2e cas : si $1-e^{\frac{-x}{2}}>1$

$\Rightarrow \ln\left(1-e^{\frac{-x}{2}}\right)>0$ donc (Γ) est au dessus de (Δ)

7) a) Démontrons que

$g(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{-x}{2}}\right) \forall x\in]-\infty;0[$

$g(x)-\frac{x}{2}=\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|-\frac{x}{2}$

or $\forall x\in]-\infty;0[,\ f(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}>0$

alors $\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}$ et $\frac{x}{2}=\ln e^{\frac{x}{2}}$

$g(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right)-\ln e^{\frac{x}{2}}$

$=\ln\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{x}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)=\ln\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}-\frac{e^{x}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)$

$=\ln\left(1-e^{x-\frac{x}{2}}\right)=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$

d'où $g(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$

Déduisons que la droite (Δ') d'équation

$y=\frac{x}{2}$ est asymptote à (Γ) :

$y=\frac{x}{2}$ est asymptote à $(\Gamma) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-\frac{x}{2}\right]=0$

ie $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)=0$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x}{2}}=0$

b) Etudions la position de (Γ) par rapport à (Δ') sur $]-\infty;0[$

$\forall x\in]-\infty;0[,\ x<0;\ \frac{x}{2}<0 \Rightarrow e^{\frac{x}{2}}<1$

$\Rightarrow -e^{\frac{x}{2}}>-1 \Rightarrow 1-e^{\frac{x}{2}}>0$

1er cas : si $0<1-e^{\frac{x}{2}}<1$ on a

$\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)<0$ donc $g(x)-y<0$ ie $g(x)<y$ alors la courbe (Γ) est au dessous de (Δ')

2e cas : si $1-e^{\frac{x}{2}}>1$ on a

$\ln(1-e^{\frac{x}{2}})>0$ donc $g(x)-y>0$

$\Rightarrow g(x)>y$ alors la courbe (Γ) est au dessus de (Δ')

SUJET 15

Exercice 1

$a\neq\pi$ et $a\in[0;2\pi]$

1) a) Vérifier que: $1+e^{ia}=e^{i\frac{a}{2}}\left(e^{-i\frac{a}{2}}+e^{i\frac{a}{2}}\right)$

$e^{i\frac{a}{2}}\left(e^{-i\frac{a}{2}}+e^{i\frac{a}{2}}\right)=e^{0}+e^{ia}=1+e^{ia}$

b) Déduction du module et un argument de $1+e^{ia}$:

$1+e^{ia}=e^{i\frac{a}{2}}\left(e^{-i\frac{a}{2}}+e^{i\frac{a}{2}}\right)$

$=2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2}+i\sin\frac{a}{2}\right)$

$\frac{a}{2}\neq\frac{\pi}{2}$ et $\frac{a}{2}\in[0;\pi]$

* Si $a\in[0;\pi],\ \frac{a}{2}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors

$\left|1+e^{ia}\right|=2\cos\frac{a}{2}$

$\arg\left(1+e^{ia}\right)=\frac{a}{2}+2k\pi \quad (k\in Z)$

* Si $a\in]\pi;2\pi]$ alors $\frac{a}{2}\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ alors

$\left|1+e^{ia}\right|=-2\cos\frac{a}{2}$

$\arg\left(1+e^{ia}\right)=\frac{a}{2}+\pi+2k\pi \quad (k\in Z)$

2) a) $a=\frac{\pi}{2}$

$z'=\left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)z-e^{i\frac{\pi}{2}}=(1+i)z-i$

$|1+i|=\sqrt{2}$ donc $f_{\frac{\pi}{2}}$ est une similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in Z)$ et de centre $\Omega(w)$ avec $w=\frac{-i}{1-(1+i)}=1$.

Au total, f est une similitude de centre $\Omega(1)$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

b) f_a est une translation

$\Leftrightarrow 1+e^{ia}=1$

$\Leftrightarrow e^{ia}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos a=0\\ \sin a=0\end{cases}$

ce qui est absurde donc il n'y a pas de valeur de a pour laquelle f_a est une translation.

c) Les valeurs de a :

f_a est une rotation

$\Leftrightarrow \left|1+e^{ia}\right|=1 \Leftrightarrow 2\left|\cos\frac{a}{2}\right|=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2} \quad ou\\ \cos\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$\frac{a}{2}\in[0;\pi]$ et $\frac{a}{2}\neq\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{a}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \quad ou\\ \cos\frac{a}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{2}=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow a=\frac{2\pi}{3} \quad ou\\ \frac{a}{2}=\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow a=\frac{4\pi}{3}\end{cases}$

$a=\frac{2\pi}{3}$, f_a est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre $\Omega(1)$.

$a=\frac{4\pi}{3}$, f_a est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{5\pi}{3}$. D'après b) du 1) et de centre $\Omega(1)$.

Exercice 2

1) Détermination de a, b, c pour que P soit solution de (E).

$P(x)=ax^2+bx+c$

$P'(x)=2ax+b$

$P''(x)=2a$

P est solution de (E)

$\Leftrightarrow \forall x\in IR,$

$2a-3(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=2x^2-5x+3$

$\Leftrightarrow \forall x\in IR,$

$2a-6ax-3b+2ax^2+2bx+2c-2x^2+5x-3=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in IR,$

$(2a-2)x^2+(2b-6a+5)x+(2c-3b-3+2a)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-2=0\\ 2b-6a+5=0\\ 2c-3b+2a-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=\frac{1}{2}\\ c=\frac{5}{4}\end{cases}$

2) a) Démontrons que toutes solutions de (E) vérifie:

$(f-p)''-3(f-p)'+2(f-p)=b$

f solution de (E)

$\Rightarrow f''-3f'+2f=2x^2-5x+3$

p solution de (E)

$\Rightarrow p''-3p'+2p=2x^2-5x+3$; on le système :

$\begin{cases} f''-3f'+2f = 2x^2-5x+3 \\ p''-3p'+2p = 2x^2-5x+3 \end{cases}$

On obtient le résultat en faisant une soustraction membre à membre:

$(f-p)''-3(f-p)'+2(f-p)=0$

b) $y''-3y'+2y=0$

L'équation caractéristique de l'équation différentielle est: $r^2-3r+2=0$

$(r-2)(r-1)=0 \Rightarrow r=1$ *ou* $r=2$.

Alors l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions

$x \mapsto ae^x+be^{2x}$ $(a \in IR,\ b \in IR$.

définies sur IR

3) Déduisons des questions 1) et 2) la forme générale de solution de (E) :

Si h est une solution de $y''-3y'+2y=0$, alors $(h+p)$ est une solution de (E). Donc la forme générale des solutions de (E) est : l'ensemble des fonctions

$$x \mapsto ae^x+be^{2x}+x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$$

$(a \in IR,\ b \in IR)$.

définies sur IR

4) Déterminons la solution f de (E) dont la courbe représentative (E) passe par l'origine et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

On a : $f(0)=0$; $f'(0)=0$

$f(0)=a+b+\frac{5}{4}=0$ et

$f'(0)=a+2b+\frac{1}{2}=0$

Nous avons le système :

$$\begin{cases} a+b=-\frac{5}{4} \\ a+2b=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$f(x)=-2e^x+\frac{3}{4}e^{2x}+x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4} \quad \forall x \in IR$$

PROBLEME

$$f(x)=\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$$

Partie A

1) a) Calcul des limites :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} g(x)=2$ *car*

$\left(\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}}(x-1)=0; \lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0\right)$

b) Calcul de $g'(x)$ pour $x \in]1;+\infty[$.

