

Étude Générale des Fonctions

Exercice 1

I. 1. Soit h la fonction définie par

$$h(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2.$$

a. Montrer que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont les racines de $h(x)$.

b. Déterminer des nombres a, b, c tels que

$$h(x) = (x^2 - 2)(ax^2 + bx + c).$$

2. Soit f la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{1}{h(x)} + \frac{3x}{x^4 - 4}.$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de $f(x)$.

b. Mettre f sous la forme $\frac{N(x)}{D(x)}$, où $N(x)$ et $D(x)$ sont deux polynômes.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

II. a. Déterminer les réels a, b et c de façon que la parabole P d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1; 0)$, $B(-1; -1)$ et $C(-3; 2)$.

b. Soit H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Vérifier que H passe par B .

c. Déterminer les points d'intersections à H et à P .

Exercice 2

1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2} \sin x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x - \sin 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + x - 2}{x^4 + 3x^2 - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(3x - 2)}{3x - 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - x}{3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^2 - 3x - 10};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \tan x}{\sin x + \sin 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x} - 2}{x^2 - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1});$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{x - \sqrt{x^2 + x - 3}} \right).$$

2. Soit la fonction numérique f , définie sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, et telle que

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi(\cos^2 x - \cos x)}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \pi \end{cases}$$

Montrer que f est continue pour la valeur 0 de x .

3. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2}}{(x+1)(x^2 - x + 1)}, & \text{si } x \neq 1 \\ f(-1) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

- a. Cette fonction est-elle continue pour $x = -1$? pour $x = 0$?
 b. Est-elle dérivable pour $x = 0$? pour $x = -1$?
 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + kx + 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Déterminer k pour que f soit continue au point 2.

5. Pour chacun des cas suivants, calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe représentative de f .

$$f(x) = x^3 + 3x - \frac{1}{x+1}; \quad f(x) = \frac{2x+3}{1-x}; \quad f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-4}; \quad f(x) = \frac{-4x+3}{x^2-x-6}.$$

6. Démontrer que la courbe (C) , d'équation $y = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, admet deux droites asymptotes d'équations $y = -\frac{1}{2}$ et $y = 2x + \frac{1}{2}$.
 7. Trouver les équations des droites asymptotes à la courbe représentative (C) d'équation $y = \sqrt{1+x^2} - 1$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
 8. Démontrer que la droite d'équation $y = x$, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, est asymptote à la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 3

1. Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes

$$f_1(x) = (3x+1)^4; \quad f_2(x) = (x-3)(3-4x); \quad f_3(x) = \frac{2x+1}{3} + \frac{3}{2x+1};$$

$$f_4(x) = (3x+2)\sqrt{x}; \quad f_5(x) = \frac{2x^2-3x+5}{x^2-x-6}; \quad f_6(x) = \frac{x^2-4x-3}{x+2};$$

$$f_7(x) = \frac{\sin 2x}{1+\cos x}; \quad f_8(x) = \cos^3 x + \sin^2 x; \quad f_9(x) = \sin 3x - \cos 2x + 1; \quad f_{10}(x) = \sqrt{\sin 2x}.$$

2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}.$$

- a. Déterminer sa fonction dérivée première et vérifier la relation

$$2f'(x)\sqrt{1+x^2} = f(x).$$

- b. En déduire que la fonction dérivée seconde vérifie la relation

$$4(1+x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x-1| - \frac{2}{x+1}$.

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- Écrire $f(x)$ sans valeur absolue.
- Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- La fonction f est-elle continue au point 1?
- La fonction f est-elle dérivable au point 1? Que peut-on dire?

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par $x \rightarrow f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x - 1}$ où a et b sont des nombres réels.

Déterminer les réels a et b sachant que la courbe représentative de f passe par le point $A(2, 3)$ et qu'en ce point elle admet une tangente de coefficient directeur 3.

Exercice 6

a et b sont deux réels et f la fonction $f(x) = ax + b + \frac{1}{3 - x}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Sachant que $f(2) = 1$ et $f'(2) = 0$, montrer que $a = -1$ et $b = 2$.
- Démontrer que la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe représentative, (C) , de f .
- Étudier les variations de f .
- Montrer que le point d'intersection des asymptotes de (C) est centre de symétrie de (C) .

