

ACADEMIE D'ENSEIGNEMENT

ANNEE SCOLAIRE : 2024-2025

KALABANCORO

CLASSE: TSE

Lycée Public de NIAMANA

Etude des fonctions :**Problème 1:** Soit la fonction t définie par : $t(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x+1}$ où α, β sont des réels.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_t$ de t .
2. Déterminer les réels α et β sachant que la courbe de t passe par le point $A(0; 4)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -3 .
3. Déterminez les limites de t aux bornes de $\mathcal{D}_t$.
4. Déterminer les réels a, b et c tels que : $t(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
5. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_t)$ admet une droite asymptote oblique (d) que l'on précisera.
6. Étudier la position de $(\mathcal{C}_t)$ par rapport à (d) .
7. Étudier le signe de $t'(x)$ puis dresser le tableau de variation de t .
8. Étudier le signe $t(x)$ suivant les valeurs de x .
9. Déterminer une équation de la tangente (T_0) à $(\mathcal{C}_t)$ au point d'abscisse $x = 0$.
10. Montrer que le point $I(-1; -1)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_t)$.
11. Calculer $t(3)$; $t(-3)$ et $(t^{-1})'(4)$.
12. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_t)$, la droite (d) dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
13. Calculer l'aire A du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_t)$, la droite (d) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

Problème 2:A-) Soit la famille de fonctions f_m (où m est un paramètre réel) définie par :

$$f_m(x) = \frac{mx^2 - 2x + 1}{x^2 - 2mx + 1}$$

1. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ de f_m passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.
2. Trouver m pour que $\forall x \in \mathbb{R} - \{0; -2; 2\}$, l'entier naturel $[f_m(x)]^2$ soit au plus égal à 1.

3. Représenter graphiquement la fonction f_0 pour $m = 0$.

B-) Soit la famille de fonctions g_m définie par :

$$g_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}$$

où m est un paramètre réel. (C_m) la courbe de g_m .

1. Montrer que toutes les courbes C_m passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées indépendamment de m .
2. Déterminer m pour que le point d'intersection P de (C_m) et de l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.
3. Construire la courbe (C_0) .

Problème 3:

On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{|x|+1}{|x|-1}$. (C_h) la courbe représentative de h .

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?
2. Montrer que la fonction h est paire en déduire une interprétation graphique.
3. Écrire $h(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
4. Étudier les limites de h aux bornes de son domaine de définition.
5. Étudier la continuité et la dérivabilité de h en 0. En déduire que (C_h) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0 dont on déterminera les équations réduites.
6. Étudier le sens de variation de la fonction h .
7. Dresser le tableau de variation de h . Tracer (C_h) .

Problème 4:

Soit la fonction f_m définie par $f_m(x) = \frac{x^2-m}{x+m}$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f_m ;
 b) Étudier les limites de f_m aux bornes de son domaine de définition. Interpréter graphiquement les résultats.
 c) Déterminer les réels a , b et c tels que : $\forall x \in \mathcal{D}f_m; \quad f_m(x) = ax + b + \frac{c}{x+m}$.
 d) Déterminer une primitive de f_m .

- e) Montrer que la droite (D): $y = x - m$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}f_m$.
2. Soit $A_m(-m; -2m)$. Montrer que : $A_m(-m; -2m)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}f_m$.
3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $x^2 + 2mx + m = 0$.
- b) Montrer que $\forall x \neq -m$, $f'_m(x) = \frac{x^2 + 2mx + m}{(x+m)^2}$. En déduire le sens de variation de f_m .
- c) Dresser le tableau de variation de f_m .
- d) Montrer que f_m est une bijection de $[m; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- e) Construire les courbes $\mathcal{C}f_{-2}$, (D₋₂); $\mathcal{C}f_2$ et (D₂).