$g'(x)=2-\ln(x-1)-(x-1)\times\frac{1}{x-1}$;

$\underline{g'(x)=1-\ln(x-1)}$

c) Résolution de l'inéquation

$1-\ln(x-1)>0 \quad x \in]1;+\infty[$

$1>\ln(x-1) \Leftrightarrow \ln(x-1)<1$

$\Leftrightarrow x-1<e \Leftrightarrow x<1+e$

$\underline{S=]1;1+e[}$

d) Sens de variation de g :

$\forall x \in]1;1+e[,\ g'(x)>0$; g est strictement croissante sur $]1;1+e[$.

$\forall x \in]1+e;+\infty[,\ g'(x)<0$; g est strictement décroissante sur $]1+e;+\infty[$

e) Tableau de variation :

x	1		$1+e$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	-	
$g(x)$	‖ 2	↗	$2+e$	↘	$-\infty$

g est continue et strictement décroissante sur $]1+e;1+e^3]$; elle réalise une bijection de $]1+e;1+e^3]$ sur $[g(1+e^3);g(1+e)[$.

$g(1+e^3)=2(1+e^3)-(e^3)\ln e^3$

$=2-e^3<0$

$g(1+e)=2+e>0$

$0\in]2-e^3;2+e[$ alors il existe α unique élément de $]1+e;1+e^3]$ tel que $g(\alpha)=0$.

x	1		$1+e$		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	-			
$g(x)$	‖ 2	↗	$2+e$	↘	0	↘	$-\infty$

$\forall x\in]1;\alpha[,\ g(x)>0$

$\forall x\in]\alpha;+\infty[,g(x)<0$

$g(\alpha)=0$

2) a) Déterminons $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ et prouvons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$

$*\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}=-\infty$ car

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1}x^2-1=0\ et\ x^2-1>0\\ \lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty\end{cases}$

$*\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}=0$ car :

$$\frac{\ln(x^2-1)}{x}=\frac{\ln\left[x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}$$

$$=\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}=0$)

b) Calcul de $\varphi'(x)$

$\varphi'(x)=\dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$;

$\forall x\in]1;+\infty[,\ (x^2-1)x^2>0$ donc $\varphi'(x)$ et $2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)$ ont le même signe sur $]1;+\infty[$.

Or $g(x^2)=2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)$ donc $\varphi'(x)$ et $g(x^2)$ ont le même signe sur $]1;+\infty[$.

c) Montrons que φ est décroissante sur $]1;\sqrt{\alpha}[$ et croissante sur $]\sqrt{\alpha};+\infty[$:

$x\in]1;\sqrt{\alpha}[\Rightarrow x^2\in]1;\alpha[\Rightarrow g(x^2)>0$

$\varphi'(x)>0$

φ est strictement croissante sur $]1;\sqrt{\alpha}[$

$x\in]\sqrt{\alpha};+\infty[\Rightarrow x^2\in]\alpha;+\infty[\Rightarrow g(x^2)<0$

$(A-1)e)\Rightarrow\varphi'(x)<0$

φ est strictement décroissante sur $]\sqrt{\alpha};+\infty[$.

Partie B

1) Vérifions que $\forall x\in]0;+\infty[$, on a

$f(x)=\varphi(e^x)$

$*x>0\Rightarrow e^x>1\Rightarrow e^x\in]1;+\infty[$

$*\varphi(e^x) = \dfrac{\ln\left((e^x)^2 - 1\right)}{e^x} = \dfrac{\ln\left(e^{2x} - 1\right)}{e^x} = f(x)$

$\forall x \in]0;+\infty[, \varphi(e^x) = f(x)$

2) Déduction :

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = -\infty \\ f(x) = \varphi(x) \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0 \\ f(x) = \varphi(e^x),\ \forall x \in]0;+\infty[\end{cases}$

c) Sens de variation et maximum de f en $\ln\sqrt{\alpha}$:

$*f'(x) = e^x.\varphi'(x)$; $\forall x \in]0;+\infty[$ $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ ont le même signe.

$\varphi'(e^x) > 0 \Leftrightarrow e^x \in]1;\sqrt{\alpha}[\Leftrightarrow 1 < e^x < \sqrt{\alpha}$

$\Leftrightarrow 0 < x < \ln(\sqrt{\alpha})$

donc $\forall x \in]0;\ln(\sqrt{\alpha})[$, $\varphi'(x) > 0, f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur $]0;\ln(\sqrt{\alpha})[$

$\varphi'(e^x) < 0 \Leftrightarrow e^x \in]\sqrt{\alpha};+\infty[\Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < e^x$

$\Leftrightarrow \ln\sqrt{\alpha} < x \Leftrightarrow x \in]\ln(\sqrt{\alpha});+\infty[$

$\forall x \in]\ln(\sqrt{\alpha});+\infty[$, $f'(x) < 0$; f est strictement décroissante sur $]\ln(\sqrt{\alpha});+\infty[$

$f'[\ln(\sqrt{\alpha})] = 0$; $f'(x)$ s'annule en $\ln(\sqrt{\alpha})$ en passant du signe + au signe - . f admet donc un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3) Montrons que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x) \le \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$:

$f(\ln(\sqrt{\alpha})) = \dfrac{\ln(e^{2\ln(\sqrt{\alpha})} - 1)}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}} = \dfrac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$

or $2\alpha - (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1) = 0$

d'où $\ln(\alpha - 1) = \dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}$

$f(\ln(\sqrt{\alpha})) = \dfrac{2\alpha}{\alpha - 1} \times \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) \le \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$ (car f admet un maximum en $\ln\sqrt{\alpha}$)

4) Tableau des valeurs :

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$	-1,36	0,33	0,68	0,65	0,54	0,30

x	0		$\ln\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	-	
$f(x)$	||	$-\infty$	$\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$		0

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; C_f admet une asymptote d'équation $x = 0$

