

Exercice 1 :

- I. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{1-3x} & \text{si } x \in [0; 1[\\ f(x) = \sin \frac{\pi x}{6} & \text{si } x \in [1; 2[\end{cases}$ f est-elle continue en $x_0 = 1$?
- II. Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$
 - 1) Déterminer son ensemble de définition D_f de f puis calculer la limite de f en 1
 - 2) En déduire une fonction g , prolongeant par continuité de f en 1
- III. Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ h(1) = a \end{cases}$
Déterminer son ensemble de définition puis a pour que h soit continue sur $\mathbb{R}$
- IV. Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$
 - 1) Déterminer son ensemble de définition D_f de f puis calculer la limite de f en 0
 - 2) Montrer que fonction f est prolongeable par continuité en 0
 - 3) Soit h la fonction qui prolonge f . Exprimer $h(x)$ en fonction de x
 - 4) h est-elle dérivable en 0 ? Si oui préciser $h'(0)$
- V. Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 indiqué
 - 1) $f(x) = \frac{x^2+1x+1}{x^2+2x+1}$ et $x_0 = 0$
 - 2) $f(x) = \sqrt{x^3+8x^2}$ et $x_0 = 0$
 - 3) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x - 3x}{x^2 - x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$ et $x_0 = 0$
 - 4) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-3x}{4x-2} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{13x-\sqrt{100x+300}}{7} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ et $x_0 = 1$

Exercice 2:

- I. Etudier et représenter les fonctions suivantes :
 - 1) $f(x) = |x| - \frac{x}{|x-1|}$
 - 2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$
 - 3) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-2}}$
 - 4) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$
- II. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (\cos 2x + 2) \sin x$
 - 1) Déterminer la parité de f et montrer que f est périodique de période 2π . En déduire un intervalle d'étude approprié
 - 2) Vérifier que : $f'(x) = (3 - 6 \sin^2 x) \cos x$. En déduire les variations de f sur l'intervalle d'étude considéré.
 - 3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f représentative de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$
 - 4) Tracer la courbe C_f représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$
- III. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé
 - 1) Justifier que l'ensemble d'étude de f peut-être réduit à l'intervalle $[0; \pi]$
 - 2) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \sin x \sin 2x$
 - 3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$
 - 4) Tracer (C) ; préciser les coordonnées de ses centres de symétries et des points où la tangente est parallèle à (OI)

Exercice 3:

- I. f est la fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + 1$. Etudier le sens de variation de f . Construire la courbe (C_f) de f (on précisera la position de (C_f) par rapport à sa tangente à droite et sa tangente à gauche au point d'abscisse 3)
- II. g est la fonction définie sur $[0; 1[\cup]1; 2]$ par : $g(x) = \frac{x + \sqrt{2x - x^2}}{x-1}$. Etudier les variations de la fonction g et montrer que g est dérivable sur $[0; 1[$ et sur $]1; 2]$. Déterminer $g'(x)$. Calculer la limite de $\frac{g(h) - g(2)}{h}$ en 0. Que peut-on en déduire ? Calculer la limite de g à droite de 1. Que peut-on en déduire ? Construire (C_g) . Vérifier que le point $A(1; 1)$ est un centre de symétrie pour (C_g) .

Exercice 4:

- I. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x + 1$
- 1) Etudier les variations de f
 - 2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
 - 3) Calculer $f(-4); f(-3); f(0); f(2)$ puis donner un encadrement par deux entiers consécutifs de chacune des solutions
- II. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$
- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes. Préciser les équations des asymptotes à la courbe de f
 - 2) Calculer la fonction dérivée de f et dresser le tableau de variations de f
 - 3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 1
 - 4) Tracer la courbe de f et la tangente (T)
 - 5) Montrer que la courbe de f admet un axe de symétrie
 - 6) Soit g la restriction de f à $]-1; +\infty[$, montrer que g est une bijection de $]-1; +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer. Construire la courbe de g^{-1}
 - 7) Calculer $(g^{-1})'(\frac{3}{4})$ et donner une équation de la tangente (T') à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse $\frac{3}{4}$