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.

- Calculer $f(-1)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$, $f(1)$.
- Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes, entre -1 et 1 .
- Posons $x = \cos \alpha$.
 - Exprimer $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos \alpha$.
 - Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sous forme trigonométrique.

Exercice 8

f est la fonction $x \rightarrow x^3 - 3x$.

- Étudier les variations de f .
- Dessiner dans un repère orthonormé (unité : 2 cm), la courbe C_f de f .
Préciser et tracer les tangentes à C_f aux points d'intersections de C_f avec l'axe des abscisses.
- Γ est la courbe représentative, dans le même repère que la question précédente, de la fonction g définie par :

$$g(x) = |x|(x^2 - 3).$$

Tracer la courbe Γ (une partie commune à C_f et à Γ pourrait être signalée par un trait renforcé).

Exercice 9

Soit (H_m) la courbe représentative de la fonction f , définie par :

$$x \mapsto \frac{(2m - 1)x + m}{x - m}.$$

- A chaque valeur du réel m , correspond une courbe (H_m) .
Montrer que toutes les courbes (H_m) passent par un même point A dont on déterminera les coordonnées.
- Quel est le coefficient directeur de la tangente en A aux diverses courbes (H_m) ?

Exercice 10

Déterminer les nombres réels a, b, c pour que la courbe représentative de la fonction f , définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + 2x + c}{2x^2 + bx - 1}$$

passse par l'origine des coordonnées et admette les droites $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = 0$ pour asymptotes.

Exercice 11

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = 2 \cos x - \cos 2x$.
Étudier les variations de la fonction f et représenter le graphe de f dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Soit F la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.
 - a. Déterminer l'image par F de $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, notée E .
 - b. Démontrer que, pour tout λ de E , l'équation $F(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.

1. Démontrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0; \pi]$.
2.
 - a. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
 - b. Représenter graphiquement la fonction F , restriction de f à $[-\pi; \pi]$. On note (C) la courbe ainsi obtenue.
3. Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points.
4. En utilisant la courbe (C) résoudre, dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$, l'équation d'inconnue x et de paramètre réel m : $\sin^2 x + \cos x - m = 0$.

Problème 1

On considère la fonction numérique f définie par

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 6}{x - 1},$$

on note (C) la courbe représentant f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - b. Calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble de définition.
 - c. Déterminer les réels a , b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}.$$

- d. Montrer que la droite $y = -x + 2$ est une asymptote à la courbe (C). Étudier la position de (C) par rapport à cette asymptote.
 - e. Existe-t-il d'asymptote à (C) parallèle à l'axe des ordonnées?
2.
 - a. Calculer f' et étudier son signe.
 - b. Dresser le tableau de variation de f .
 - c. Tracer la courbe (C) et ses asymptotes dans le même repère.
 - d. Donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Tracer cette tangente.

Problème 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
 - b. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
En déduire les asymptotes à la courbe (C_f) .
2. Étudier les variations de f .

3. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C_f) avec la droite d'équation $y = 1$.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x = 0$. Déterminer la position de (C_f) par rapport à la droite (T) .
5. Tracer la courbe (C_f) et la droite (T) .
6. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{|x^2 + x|}{(x + 2)^2}$$

et (C') sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- a. Écrire $g(x)$ sans valeur absolue.
 - b. Sans étudier $g(x)$, tracer sa courbe (C') .
7. Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a & \text{si } x < -1. \end{cases}$$
 - a. Pour quelle valeur de a h est-elle continue au point -1 ?
 - b. Pour cette valeur de a , étudier la dérivabilité de h au point -1 .

Problème 3

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1}.$$

On désignera par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé (unité : 2 cm).