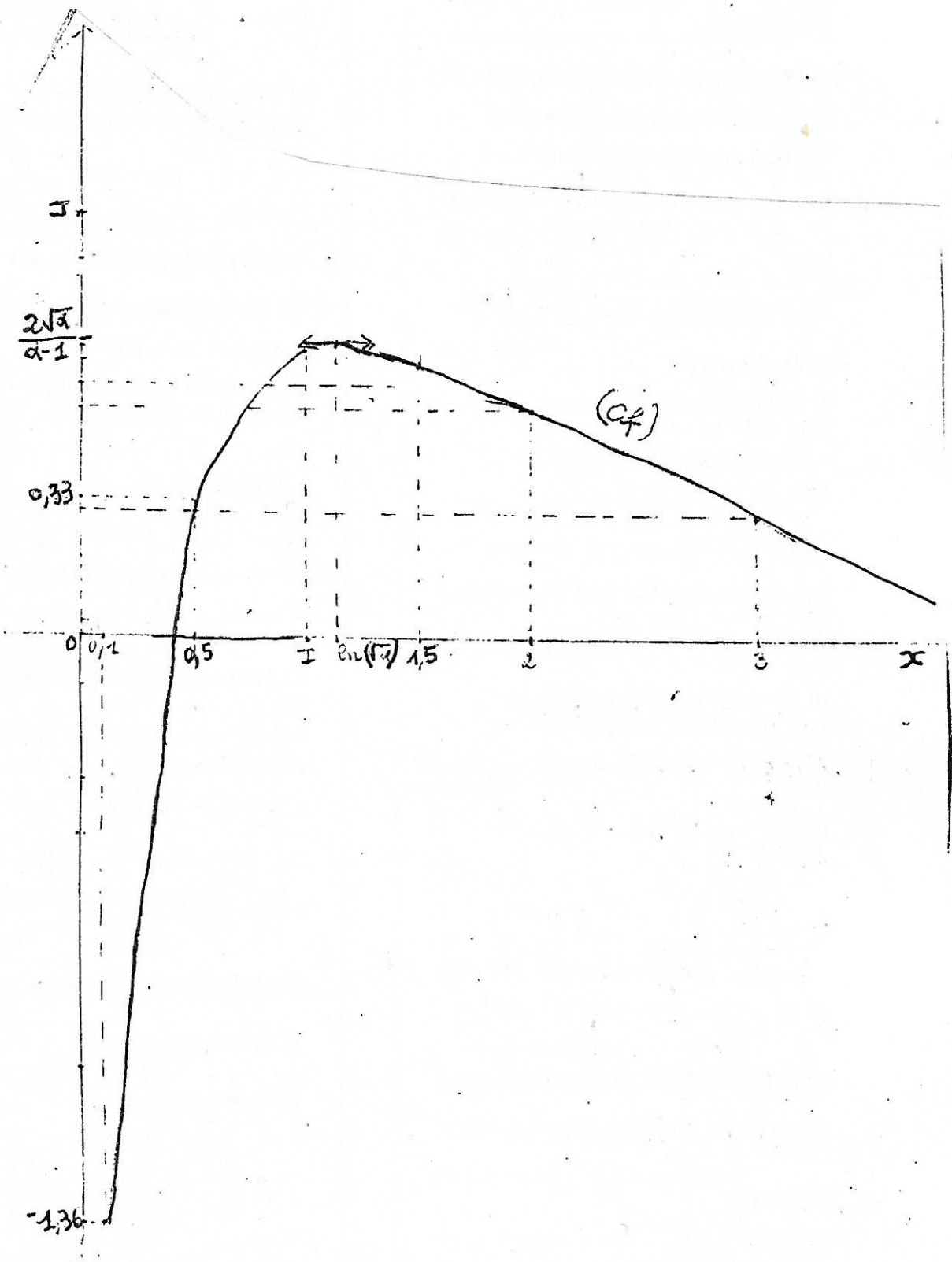
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; C_f admet une asymptote d'équation $y = 0$

Représentation graphique :

Echelle :

en abscisse : 5cm pour 1

en ordonnée : 10cm pour 1


1
$\frac{2\sqrt{2}}{a-1}$
0,33
0
0,5
1
$\ln(\sqrt{2})$
1,5
2
3
x
(Cf)
-1,36

SUJET 17

Exercice 1

1) Détermination de α, β et χ

$(2r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow 4r^2+4r+1=0$

Or (E) a pour équation caractéristique

$\alpha r^2 + \beta r + \chi = 0$; donc $\begin{cases} \alpha = 4t \\ \beta = 4t, \quad t \in IR^* \\ \chi = t \end{cases}$

On peut prendre : $\alpha = \beta = 4$ et $\chi = 1$.

2) $\alpha = \beta = 4\chi$

a) Résolution de (E) :

(E) : $4z''+4z'+z=0$

Equation caractéristique :

$(K) : 4r^2+4r+1=0$

$(K) \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$

Les solutions de (E) sont les fonctions :

$x \mapsto (ax+b)e^{-\frac{1}{2}x}$, $(a,b) \in IR^2$

b) Détermination de la solution y :

Des hypothèses faites sur y, on a :

$\begin{cases} \forall x \in IR,\ y(x) = (ax+b)e^{-\frac{1}{2}x},\ (a,b) \in IR^2 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} b = 2 \\ a - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

D'où $y : x \mapsto (x+2)e^{-\frac{1}{2}x}$

3) a) Calcul de U_n en fonction de n

$U_n = \int_0^n (x+2)e^{-\frac{x}{2}}dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$;

$\begin{cases} \text{on a : } u'(x) = 1 \\ \text{on peut prendre : } v(1) = -2e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

On a :

$U_n = \left[-2(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^n + 2\int_0^n e^{-\frac{1}{2}x}dx$

$U_n = \left[(-2x-8)e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^n$

D'où $\underline{U_n = (-2n-8)e^{-\frac{1}{2}x} + 8}$, $\forall n \in IN$

b) Démontrons que $\forall n \in IN$, $0 \le U_n < 8$:

Soit $n \in IN$.

* $U_n - 8 = -(2n+8)e^{-\frac{1}{2}n}$; $U_n - 8 < 0$

Par suite $U_n < 8$, $\forall n \in IN$ (i)

* $\forall x \in [0;n]$, $(x+2)e^{-\frac{1}{2}x} > 0$

On en déduit que : $\int_0^n (x+2)e^{-\frac{1}{2}x}dx \ge 0$

Par suite : $\forall n \in IN$, $U_n \ge 0$ (ii)

De (i) et (ii), on conclut que :

$\forall n \in IN$, $0 \le U_n < 8$

c) Signe de $U_{n+1} - U_n$:

$U_{n+1} - U_n = \int_0^{n+1} h(x)dx - \int_0^n h(x)dx = \int_n^{n+1} h(x)dx$

Or $\forall x \in [n;n+1]$, $h(x) > 0$

d'où $U_{n+1} - U_n > 0$, $\forall n \in IN$

d) Convergence et calcul de la limite de (U_n) :

- (U_n) est croissante et majorée ; elle est alors convergente.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-2ne^{-\frac{1}{2}n} - 8e^{-\frac{1}{2}n} + 8\right]$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2ne^{-\frac{1}{2}n}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[4\left(-\frac{1}{2}n\right)e^{-\frac{1}{2}n}\right] = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = 8$

Exercice 2

1) Coordonnées de K :

$z_K = h\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1}{3}$ d'où $\underline{K\left(\frac{1}{3};0\right)}$

2) $\alpha \in IR$; $(E) : h(z) = \frac{2}{3}\cos\alpha$

Résolution de (E) :
(z solution de (E))

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \in C^* \\ z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Le discriminant réduit de (*) est :

$$\Delta' = \cos^2\alpha - 1$$
$$= (i\sin\alpha)^2$$

Les solutions de (E) sont :
$(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $(\cos\alpha - i\sin\alpha$.