Problème 5:

1. On considère la fonction g définie par : $g(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.
- a) Quel est le domaine de définition de g ? Puis écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- b) Étudier la continuité et la dérivabilité de g en -1 et en 1 . Interpréter ces résultats.
- c) Déterminer les limites de g sur $\mathcal{D}_g$. Dresser le tableau de variation de g .
- d) Montrer que la droite (D): $y = 2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.
- e) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0. Construire $\mathcal{C}_g$, (T) et (D).
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[-1; 0]$. Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près. En déduire le signe de g .
3. Démontrer que la restriction f de g à l'intervalle $[1; +\infty[$ admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. Expliciter f^{-1} . Construire $\mathcal{C}_f^{-1}$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction h définie par $h(x) = |g(x)|$. Construire $\mathcal{C}_h$.

Problème 6:

PARTIE A : Soit la fonction $f : x \rightarrow \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$.

Déterminer les réels a , b , c , d sachant que la représentation graphique ($\mathcal{C}_f$) de f dans un repère orthonormé :

- admet la droite d'équation : $x = 2$ pour asymptote ;

- n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ;
- passe par $A(1; -2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5 .

PARTIE B : Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{x+4}{x+1}$

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. Montrer que g est une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Calculer $(g^{-1})'(5)$.
4. Montrer que pour tout réel x de $[1; 3]$, on a : $-\frac{3}{4} \leq g'(x) \leq -\frac{3}{16}$.
En déduire que pour tout α de $]1; 3[$, on a : $\frac{13-3\alpha}{4} \leq g(\alpha) \leq \frac{43-3\alpha}{16}$.

Problème 7:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x$.

1. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à $[0; \frac{\pi}{2}]$.
2. a) Montrer que $f'(x) = \cos x \cos(2x)$.
b) Donner pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ les signes de $\cos x$ et de $\cos(2x)$. Déduisez en le signe de $f'(x)$ suivants les valeurs de x et dresser le tableau de variation de f .
3. Tracer la courbe représentative de f lorsque $x \in [-\pi; \pi]$.

Problème 8:

I-) Soit la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire que pour tout x de $[0; 1]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
2. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$ on a : $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - 1|$

II-) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+2x-4}{2x-4}$.

1. Démontrer que pour tout x de $[4; 6]$ on : $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{8}$
2. Montrer que pour tout x de $[4; 6]$ on a : $|f(x) - \frac{11}{2}| \leq \frac{3}{8}|x - 6|$

Exercices Intégrale:

EXERCICE 1:

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_2^6 \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx ; \quad B = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx ; \quad C = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$$

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\cos x + 1)^2 dx ; \quad E = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^5 x dx ; \quad F = \int_{-5}^7 (|x+3| + 2|x^2-3x+2|) dx$$

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^5 x dx ; \quad H = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos 5x \cdot \sin 3x dx ; \quad I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$$

2. En utilisant d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$K = \int_0^1 (x+1)(3x+1)^{\frac{1}{2}} dx ; \quad L = \int_0^{\pi} (3t^2 - t + 1) \sin t dt ; \quad M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \sin^2(3x) dx$$

3. Dans chacun des cas suivants, calcule I+J et I-J; puis en déduis I et J.

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \sin^2 x dx$

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx$

4. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3+5x^2-4x-7}{(x+2)^2}$.

a) Trouve les réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathcal{D}_f ; f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$

b) Trouve la primitive F de f prenant la valeur $-\frac{5}{2}$ en 0.

c) En déduis $I = \int_2^3 f(x) dx$

EXERCICE 2:

A Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1}(x)} dx$.

1. Déterminer les réels a et b tels : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$.

En déduire le calcul de I_0

2. A l'aide d'une intégration par partie démontrer que : $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

B Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2cm. Soit (C_f) la courbe de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x|x|$.

1. Étudie les variations de f et construis (C_f)

2. Calcule en cm^2 l'aire A de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=0$ et $x=-2$.

EXERCICE 3:

Pour tout entier naturel $n > 0$; on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx$.

1. a) Calculer I_0
 b) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
2. Comparer x^{n+1} et x^n lorsque $0 \leq x \leq 1$. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
3. a) En procédant par encadrement, établir que $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.
 b) Etudier la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.
4. a) Sachant que $\forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq 2 - \sqrt{3+x} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x)$.
 Montrer que $\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.
 b) Déterminer la limite de la suite (nI_n)