Exercice 5:

- A. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ et on désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm
- 1) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $x, f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2+1}$. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
 - 2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variation de f
 - 3) Montrer que la droite (Δ) d'équation : $y = x - 3$ est asymptote à (C) . Etudier les positions relatives de (C) par rapport à (Δ)
 - 4) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse nulle
 - 5) Tracer (T) , (Δ) et (C)
 - 6) Montrer que la courbe (C) a un centre de symétrie
 - 7) Montrer que l'équation : $f(x) = 1$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$ notée α . Donner un encadrement de α à 10^{-1} près
- B. Soit g la fonction définie par : $g(x) = x + \sin x$
- 1) Montrer que la courbe (C') de g admet un centre de symétrie. (On étudiera la parité de g)
 - 2) Etudier les variations de g dans $\mathbb{R}$. (On étudiera les points d'inflexion, les positions de la courbe par rapport à la direction asymptotique)
 - 3) Tracer la courbe de g sur $[-\pi; \pi]$

Exercice 6:

Partie A :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

- 1) Etudier les variations de f , puis tracer (C)
- 2) Montrer que f ne réalise pas une bijection de D_f sur $\mathbb{R}$
- 3) On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[0; 1]$
 - a) Montrer que g réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera

- b) Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1} dans le même repère que (C)
- c) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C') au point d'abscisse $x_0 = \frac{3}{4}$
- d) Expliciter g^{-1} et retrouver le résultat précédent

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

- 1) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on déduire pour C_f ?
- 2) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
- 3) Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer la dérivée f' de f . En déduire de le signe de f' sur $]0; +\infty[$
- 4) En déduire le tableau de variation de la fonction f

Exercice 7:

Partie A :

Soit $P(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 12x - 9$

- 1) Calculer $P(1)$ et $P(3)$
- 2) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(3-x)(x^2+3)$
- 3) Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3+3x^2-3x-3}{(x-1)^2}$ et on désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm

- 1) Déterminer D_f et montrer que : $\forall x \in D_f, f(x) = -x + 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f
- 3) Montrer que la droite d'équation : $y = -x + 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$. Trouver l'équation de l'autre asymptote à (C) et justifier
- 4) Démontrer que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^4}$. En déduire le signe de $f'(x)$
- 5) Etablir le tableau de variation de f
- 6) Soit g la restriction de f à $]-\infty, 1[$
 - a) Justifier que g est une bijection de $]-\infty, 1[$ sur K que l'on précisera
 - b) En déduire que l'équation $(E): x \in]-\infty, 1[, f(x) = 0$ admet une solution unique x_0
 - c) Justifier que $x_0 \in [-1; 0]$
 - d) Etudier la dérivabilité de g^{-1} en -3 et calculer si possible $(g^{-1})'(-3)$
- 7) Construire (C) puis la courbe (C^{-1}) de g^{-1} dans le même repère

Exercice 8:

I. Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ et (C) sa courbe représentative.

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition. En déduire que (C) admet une demi-tangente parallèle à l'axe des abscisses au point 0
- 2) Etudier les variations de f . Démontrer que (C) admet trois asymptotes. Tracer (C)

II. Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2 \cos \frac{3x}{2} - 3 \cos x$

- 1) Justifier que l'ensemble d'étude de g peut-être réduit à l'intervalle $[0; 2\pi]$
- 2) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2 \sin x \sin 2x$
- 3) Dresser le tableau de variation de g sur $[0; 2\pi]$
- 4) Tracer la courbe représentative de g

III. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2 - x}$$

Etudier la fonction f . On désigne par (C_f) sa courbe représentative. On donnera les équations des asymptotes oblique et verticale à (C_f) . Montrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie pour (C_f) . En utilisant (C_f) , construire la représentation graphique de $|f|$. Résoudre graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel m les équations : $(E): f(x) = m$ et $(F): |f(x)| = m$

Exercice 9:

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{2x + d}{x + d}$. On suppose que la courbe (C) de f admet les droites

- 1) Trouver les constantes réelles b et d sachant que la courbe (C) admet les droites d'équations : $x = 3$ et $y = 2x$ comme asymptotes
Dans la suite du problème on prendra $b = -6$ et $d = -3$
- 2) Etudier les variations de f
- 3) Calculer $f(7)$ puis montrer que le point $I(3; 6)$ est centre de symétrie de la courbe (C) de f
- 4) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[5; +\infty[$ est une bijection de $[5; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Calculer $(g^{-1})'(16)$
- 5) Montrer que l'équation : $f(x) = -3$ a une solution unique $\alpha \in [1; 2]$. Donner un encadrement d'amplitude $5 \cdot 10^{-1}$. (On ne cherchera pas à résoudre l'équation).
- 6) Montrer que $\forall x \in D_f ; f'(x) = 2 - \frac{8}{(x-3)^2}$. En déduire que $\forall x \in [5; 7] ; 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{2}$. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall x \in [5; 7] ;$

$$\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \leq f(x) \leq 16$$
- 7) Tracer les courbes (C) de f , (C') de g^{-1} dans le même repère

Exercice 10:

- I. Soit f la fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos(2\pi \tan x)$.
 - 1) Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f'(x)$
 - 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2\pi \tan x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$
- II. Soit g la fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = a \sin 2x + b \cos 2x + c$. Déterminer a, b et c tels que : g admette un extremum égal à -1 pour $x = \frac{\pi}{3}$ et vérifie $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ et montrer que :

$$g(x) = 2 \left[\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \right]$$
- III. Soit la fonction $h_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $h_a(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 + ax + 1}$
 - 1) Pour quelles valeurs de a , la fonction h_a est-elle définie sur $\mathbb{R}$? On suppose qu'il en est ainsi ; étudier les variations de h_a
 - 2) Construire (C_0) représentant $h_a(a = 0)$. Montrer que (C_0) a un centre de symétrie
 - 3) Etudier les variations de la fonction $t_a(x) = \sqrt{h_a(x)}$
 - 4) Construire (C'_0) représentant $t_a(a = 0)$
 - 5) t_a est-elle dérivable au point d'abscisse -1 ?

Exercice 11:

Soit f la fonction de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 8}}$

- 1) Etudier le sens de variation de f . Etudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. Dresser le tableau de variation de f .
- 2) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$: 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées
 - a) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse nulle
 - b) Tracer (T) et (C)
- 3) En utilisant les variations de f , démontrer que $\forall x \in [1; 2], 1 \leq f(x) \leq 2$
- 4) Démontrer que pour tout x de $[1; 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall x \in [1; 2],$ on a : $|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}|x - 1|$. En déduire un encadrement de f sur $[1; 2]$ par deux fonctions affines que l'on précisera sur la figure

Exercice 12:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{1 + \frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unités graphiques : 1 cm

- 1) Déterminer le domaine de définition de f . Ecrire $f(x)$, sans le symbole valeur absolue suivant les valeurs de x . Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Calculer la dérivée f' de f suivant les valeurs de x . Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. Déterminer les équations des asymptotes à (C) .

Construire la courbe (C) de f et toutes ses asymptotes dans le repère.