- a. Déterminer D , ensemble de définition de f .
Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in D$ on ait :

$$f(x) = a + \frac{bx}{x^2 - 1}.$$

- b. Étudier le sens de variation de f .
- c. Soit I le point de (C) d'abscisse 0 ; montrer que I est centre de symétrie de (C) .
- d. Écrire une équation de la tangente T à (C) au point I . Tracer T .
- e. Étudier la position de (C) par rapport à T sur $] -1; 1[$.
- f. Calculer $f(\frac{1}{2})$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$. Tracer (C) .
- g. Soit g la fonction

$$g(x) = \frac{3x^2 + 4|x| - 3}{x^2 - 1}.$$

Étudier la parité de g et en déduire la courbe représentative de g sans nouveaux calculer

Problème 4

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x , définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + bx + c}{x^2 - 3x + 2},$$

où b et c sont deux paramètres réels.

1. Déterminer b et c pour que f admette un extremum égal à 0 pour la valeur 0 de x .
2. Pour les valeurs de b et c ainsi trouvées, étudier la variation de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal.
3. Préciser, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de points communs à (C) et à la droite (D) d'équation $y = m$.

4. Quand (D) coupe (C) en deux points M et M' , déterminer les coordonnées du milieu du segment $[M, M']$. Quel est l'ensemble des points I lorsque m varie sur $\mathbb{R}$? On représentera cet ensemble sur le même graphique que (C) .

Problème 5

On considère la fonction numérique de la variable réelle x , définie par

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{x^2 - x - 2}.$$

- Étudier la variation de f et construire, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) de f . On déterminera les points d'intersections, A et B , de la courbe (C) et des axes de coordonnées, ainsi que les tangentes à (C) en A et B .
Montrer que la courbe (C) a un point d'inflexion, que l'on déterminera, et que ce point d'inflexion est un centre de symétrie de la courbe (C) . (On pourra mettre f sous la forme $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$.)
- Discuter suivant (graphiquement) les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation

$$(E) : mx^2 + (2 - m)x - 2m - 1 = 0.$$

Problème 6

A. Étudier et représenter graphiquement la courbe (C) de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 - 2x - 3}{|x - 2| - 2}. \end{aligned}$$

(On étudiera en particulier la dérivabilité de f en 2.)

B. Soit (D_m) la droite d'équation : $y = m$ avec $m \in \mathbb{R}$.

- Discuter graphiquement suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, f(x) = m.$$

- Supposons : $\frac{3}{2} < m < f(4 + \sqrt{5})$. Trouver les coordonnées du point I , milieu du segment $[M', M'']$, M' et M'' étant les points d'intersection de (C) avec (D_m) .
- Trouver l'ensemble (Γ) décrit par le point I lorsque le nombre réel m décrit $\left] \frac{3}{2}, f(4 + \sqrt{5}) \right[$.
- Construire (Γ) dans le même repère que (C) .

Problème 7

- On considère la fonction polynôme P définie pour tout x réel par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
 - Étudier les variations de P .
 - Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution réelle et une seule, α , et que α appartient à $]1, 6; 1, 7[$.
- Soit D l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1 . On considère la fonction numérique f définie dans D par

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (on prendra comme unité 4 cm).

- Étudier les variations de f (on utilisera pour cela les résultats du 1.).
- Écrire une équation de la tangente (Δ) à (C) en 0. Étudier la position de (C) par rapport à (Δ) dans $] -1; 1[$.

- c. Montrer que (C) est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1. Tracer la courbe (C), la droite (Δ) et la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

Problème 8

Soit la fonction f , définie par :

$$x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3},$$

où x est la variable et m un paramètre ; à chaque valeur de m correspond une courbe représentative (C_m).

1. Montrer que les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer m pour que le point P d'intersection de (C_m) et de l'asymptote parallèle à ($x'x$) ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.
3. Construire la courbe (C_0).
4. Discuter le nombre des points d'intersection de (C_0) et de la droite (T) d'équation $y = tx$.
5. Calculer la fonction dérivée seconde de f_0 et rechercher les valeurs de x qui l'annulent. Montrer que les points correspondants de (C_0) sont alignés.
6. Dans le cas où (T) coupe (C_0) en deux points A et B distincts de O , déterminer l'ensemble des points I , I étant le milieu de $[A, B]$.

