

EXERCICES FONCTIONS NUMERIQUES- TSE (L.Diéma 2019-2020)

Exercice1 : Calcule les limites suivantes

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2\sqrt{x-1}}{x-2} \right); \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-2x+\sqrt{x^2+7}}{1-x\sqrt{x}} \right); \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x}{-1+\cos 2x} \right); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos(3x-\pi)+\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} \right);$
 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\cos x - \cos a}{x-a} \right), a \in \mathbb{R}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-\sqrt{x+1}}{2x+\sqrt{x-2}} \right); \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3(2 - \sin x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{1-\cos \frac{1}{x}} \right); \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+\cos x}{2+\sin x} \right); \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{E(x)}{x} \right)$ où $E(x)$ est la partie entière de x

Exercice2 : Dans chacun des cas suivants, étudie la continuité et la dérivabilité de f sur l'intervalle K

- 1) $\forall x \in K = \left[\frac{5}{2}; +\infty \right[, \begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x-5}}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \text{ si } x = 2 \end{cases}$
- 2) $\forall x \in K = \left[0; \frac{\pi}{2} \right], \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2 \cos x} - 1}{2 \cos 2x + 1} \text{ si } x \neq \frac{\pi}{3} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \text{ si } x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$
- 3) $\forall x \in K = \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

Exercice3 : Détermine une primitive de f sur K dans les cas suivants :

- a) $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1), K = \mathbb{R};$ c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, K =]-1; 1[$
- b) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, K =]0; \pi[;$ d) $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}, K =]-2; 0[$

Exercice4 :

- 1) Détermine une primitive sur $]0; \frac{\pi}{4}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$
- 2) On considère de la fonction g , définie sur $]0; \frac{\pi}{4}[$ par $g(x) = \frac{\sin x}{\cos^3(x)}$. Montre que g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{4}[$ et que $g'(x) = \frac{3}{\cos^4(x)} - \frac{2}{\cos^2(x)}$
- 3) En déduit une primitive sur $]0; \frac{\pi}{4}[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)}$

Exercice5 : Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

- 1) Etudie les variations de f sur $[0; +\infty[$ et dresse son tableau de variation.
- 2) Soit F la primitive de f sur $[0; +\infty[$ telle que $F(0) = 0$; on ne cherche pas à exprimer $F(x)$
 - a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0; +\infty[$
 - b) Quelles sont les variations de F sur $[0; +\infty[$
- 3) On définit sur $[0; +\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$ et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$
 - a) Etudie, sur $[0; +\infty[$, les variations de H et K .
 - b) En déduit que, $\forall x \geq 0$, on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$
 - c) En déduit la limite de F en $+\infty$
- 4) a-) Démontre que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$
b-) Montre que l'on précise : $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$

Exercice 6 :

- 1) Linéarise $\sin^6(x)$ puis calcule $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5(t) \cos(t) dt \right) dx$
- 2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x-1}{(|x^2-2x|+2)^2}$ et m un nombre réel supérieur à 2.
Calcule $\int_1^2 f(x) dx$ puis $\int_1^m f(x) dx$. Quelle est la valeur moyenne de f sur $[1; m]$

Exercice7 : Soit f la fonction définie sur $[0; 2[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

- 1) Soit F_0 la fonction définie sur $[0; 2[$ par : $F_0(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calcule $F_0(x)$ et démontre que F_0 possède un prolongement par continuité au point 2.
- 2) Pour tout entier naturel n , on considère la fonction F_n définie sur $[0; 2[$ par :

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}} dt$$
 - a) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que :

$$F_{n+1}(x) = -x^{2n+2}\sqrt{4-x^2} + 2(n+1) \int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2} dt ; \text{ en déduire que :}$$

$$(2n+3)F_{n+1}(x) = 8(n+1)F_n(x) - x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}$$
 - b) En raisonnant par récurrence, démontre que, pour tout entier naturel n , F_n a une limite finie u_n lorsque x tend vers 2. Vérifie que $u_n = 2 \frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice8 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^3 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3x+2}{x+2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ x + \sqrt{2x-4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- 1) -a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$
 -b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
 -c) Etablir que :