3) a) Déduction de la résolution de (E') :

$(E') : z^4 - 2z^2\cos\alpha + 1 = 0$

Posons $Z = z^2$

$$(E') \Leftrightarrow Z^2 - 2Z\cos\alpha + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} Z = e^{i\alpha} \\ \text{ou} \\ Z = e^{-i\alpha} \end{array} \right. \quad \text{d'près 2)}$$

$$*Z = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z^2 = (e^{i\frac{\alpha}{2}})^2$$
$$\Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} z = e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ \text{ou} \\ z = -e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left(z = e^{i\frac{\alpha}{2}} \ ou \ z = e^{i(\pi+\frac{\alpha}{2})}\right)$$

$$*Z = e^{-i\alpha} \Leftrightarrow z^2 = (e^{-i\frac{\alpha}{2}})^2$$
$$\Leftrightarrow \left(z = e^{-i\frac{\alpha}{2}} \ ou \ z = e^{i(\pi-\frac{\alpha}{2})}\right)$$

L'ensemble des solutions de (E') est :
$\left\{e^{i\frac{\alpha}{2}}, e^{-i\frac{\alpha}{2}}, e^{i(\pi+\frac{\alpha}{2})}, e^{i(\pi-\frac{\alpha}{2})}\right\}$.

b) Prouvons que les solutions de (E') sont conjuguées :

$*e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $e^{-i\frac{\alpha}{2}}$ sont conjuguées ;

$*e^{i(\pi+\frac{\alpha}{2})}$ et $e^{i(\pi-\frac{\alpha}{2})}$ sont conjuguées,

car : $e^{i(\pi+\frac{\alpha}{2})} = e^{i(\pi+\frac{\alpha}{2}-2\pi)} = e^{-i(\pi-\frac{\alpha}{2})}$

c) Décomposition de $P(x)$:

De ce qui précède, on a :

$$P(x) = \left(x - e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(x - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(x - e^{i(\pi+\frac{\alpha}{2})}\right)\left(x - e^{i(\pi-\frac{\alpha}{2})}\right)$$
$$= \left[x^2 - x(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}) + 1\right]\left[x^2 - x(e^{i(\pi+\frac{\alpha}{2})} + e^{i(\pi+\frac{\alpha}{2})}) + 1\right]$$

d'où

$$P(x) = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right)$$

4) a) f a pour écriture complexe

$z' = (1-i)z + \frac{1}{3}i$ qui est de la forme

$z' = az + b$, où $a \in C^*$ et $b \in C$. On en déduit que f est une similitude plane directe de rapport $|1-i| = \sqrt{2}$.

b) Puisque $a \in C - IR$ et $|a| \neq 1$, alors f est composée d'une rotation et d'une homothétie h.

* r a :

- pour centre K tel que :

$$z_K = \frac{\frac{1}{3}i}{1-(1-i)} = \frac{1}{3} \ ;$$

- pour angle dont une mesure est

$\theta = \arg(1-i)$. On prend $\theta = \frac{-\pi}{4}$

* h a :

- pour centre $K\left(\frac{1}{3};0\right)$

- pour rapport $k = \sqrt{2}$.

PROBLEME

$$\begin{cases} f(x) = \exp_2\left(x^2 - 3x + 2\right), \ si \ x \in [0;2] \\ f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{\ln(x-2)}, \ si \ x \in]2;+\infty[\end{cases}$$

1)

$$D = [0;2] \cup \{x \in]2;+\infty[/ \ln(x-2) \neq 0\}$$
$$= [0;2] \cup]2;3[\cup]3;+\infty[$$
$$== [0;3[\cup]3;+\infty[$$

Donc $D = [0;3[\cup]3;+\infty[$

2) a) Continuité de f en $x_0 = 2$:

$*f(2) = \exp_2(0) = 1$; $\lim\limits_{2^-} f = 1$

$$* \lim_{2^+} f = \lim_{2+}\left[x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)}\right] = 1$$

car $\lim\limits_{2^+} \ln(x-2) = -\infty$

On a donc $\lim\limits_{2^-} f = \lim\limits_{2^+} f = f(2)$

D'où f est continue en $x_0 = 2$.

b) Dérivabilité de f en $x_0 = 2$:

$$* \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{(x^2-3x+2)\ln 2}-1}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\left[(x-1)\ln 2 \frac{e^{(x^2-3x+2)\ln 2}-1}{(x^2-3x+2)\ln 2}\right]$$

Or

$$\lim_{x\to 2^-}(x-1)\ln 2 = \ln 2$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{e^{(x^2-3x+2)\ln 2}-1}{(x^2-3x+2)\ln 2}\right] = \lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X}$$

(où $X = (x^2-3x+2)\ln 2) = 1$

Donc $\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \ln 2$. f est alors dérivable à gauche en $x_0 = 2$

$$* \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\left[1-\frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}\right]$$

or

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x-2) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} X\ln X \text{, où } X = x-2$$

$$= 0, \text{ avec } X\ln X < 0.$$

Donc $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$. Par suite f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 2$.

Conclusion : f n'est pas dérivable en $x_0 = 2$ mais elle est dérivable à gauche en $x_0 = 2$.

c) Demi-tangentes :

- A gauche au point d'abscisse 2, (C) admet une demi-tangente définie par :

$$\begin{cases} y = x\ln 2 + 1 - 2\ln 2 \\ x \le 2 \end{cases}$$

- A droite au point d'abscisse 2, (C) admet une demi-tangente définie par :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y \ge 1 \end{cases}$$

3) a)

* L'ensemble de dérivabilité de f est $D' = [0;2[\cup]2;3[\cup]3;+\infty[$

* Fonction dérivée f' de f.

$$\begin{cases} \forall x \in [0;2[, f'(x) = (2x-3)\ln 2 \exp_2(x^2-3x+2) \\ f'_g(2) = \ln 2 \\ \forall x \in]2,3[\cup]3;+\infty[, f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)[\ln(x-2)]^2} \end{cases}$$

b) Sens de variation de f :

- On a :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0;\frac{3}{2}\right[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in \left]\frac{3}{2};2\right[\cup]2;3[\cup]3;+\infty[, f'(x) > 0 \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

- Il en résulte que la fonction f est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles : $\left[\frac{3}{2};3\right[$ et $]3;+\infty[$

4) a) Limites de f aux bornes de D :

* $f(0) = 4$

$$* \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left[x-1-\frac{1}{\ln(x-2)}\right]$$

$$= +\infty \text{, car } \begin{cases} \lim_{x\to 3^-}\ln(x-2) = 0 \\ \ln(x-2) < 0 \end{cases}$$

$$* \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left[x-1-\frac{1}{\ln(x-2)}\right]$$

$$= -\infty \text{, car } \begin{cases} \lim_{x\to 3^+}\ln(x-2) = 0 \\ \ln(x-2) > 0 \end{cases}$$

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x-1-\frac{1}{\ln(x-2)}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{, car } \begin{cases} \lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x-1)} = 0 \end{cases}$$

b) Tableau de variation de f :

x	0	$\frac{3}{2}$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	- ‖	0	+	+ ‖	+
f	4	$2^{-\frac{1}{4}}$	$+\infty$ / 1	$+\infty$ / $-\infty$	

5) a)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln(x-2)}\right)$$

$$=0$$

Par suite, la droite d'équation $y=x-1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) * $f([0;3[)=\left]2^{-\frac{1}{4}};+\infty\right[$ or $0\notin\left]2^{-\frac{1}{4}};+\infty\right[$.

Donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans $[0;3[$.

* f est continue et strictement croissante sur $]3;+\infty[$ et $f(]3;+\infty[)=IR$.

* $0\in IR$.

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]3;+\infty[$. On conclut que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.