Exercice 13:

- I. $E(x)$ désigne la partie entière du réel x et on rappelle que $E(x)$ est l'entier relatif vérifiant : $E(x) \leq x < E(x) + 1$. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-E(x)} \text{ et } g(x) = \sqrt{x-E(x)}$$
 - 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - 2) Montrer que pour tout x réel, on a : $x-1 < E(x) \leq x$
 - 3) Déterminer le domaine de définition de g puis vérifier que g est périodique 1
- II. Soit $f:]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ et $x \mapsto f(x) = \tan x - x$. Montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; puis $(f^{-1})'\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$
- III. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$ et par (C_f) sa courbe représentative
 - 1) Suivant les variations de x , exprimer $f(x)$ sans le symbole valeur absolue
 - 2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -1 . Quelles sont les conséquences graphiques de cette étude ?
 - 3) Etudier la fonction f (limites et variations)
- IV. Soit g la fonction définie par :
$$\begin{cases} g(x) = ax + b + x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = x(|x|+1) + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
 où a et b sont des réels.
 - 1) Préciser l'ensemble de définition de g . Calculer $g(0)$
 - 2) Déterminer a et b pour que g soit continue et dérivable en 0.
 - 3) On donne $a = 1$ et $b = 1$
 - a) Etudier les branches infinies de la courbe C_g de g . Etudier le sens de variation de g .
 - b) Etudier que g admet une bijection réciproque g^{-1} . Calculer $(g^{-1})(1)$
 - c) Représenter les fonctions g et g^{-1} dans le même repère orthonormé

Exercice 14:

- A. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = x^3 - 3x - 4$
 - 1) Calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de φ
 - 2) Démontrer que l'équation : $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près
 - 3) En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$.
- B. On donne la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$, sa courbe est notée (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2cm)
 - 1) Déterminer le domaine de définition de f et puis calculer les limites aux bornes de ce domaine de définition
 - 2) Vérifier que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(x^2-1)^2}$ où φ est la fonction définie dans la partie A.
En déduire le tableau des variation de la fonction f
 - 3) Montrer que pour tout x de D_f , $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$. En déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D) . Etudier la position de la courbe (C_f) par rapport à (D)
 - 4) Tracer la courbe (C_f) et (D)
 - 5) Déterminer l'abscisse des points de la courbe (C_f) où la tangente est parallèle à la droite d'équation : $y = x + 2$. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter
 - 6) En déduire graphiquement, suivant les valeurs de m ; le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = x + m$

Exercice 15:

- I. On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -x + \sqrt{x^2 + x - 2}$$
 Et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Déterminer le domaine définition D_f de f . Etudier la dérivabilité de f aux points x_1 et $x_1 = 1$. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
- 2) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe $(O, \vec{i})$
- 3) Calculer les limites aux bornes de D_f et préciser les asymptotes à (C)
- 4) Tracer (C) et ses asymptotes
- 5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -2[$
 - a) Montrer que h est une bijection de $]-\infty; -2[$ vers un intervalle J à préciser.
 - b) Soit h^{-1} la réciproque de h . Calculer $h^{-1}(5)$ et $(h^{-1})'(5)$
 - c) Pour tout x de J , exprimer $h^{-1}(x)$
 - d) Construire sur le même graphique que (C) la courbe (Γ) de h^{-1}

- II. Soit la fonction $g: x \mapsto x^3 - 3x - 18$
- 1) Dresser le tableau de variation de g . Préciser les extremums éventuels
 - 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique
 - 3) Calculer $g(3)$. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

III. Soit $\varphi: x \mapsto \sqrt{1+x^2}$

- 1) Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$
- 2) Montrer que $\forall x \in [1; 2]; \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \varphi'(x) \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$
- 3) En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [1; 2]; \frac{x+1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1+x^2} \leq \frac{2x-2+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$$

Exercice 16: .

