- b. Montrer que g est impaire.
- c. Etudier les variations de g sur $[0, \pi]$.
- d. Représenter la restriction de g à $[-\pi, 2\pi]$.

41 I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - x}.$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que C_f admet deux branches paraboliques dont on précisera les directions.
2. a. Montrer que f est dérivable en 0.
- b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement le résultat.
3. a. Etudier les variations de f .
- b. Tracer C_f .
4. Soit g la restriction de f à $[0, 1]$, déterminer les extrema locaux de g .

II. Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g_n(x) = x^n \sqrt{x(1-x)}$ et C_n sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la courbe C_n est au dessous de la courbe C_1 .
2. a. Etudier la dérivabilité de g_n à droite en 0 et à gauche en 1.
- b. Montrer que la fonction g_n est dérivable sur $]0, 1[$

et que $g'_n(x) = \frac{x^n \left(n + \frac{1}{2} - (n+1)x \right)}{\sqrt{x(1-x)}}, x \in]0, 1[$.

c. En déduire que pour tout entier non nul n , la fonction g_n admet un maximum local α_n que l'on précisera.

d. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = g_n(\alpha_n)$, $n \geq 1$.

- a. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
- b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq g_1(\alpha_n)$.
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

42 1. Montrer que l'équation

(E) : $x^3 - 10x^2 - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution a et vérifier que $a \in]10, 11[$.

2. Vérifier que (E) est équivalente à $x = 10 + \frac{1}{x^2}$.

3. Soit f la fonction définie sur $[10, +\infty[$ par

$$f(x) = 10 + \frac{1}{x^2}.$$

a. Déterminer $f([10, +\infty[)$.

b. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Montrer que $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{500} |u_n - a|$.

Déterminer les six premières décimales de a .