Par ailleurs, $\begin{cases}\left]\frac{17}{5};\frac{7}{2}\right[\subset]3;+\infty[\\ f\left(\frac{17}{5}\right)<0 \text{ et } f\left(\frac{7}{2}\right)>0\end{cases}$

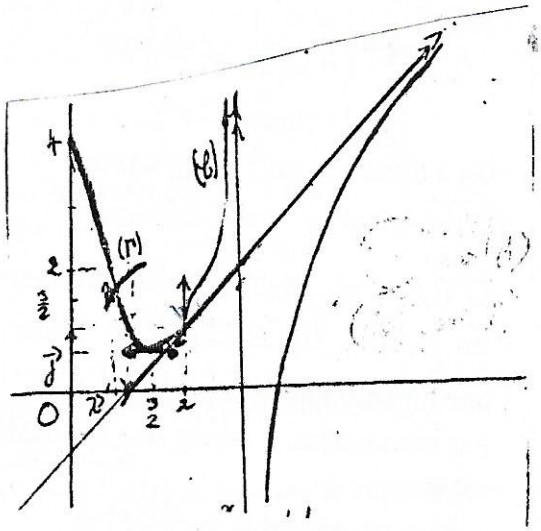
D'où $\alpha\in\left]\frac{17}{5};\frac{7}{2}\right[$.

c) Construction de (C)

* La droite d'équation $x=3$ est asymptote à (C).

* Tangente à (C) à gauche en son point d'abscisse 0 :

$$\begin{cases}y=-12x\ln 2+4\\ x\geq 0\end{cases}$$



6) $F(x)=\int_4^x\frac{dt}{\ln(t-2)}$

a) La fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln(t-2)}$ est continue sur $[4;+\infty[$; donc F est définie sur $[4;+\infty[$.

b) $\forall x\in[4;+\infty[$, $F'(x)=\frac{1}{\ln(x-2)}$

Or $\forall x\in[4;+\infty[$, $\ln(x-2)>0$

Donc la fonction F est strictement croissante sur $[4;+\infty[$.

c) Encadrement de $F(5)$ par la méthode des rectangles.

$h:t\mapsto\frac{1}{\ln(t-2)}$ est strictement décroissante sur $[4;+\infty[$. On en déduit :

$S_1<F(5)<S_2$ avec

$S_1=0{,}2[h(4{,}2)+h(4{,}4)+h(4{,}6)+h(4{,}8)+h(5)]$

$\approx 1{,}067$

$S_2=0{,}2[h(4)+h(4{,}2)+h(4{,}4)+h(4{,}6)+h(4{,}8)]$

$\approx 1{,}174$

d) Soit A l'aire demandée.

On a : $A = \left(\int_4^5 (x-1-f(x)dx\right) \times 4cm^2$

$$A = \left(\int_4^5 \frac{1}{\ln(x-2)}dx\right)4cm^2$$

$$= 4F(5)cm^2$$

On a donc $4S_1cm^2 \leq A \leq 4S_2cm^2$

D'où $4{,}268cm^2 \leq A \leq 4{,}696cm^2$

7) a) f est continue et strictement croissante sur $[\frac{3}{2};2]$ et $f([\frac{3}{2};2]) = [2^{-\frac{1}{4}};1]$. Donc f est une bijection de $[\frac{3}{2};2]$ sur $[2^{-\frac{1}{4}};1]$.

Par conséquent, g admet une application réciproque g^{-1}.

b) g est dérivable sur $[\frac{3}{2};2]$ et

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. D'où l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} est

$K = g(]\frac{3}{2};2[) =]2^{-\frac{1}{4}};1[$

8) a) * $g(2) = f(2) = 1$

$g(2) = 1 \Rightarrow A(1,2) \in (\Gamma)$

$$* \begin{cases} y = \frac{1}{\ln 2}x - \frac{1}{\ln 2} + 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

b) Calcul de $g^{-1}(x)$, pour $x \in [2^{-\frac{1}{4}};1]$

Soit $x \in [2^{-\frac{1}{4}};1]$.

Posons $g^{-1}(x) = y$, $y \in [\frac{3}{2};2]$.

On a : $g^{-1}(x) = y \Rightarrow g(y) = x$

$\Rightarrow (y^2 - 3y + 2)\ln 2 = \ln x$

Donc $y^2 - 3y + 2 - \frac{\ln x}{\ln 2} = 0$

$\Delta = 1 + \frac{4\ln x}{\ln 2}$

$y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4\ln x}{\ln 2}}$ ou $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4\ln x}{\ln 2}}$

Or $y \in [\frac{3}{2};2]$.

Donc : $\forall x \in [2^{-\frac{1}{4}};1]$,

$g^{-1}(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\frac{\ln x}{\ln 2}}$.

c) Construction de (Γ) :

Voir figure.

SUJET 20

Exercice 1

$f(z) = z^3 - 5iz^2 - 11z + 15i$

1- Développons, réduisons et ordonnons $g(z)$:

$g(z) = (z - 3i)(z^2 - 2i - 5)$

$= z^3 - 2iz^2 - 5z - 3iz^2 - 6z + 15i$

$= z^3 - 5iz^2 - 11z + 15i$

$g(z) = z^3 - 5iz^2 - 11z + 15i$

2- a) démontrons que $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure et une seule z_0 :

Soit $\alpha \in IR^*$ tel que $z_0 = \alpha i$ solution de $f(z) = 0$.

On a : $f(\alpha i) = 0$

$-\alpha^3 i + 5i\alpha^2 - 11\alpha i + 15i = 0$

$i(-\alpha^3 + 5\alpha^2 - 11\alpha + 15) = 0$

$-\alpha^3 + 5\alpha^2 - 11\alpha + 15 = 0$

$\alpha^3 - 5\alpha^2 + 11\alpha - 15 = 0$

$(\alpha - 3)(\alpha^2 - 2\alpha + 5) = 0$

$\alpha - 3 = 0$ ou $\alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0$

$\alpha = 3$ ou $\alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0$

$\alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 5 = -4 < 0$

donc $\alpha^2 - 2\alpha + 5 > 0$

alors $\alpha = 3$

D'où $z_0 = 3i$ est la seule solution imaginaire pure de $f(z) = 0$.

NB : $f(z) = g(z)$ et $g(3i) = 0$ d'où le résultat

b) Déterminons les deux autres solutions z_1 et z_2 : de $f(z) = 0$

D'après 1-, $f(z) = g(z)$

Tchinkcyr

$f(z)=0 \Leftrightarrow g(z)=0$

$\Leftrightarrow (z-3i)(z^2-2iz-5)=0$

$\Leftrightarrow z=3i \quad ou \quad z^2-2iz-5=0$

$z_0=3i$ donc z_1 et z_2 sont solutions de

$z^2-2iz-5=0$

$\Delta'=(-i)^2+5=-1+5=4$

$z=i-2 \quad ou \quad z=i+2$

Or $\text{Re}(z_1>0$

D'où $z_1=2+i$ et $z_2=-2+i$

3- a) Démontrons que ABC est un triangle rectangle isocèle :

A(0 ;3) , B(2 ;1) et C(-2 ;1)

A, B et C ont pour affixes respectives

$z_0=3i$, $z_1=2+i$ et $z_2=-2+i$

$$\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0}=\frac{2+i-3i}{-2+i-3i}=\frac{2-2i}{-2-2i}=\frac{1-i}{-1-i}$$

$$=\frac{(1-i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{-1+i+i+1}{1+1}=\frac{2i}{2}$$

$$\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0}=i$$

$\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0}\in iIR^*$ donc (AB) $\perp$ (AC) alors le triangle ABC est rectangle en A.

De plus, $\left|\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0}\right|=|i|=1$

ie $|z_1-z_0|=|z_2-z_0|$

soit $AB=AC$ donc ABC est isocèle.

D'où le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

b) * Donnons la nature précise de S :

S est la similitude plane directe. Alors son écriture complexe est de la forme :

$z'=az+b$ avec $a\in C^*, b\in C$.