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2x-2}{3-x} & \text{si } 1 < x < 2 \\ 1+x-\sqrt{2x-3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- 2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$
 - a) Montrer que pour tout réel x de $[\frac{5}{2}; 4]$ on a : $\frac{3}{2} \leq g'(x) \leq 2$
 - b) En déduire que pour tout réel x de $[\frac{5}{2}; 4]$ on a : $\frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \leq g(x) \leq 2x - \frac{3}{2}$

Exercice9 :

- 1) Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2(x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2(x) dx$. Calcule $I + J$ et $I - J$ puis en déduit I et J .
- 2) On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx$, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2 \sin x} dx$ et $I_1 + I = I_2$
 Calcule I_2, I_1 et en déduire I

Problème1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A : Soit la fonction h définie par $h(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

- 1) Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une et une seule solution $\alpha \in [0; 1]$. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .
- 3) En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : 1) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- 2) Montrer que les droites (d) et (d') d'équation $y = -x + 2$ et $y = x - 2$ sont asymptote à (C).
- 3) a) Montrer que pour tout réel on a : $f'(x) = \frac{h(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ et en déduire le signe de $f'(x) \forall x \in \mathbb{R}$.
 b) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Construire (C).

Problème2 : On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

- 1) a-) Détermine le domaine de définition E de f et calcule les limites de f aux bornes de E.
b-) Etudie le sens variation de f et dresse son tableau de variation.
- 2) Soit $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$
 - a) Démontre que $\forall x \in I; f(x) \in I$
 - b) Démontre qu'il existe $k \in I$ telque $\forall x \in I; |f'(x)| \leq k$
 - c) Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in I$
 - d) Démontre que $\forall x \in I; |f(x) - \alpha| \leq k|x - \alpha|$
- 3) Soit l'application g définie par $g: \begin{matrix} \mathbb{R}^+ \rightarrow]0;1] \\ x \mapsto g(x) = f(x) \end{matrix}$
 - a) Démontre que g est une bijection et que sa bijection réciproque g^{-1} est dérivable sur $]0; 1]$
 - b) Calcule $(g^{-1})'(\alpha)$ sans le symbole de la racine carrée.

Problème3 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4\cos^2 x}{1 - \cos x}$ et (C) sa courbe représentative.

- 1) Déterminer D_f ; justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0; \pi]$.
- 2) Vérifier que sur l'intervalle $[0; \pi]$ (C) présente une branche infinie dont on précisera la nature.
- 3) Démontrer que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{4\sin x \cos x (\cos x - 2)}{(1 - \cos x)^2}$
- 4) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
- 5) Tracer (C) sur $[-2\pi; 2\pi]$

Problème4 : Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$ et (C) sa courbe représentative.

- 1) Exprimer $f(x)$ sans le symbole « valeur absolue ».
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition ; (C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisse -1 et 3 ?
- 3) Etudier les variations de f ; on dressera son tableau de variation.
- 4) Démontrer que les droites d'équations $y = -x + 2$ et $y = x$ sont asymptotes à (C).
- 5) Tracer (C) et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera l'équation.
- 6) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-1; 3]$, le point $M\left(\frac{x}{f(x)}\right)$ est à une distance constante du point $A\left(\frac{1}{1}\right)$.

Problème5 : Soit g la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x^2 - 2x| + 1}{|x| + 1}$ et (C) sa courbe représentative.

- 1) Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- 2) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 2.
b) La courbe (C) admet-elle des tangentes en 0 et 2 ? Donner leurs équations.
- 3) Etudier les variations de f
- 4) Démontrer que (C) admet deux branches infinies que l'on précisera.
- 5) Tracer (C).