- 1) Démontrer que l'équation $x^3 + 3x^2 + 10x + 5 = 0$ admet une unique solution réelle x_0 . Vérifier que $]-0,58; -0,57[$ est un encadrement de x_0

- 2) On considère la fonction numérique f à une variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x+1)^2}$$

- a) Quel est l'ensemble de définition ?
- b) Etudier les variations de f , puis son tableau de variation
- c) Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout réel x élément de son ensemble de définition, $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$. En déduire que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) dont on précisera une équation
- 3) Etudier la position relative de (C) et (Δ)
- 4) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes dans le plan muni d'un repère orthonormé et donner une équation de la tangente à (C) en son point d'abscisse $x_1 = -2$
- 5) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J à préciser
- 6) Tracer la courbe de la bijection réciproque g^{-1} dans le même repère que (C)
- 7) Calculer $g(3)$ et en déduire le coefficient directeur de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse $\frac{89}{16}$

Exercice 17:

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$

- 1) Donner l'ensemble de définition de f . Montrer que, pour tout x de l'ensemble de définition, on a $f(x)$ est strictement positive.
- 2) Etudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour (C_f) , courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation. Donner les équations des autres asymptotes
- 4) Calculer $f'(x)$. Etudier le signe de $f'(x)$ pour $x > 1$. Construire la courbe (C_f) . On donne $\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22$

- 5) La fonction numérique g est définie par $g(x) = x\sqrt{x^2-1}$

- Donner l'ensemble de définition. Etudier la parité de g
 - La droite (D) a pour équation : $y = x$. Donner les coordonnées des points d'intersection de la droite (D) et de la courbe représentative de g . Calculer $g'(x)$. Que constate-t-on ?
 - Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de g
 - Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$, $h(x) = g(x)$. Montrer que h est une bijection. On note h^{-1} la bijection réciproque de h . Tracer sur un même figure les courbes de h et de h^{-1}
- 6) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction G définie par :
- $$G(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 - 1}$$
- soit une primitive de
- g

Exercice 18:

Soit f une fonction numérique satisfaisant aux conditions suivantes :

- Son ensemble de définition est $D_f =]-\infty, 4[\cup]4; +\infty[$;
- $f'(x)$ est positive sur $]-\infty, -1[\cup]4; +\infty[$ et $f'(x)$ est négative sur $]-1, 4[$ où f' désigne la fonction dérivée de f ;
- $f(0) = \frac{11}{4}$; $f(-1) = f\left(\frac{5}{2}\right) = f(6) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 5] = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 0$

En utilisant les renseignements ci-dessus :

- Dresser le tableau de variation de f
- Préciser les équations des asymptotes à la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- La fonction f est-elle dérivable au point d'abscisse $x_0 = -1$? Justifier votre réponse.
- Construire la courbe (C) et ses asymptotes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les tangentes ou demi-tangentes à (C) que les renseignements vous donnent.
- Tracer dans le même repère la courbe (C') de $|f|$

Exercice 19:

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x - 1}$ et (Cf) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit u la fonction définie par $u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$.
 - Dresse le tableau de variation de u .
 - Montre que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $-\frac{3}{4} \leq \alpha \leq -\frac{2}{3}$.
 - Donne un encadrement de α au centième près. Déduis-en le signe de u suivant les valeurs de x .
- Etude de la fonction principale
 - Détermine l'ensemble de définition Df et calcule les limites de f aux bornes de Df .
 - Montre que pour tout $x \in Df$, $f'(x) = \frac{u(x)}{(x-1)^2}$ et dresse le tableau de variation de f .
 - Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{2} \left(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha-1} \right)$.
 - En utilisant la partie A°) 4°) encadre $f(\alpha)$ puis en déduis son signe.
 - Justifie que (Cf) coupe l'axe des abscisses en un seul point x_0 .
 - En déduis le signe de f et la position relative de (Cf) par rapport à l'axe des abscisses.
- Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.
 - Justifie que h est bijective.
 - Calcule $h(2)$, $h^{-1}(5)$ et $(h^{-1})'(5)$.
 - En déduis l'équation de la tangente à (Ch^{-1}) au point d'abscisse 5.

La meilleure manière de vaincre les mathématiques c'est de les aimer et de les appliquer toutes les minutes