De plus $S(A)=B$ et $S(C)=A$

Donc $\begin{cases} z_1=az_0+b \\ z_0=az_2+b \end{cases}$

$\begin{cases} 2+i=3ia+b \\ 3i=(-2+i)a+b \end{cases}$

$\begin{cases} 3ia+b=2+i \\ (-2+i)a+b=3i \end{cases}$

$$a=\frac{z_0-z_1}{z_2-z_0}=\frac{-(z_1-z_0)}{z_2-z_0}=-i$$

$a=-i$ or $3ia+b=2+i$ donc

$b=2+i-3ia$

$=2+i-3i(-i)=2+i-3$

$=-1+i$

$a=-i$ et $b=-1+i$

Donc l'écriture complexe de S est :

$\underline{\underline{z'=-iz-1+i}}$

$a=-i\in C^*-\{1\}$ et $|a|=|-i|=1$ donc S est une rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle

$\alpha=\arg a$ avec $w=\frac{b}{1-a}=\frac{-1+i}{1+i}=i$ soit $\Omega(i)$ et

$\alpha=\arg(-i)$ on prend $\alpha=\frac{-\pi}{2}$

* L'expression analytique S^{-1} :

Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$

L'écriture complexe de S est :

$z'=-iz-1+i$

$$z=\frac{z'+1-i}{-i}=\frac{i(z'+1-i)}{i(-i)}$$

$$=\frac{iz'+i+1}{1}$$

$z=iz'+1+i$

Donc l'expression complexe de S^{-1} est :

$\underline{\underline{z'=iz+1+i}}$

Ainsi $S^{-1}(M)=M' \Leftrightarrow$

$z_{M'}=iz_M+1+i \Leftrightarrow$

$x'+iy'=i(x+iy)+1+i$

$x'+iy'=xi-y+1+i$

$x'+iy'=-y+1+i(x+1)$

avec x, y, x' et y' des réels

Donc $\begin{cases} x'=-y+1 \\ y'=x+1 \end{cases}$ est l'expression analytique de S^{-1}.

Exercice 2

1- a) Soit P_a cette probabilité.

$$P_a = \frac{C_{17}^9 \times C_3^1}{C_{20}^{10}} = \frac{72930}{184756} = \frac{15}{38}$$

$$P_a = \frac{15}{38}$$

b) Soit P_b cette probabilité :

$P_b = 1 - \overline{P}_b$ où $\overline{P}_b$ désigne la probabilité pour que, parmi les dix billets achetés, aucun billet n'est gagnant.

$$\overline{P}_b = \frac{C_{17}^{10}}{C_{20}^{10}} \quad \text{donc}$$

$$P_b = 1 - \frac{C_{17}^{10}}{C_{20}^{10}}$$

$$= 1 - \frac{19448}{184756} = 1 - \frac{2}{19} = \frac{17}{19}$$

$$P_b = \frac{17}{19}$$

Autre méthode :

$$P_b = \frac{C_{17}^9 \times C_3^1 + C_{17}^8 \times C_3^2 + C_{17}^7 \times C_3^3}{C_{20}^{10}}$$

2- Déterminons la loi de probabilité de X :

Soit Ω l'univers associé à l'épreuve.

$X(\Omega) = \{0;50;100;150;200\}$

(les éléments de $X(\Omega)$ sont exprimés en francs).

$$P(X=0) = \frac{C_{17}^{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{2}{19}$$

$$P(X=50) = \frac{C_{17}^9 \times C_2^1}{C_{20}^{10}} = \frac{5}{19}$$

$$P(X=100) = \frac{C_{17}^9 \times C_1^1}{C_{20}^{10}} + \frac{C_{17}^8 \times C_2^2}{C_{20}^{10}}$$

$$= \frac{5}{38} + \frac{5}{38} = \frac{5}{19}$$

$$P(X=150) = \frac{C_{17}^8 \times C_1^1 \times C_2^1}{C_{20}^{10}} = \frac{5}{19}$$

$$P(X=200) = \frac{C_{17}^7 \times C_1^1 \times C_2^2}{C_{20}^{10}} = \frac{2}{19}$$

$$= \frac{C_{17}^7 \times C_3^3}{C_{20}^{10}} = \frac{2}{19}$$

Loi de Probabilité de X :

x_i	0	50	100	150	200
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{2}{19}$

PROBLEME

$(E) : y'' - 2y' + y = 1 - x$

$(E') : y'' - 2y' + y = 0$

1) Vérification

La fonction $u : x \mapsto -x - 1$ est deux fois dérivable sur IR comme étant une fonction polynôme et pour tout élément x de IR, on a : $u'(x) = -1$ et $u''(x) = 0$.

Par conséquent,

$u''(x) - 2u'(x) + u(x) = 2 - x - 1 = 1 - x$

Ainsi

$\forall x \in IR,\ u''(x) - 2u'(x) + u(x) = 1 - x$ d'où u est solution de (E).

2) a)

(g est solution de (E')) $\Leftrightarrow$

$[\forall x \in IR,\ g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0] \Leftrightarrow$

$[\forall x \in IR,\ (f-u)''(x) - 2(f-u)'(x) + (f-u)(x) = 0]$

$\Leftrightarrow [\forall x \in IR,\ f''(x) - u''(x) - 2f'(x) + 2u'(x) + f(x) - u(x) = 0]$

$\Leftrightarrow [\forall x \in IR,\ f''(x) - 2f'(x) + f(x) = u''(x) - 2u'(x) + u(x)]$

$\Leftrightarrow [\forall x \in IR,\ f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 1 - x]$

$\Leftrightarrow [f$ est solution de $(E)]$

b) Résolution de l'équation de (E') :

L'équation caractéristique de (E') est

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow r = 1$

d'où les solutions de (E') sont les fonctions g définies sur IR par $g : x \mapsto (Ax + B)e^x$ où A et B sont des constantes réelles.

c) Déduction :

On sait que : (f solution de (E))

$\Leftrightarrow (f - u$ solution de $(E'))$;

or les solutions de (E') sont les fonctions

$g : IR \to IR$

$x \mapsto (Ax + B)e^x$

Tchinkcyr

D'où les solutions de (E) sont les fonctions

$f : IR \to IR$

$x \mapsto (Ax+B)e^x - x - 1$

où A et B sont des constantes réelles.

3) Solution particulière φ de (E) :

La fonction φ est définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in IR,\ \varphi(x) = (Ax+B)e^x - x - 1 \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = 0 \end{cases}$$

$\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow B - 1 = 0 \Leftrightarrow B = 1$

$\forall x \in IR, \varphi'(x) = (A + Ax + B)e^x - 1$

Donc $\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow A + B - 1 = 0$

$\Leftrightarrow A = 1 - B = 0$ car $B = 1$

$\begin{cases} B = 1 \\ A = 0 \end{cases}$ d'où

$\varphi : IR \to IR$

$x \mapsto e^x - x - 1$

4) $h : x \mapsto e^x - x - 1$

a) Domaine de définition D de h :

$D = IR$

b) Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$ car

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x-1) = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right)$

$= +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-1 - \frac{1}{x}\right) = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

c) Etude de la continuité et de la dérivabilité de h :

h est continue et dérivable sur IR comme somme des deux fonctions : $h_1 : x \mapsto e^x$ et $h_2 : x \mapsto -x - 1$ qui sont continues et dérivables sur IR.

d) Fonction dérivée h' de h :

$\forall x \in IR, h'(x) = e^x - 1$

e) Tableau de variation :

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

On en déduit que h est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

f) Signe de $h(x)$ pour $x \in D$:

Du tableau de variation de h, on déduit que $\forall x \in IR,\ h(x) \geq 0$ car 0 est un minimum absolu de h sur $IR =]-\infty;+\infty[$.