Problème 9

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

1. Déterminer le signe de f sur son ensemble de définition.
2. a. Étudier la dérivabilité de f sur $]0; +\infty[$.
b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
4. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal ($O; \vec{i}, \vec{j}$) (unité graphique : 2 cm).
5. a. Justifier l'existence d'un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = \frac{1}{2}$.
b. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

Problème 10

Le plan est rapporté au repère ($O; \vec{u}, \vec{v}$) orthonormal.

A. On considère la fonction :

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \pi x + \tan(\pi x).$$

1. Préciser l'ensemble de définition de g et étudier les variations de g . Construire la courbe représentative (C_g) de g dans le plan.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$. Donner des valeurs approchées de $g(\frac{7}{12})$ et $g(\frac{2}{3})$ et en déduire un encadrement de α . Donner alors le signe de $g(x)$.

B. On considère l'application :

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sin(\pi x).$$

1. Étudier f .

2. Soit (C_f) la courbe représentative de f . Montrer que (C_f) est tangente à la droite (Δ) d'équation $y = x$ au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$. Préciser la position de (C_f) par rapport à (Δ) . Construire (C_f) .

Problème 11

On considère la fonction numérique de la variable réelle x , définie par :

$$f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x},$$

et sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal.

1. a. Montrer qu'il existe trois constantes α, β, γ telles que pour tout x de l'ensemble de définition de f on ait :

$$f(x) = x - \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{x-1} - \frac{\gamma}{x+1}.$$

- b. Étudier les variations de la fonction f . Déterminer les asymptotes de la courbe (C) et son centre de symétrie. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.
Tracer la courbe (C)

2. On considère la fonction polynôme P_a définie par : $P_a(x) = x^4 - ax^3 - 6x^2 + ax + 1$. Vérifier en utilisant les résultats sur les variations de f , que l'équation $P_a(x) = 0$ admet, quel que soit le paramètre réel a , quatre racines réelles distinctes.

Problème 12

Soit le nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) et $M(x, y)$ son image dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 2 cm.

- I) A tout $z \neq -1$ on associe $Z = \frac{iz^2}{z+1}$.

1) Écrire Z sous la forme $X + iY$ ($X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}$).

2) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des points M tels que Z soit un imaginaire pur.

- II) Une équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points M tels que Z soit réel est : $y^2(1-x) = x^2(x+1)$, $(x, y) \neq (-1, 0)$.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = |x| \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}.$$

- 1) Étudier les variations de la fonction f , en particulier la continuité et la dérivabilité.
2) Tracer la courbe représentative C de f et étudier les tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et -1 . En déduire le tracé de l'ensemble (Γ) .
3) Étant donné une droite passant par le point $A(-1, 0)$ qui recoupe (C) en P et Q , et la droite $x = 0$ en M , préciser la position relative des points M, P et Q .

Problème 13

Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

et (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; I, J)$ tel que l'unité graphique sur (O, I) soit 4 cm et sur (O, J) , 2 cm.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. f est-elle dérivable :

- a. au point $-\frac{1}{2}$?
 b. au point $\frac{1}{2}$?
3. Calculer le nombre dérivé de f .
 a. En un point x tel que : $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$.
 b. En un point x tel que $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
4. a. Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0$ est l'intervalle $] -\infty, -\frac{1}{2}]$.
 b. Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{1 - 4x^2} - 4x > 0$ est l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}}[$.
 c. En déduire le signe de $f'(x)$:
 — pour $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$,
 — pour $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
5. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et donner le tableau des variations de f .
 b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$.
 En déduire de (C) admet deux asymptotes d'équations respectives : $y = -x$; $y = 3x$.
 c. Tracer la courbe (C).
6. Soit h la restriction de f à l'intervalle : $] -\infty, -\frac{1}{2}]$.
 a. Montrer que h est une bijection de $] -\infty, -\frac{1}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 b. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h . Calculer $h^{-1}(0)$ puis trouver une équation de la tangente T à la courbe (Γ) , représentant les variations de h^{-1} , au point de coordonnées $(0, h^{-1}(0))$.
 c. Construire T et (Γ) sur le même graphique que (C).
-