5) Démontrons que l'équation $h(x) = 1$ admet dans D deux solutions α et β telles que : $-2 < \alpha < -\frac{7}{4}$ et $1 < \beta < \frac{5}{4}$:

Soit la fonction

$k : IR \to IR$

$x \mapsto h(x) - 1 = e^x - x - 2$

- h étant continue sur IR, k est aussi continue sur IR (1)

$k(-2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} > 0$ donc $k(-2) > 0$

$k\left(-\frac{7}{4}\right) = e^{-\frac{7}{4}} + \frac{7}{4} - 2 = e^{-\frac{7}{4}} - \frac{1}{4}$

or $e^{-\frac{7}{4}} \cong 0{,}17 < \frac{1}{4}$ donc $k\left(-\frac{7}{4}\right) < 0$

On a donc $k(-2) \times k\left(-\frac{7}{4}\right) < 0$ (2)

D'après (1), (2), on déduit que l'équation $k(x) = 0$ et par suite l'équation $h(x) = 1$ admet une solution α telle que $-2 < \alpha < -\frac{7}{4}$

Par ailleurs :

$k(1) = e - 1 - 2 = e - 3 < 0$ car $e < 3$

$k\left(\frac{5}{4}\right) = e^{\frac{5}{4}} - \frac{5}{4} - 2 = e^{\frac{5}{4}} - \frac{13}{4} > 0$

car $e^{\frac{5}{4}} \cong 3{,}49 > \frac{13}{4}$

On a donc $k(1) \times k\left(\frac{5}{4}\right) < 0$.

De manière analogue à la démonstration précédente, l'équation $h(x) = 1$ admet une solution β telle que $1 < \beta < \frac{5}{4}$.

6) a) Etude des branches infinies de (C) :

Soit (Δ) la droite d'équation $y = -x - 1$.

$h(x) + (x+1) = e^x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} [h(x) - (-x-1)] = 0$

d'où la droite (Δ) est une asymptote de (C) non parallèle aux axes de coordonnées au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

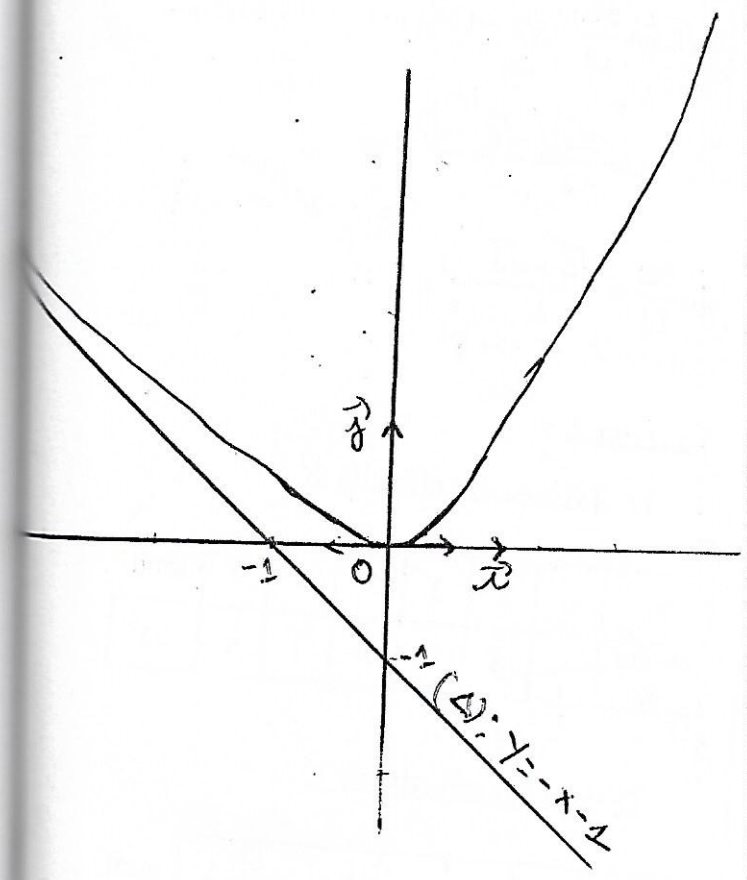
Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$

d'où (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b) Construction de (C) :

$\forall x \in IR,\ h(x) - (-x-1) = e^x > 0$

d'où (C) est au dessus de (Δ) : $y = -x - 1$



7) a) Calcul de l'aire $A(\lambda)$.

$$A(\lambda)=\left(\int_{\lambda}^{-1}[h(x)-(-x-1)]dx\right)u.a$$

$$*Si\ \lambda\le -1,\ A(\lambda)=\left(\int_{\lambda}^{-1}e^{x}dx\right)u.a$$
$$=\left(e^{-1}-e^{\lambda}\right)u.a$$

$$*Si\ \ \lambda>-1,\ A(\lambda)=\left(\int_{-1}^{\lambda}e^{x}dx\right)u.a$$
$$=\left(e^{\lambda}-e^{-1}\right)u.a$$

b) Calcul de $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\left[\lim_{\lambda\to-\infty}(e^{-1}-e^{\lambda})\right]u.a$$
$$=e^{-1}u.a$$

D'où $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)=e^{-1}u.a$.

SUJET 22

Exercice 1

1) Calcul de $(\sqrt{3}-i)^2$:

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^2=3-1-2\sqrt{3}i$$
$$=\underline{2-2\sqrt{3}\,i}$$

2) Résolution dans C de l'équation :

$$z^2-\left(\sqrt{3}+3i\right)z-2+2\sqrt{3}.i=0$$
$$\Delta=\left(\sqrt{3}+3i\right)^2-4\left(-2+2\sqrt{3}i\right)$$
$$=2-2\sqrt{3}i$$
$$=\left(\sqrt{3}-i\right)^2,\ \text{d'après 1)}$$
$$z_1=\frac{\sqrt{3}+3i+\sqrt{3}-i}{2}=\sqrt{3}+i$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}+3i-\sqrt{3}+i}{2} = 2i$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

3) a) Précisons la nature du triangle OAB :

$$OA = |\sqrt{3}+i| = 2$$
$$OB = |2i| = 2$$
$$AB = |2i-(\sqrt{3}+i)| = |i-\sqrt{3}| = 2$$

On a :
$OA = OB = AB$; d'où le triangle OAB est équilatéral.

b) Vérifions que $f(B) = A$:

On a : $e^{-i\frac{\pi}{3}} z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(2i)$
$= e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$
$= 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}$
$= 2e^{i\frac{\pi}{6}}$
$= z_A$ d'où $f(B) = A$

c) Ecriture de l'affixe de C' sous forme trigonométrique et algébrique :
On a :

* $z_{C'} = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_C$
$= e^{-i\frac{\pi}{3}}(-2+2i)$
$= e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$
$= 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

D'où $z_{C'} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

* $z_{C'} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2+2i)$
$= \left(-1+\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3}+1\right)$

Valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$:

De ce qui précède, on a :

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = -1+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3}+1 \end{cases}$$

D'où $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 2

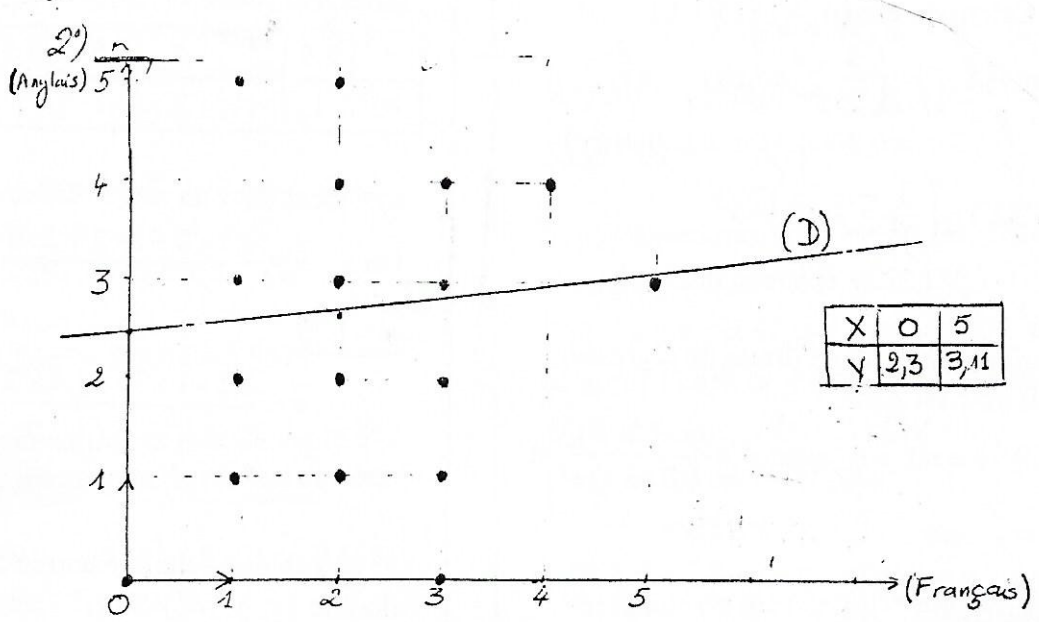
1) Tableau des effectifs de X :

x_i	0	1	2	3	4	5	total
effectif n_i	1	6	7	9	1	1	25

Tableau des effectifs de Y :

Y_j	0	1	2	3	4	5	total
effectif n_j	2	4	4	8	5	2	25

2) Représentation du nuage de points :


2°)
(Anglais)
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
(Français)
(D)
X | 0 | 5
Y | 2,3 | 3,11

3) a) Coordonnées du point moyen G du nuage

$G(\bar{x},\bar{y})$, avec $\bar{x}=\frac{1}{25}\sum nixi$ et

$\bar{y}=\frac{1}{25}\sum njyj$.

On a : $\bar{x}=2,24$ et $\bar{y}=2,64$ (par calculatrice).

$G(2,24;2,64)$.

b) Calcul de $\text{cov}(X,Y)$ et $V(X)$:

* $\text{cov}(X,Y)=\left(\frac{1}{25}\sum nij\,xiyj\right)-\overline{xy}$

$=0,2064$ (par calculatrice).

* $V(X)=\left(\frac{1}{25}\sum nix_i^2\right)-\bar{x}^2$

$=1,2224$ (par calculatrice)

4) a) Equation de la droite de régression (D) de Y en X :

$(D): y=aX+b$, avec $a=\frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et

$b=\bar{y}-a\bar{x}$;

on a : $a\approx 0,1688$ et $b\approx 2,2618$ (par calculatrice).

D'où $(D): y=(0,1688)X+2,2618$

b) Tracé de (D) (voir figure)

5) Calcul du coefficient de corrélation :

$r=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$=0,1351$ (par calculatrice)

Interprétation du résultat obtenu :

On a : $|r|<0,87$

D'où la corrélation linéaire entre X et Y est mauvaise.

SUJET 24

Exercice 1

1) a) Détermination des séries marginales (x_i,n_i) et (y_j,n_j) :

Série marginale (x_i,n_i) :

x_i	0,5	1	2	2,5
n_i	2	2	1	1

Série marginale (y_j,n_j)

y_j	2,5	3	4	5	5,5
n_j	1	1	2	1	1

b) Calcul de $\bar{x}$ et $\bar{y}$:

On a : $\bar{x}=\frac{0,5\times 2+1\times 2+2\times 1+2,5}{6}$; soit

$\underline{\bar{x}=1,25}$

$\bar{y}=\frac{2,5\times 1+3\times 1+4\times 2+5\times 1+5,5\times 1}{6}$

soit : $\underline{\bar{y}=4}$

2) a) Tableau à double entrée de la série double (x_i,y_j,n_{ij}) :

On a le tableau suivant :

y_j \ x_i	0,5	1	2	2,5
2,5	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	0	2	0	0
5	1	0	0	0
5,5	1	0	0	0

b) Covariance du couple de caractères (x,y) :

On a : $\text{cov}(x,y)=\frac{1}{6}\sum n_{ij}x_iy_j-\overline{xy}$,

soit : $\underline{\text{cov}(x,y)\approx -0,708}$

3) Calcul du coefficient de corrélation linéaire entre x et y ; interprétation :

On a : $r=\frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_X\sigma_Y}$ soit $\underline{r\cong -0,907}$;

d'où $|r| > 0{,}87$, donc la corrélation linéaire entre x et y est forte.

4) Equation de la droite de régression de y en x :
Elle s'écrit : $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$
avec $a = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{V(x)}$;
on obtient : $\underline{\underline{y = -1{,}26x + 5{,}575}}$

5) a) Démontrons que le bénéfice $b(x)$ réalisé est donné par la formule :
$b(x) = -1{,}26x^2 + 5{,}701x - 0{,}5575$
On a :
bénéfice réalisé = prix de vente – frais,
d'où : $b(x) = yx - y \times 0{,}1$ soit
$b(x) = (-1{,}26x + 5x575)(x - 0{,}1)$.
On obtient :
$b(x) = -1{,}26x^2 + 5{,}701x - 0{,}5575$

b) Détermination du prix de vente d'un téléviseur permettant de réaliser le bénéfice maximal :
On a : $b(x) = -1{,}26x^2 + 5{,}701x - 0{,}5575$,
d'où $b'(x) = -2{,}52x + S$;
de plus, on a : $-1{,}26 < 0$, donc le bénéfice maximal est atteint si et seulement si $b'(x) = 0$, soit pour $x \cong 2{,}262301587$.
Par conséquent, le prix de vente d'un téléviseur permettant de réaliser le bénéfice maximal est :
$x_0 \cong 2{,}262301587 \times 100000$frcs CFA,
soit : $\underline{\underline{x_0 \cong 226230\text{frcs CFA}}}$
Le bénéfice maximal est :
$b(x_0) \cong 5{,}87369 \times 100000$frcs CFA,
soit : $\underline{\underline{b(x_0) \cong 587369\text{frcs CFA}}}$
On a : pour $x = x_0$, $y = -1{,}26x_0 + 5{,}575$
soit $y \cong 2{,}7$.
Par conséquent, le nombre de téléviseurs à vendre pour réaliser le bénéfice maximal est : $y_0 = 2{,}7 \times 10$, soit : $\underline{\underline{y_0 = 27}}$

Exercice 2

1) a) Etude du sens de variation de f :
f est dérivable sur $[0;\frac{1}{2}]$ et $\forall x \in [0;\frac{1}{2}]$,
$f'(x) = \dfrac{10}{(2x+4)^2}$
$\forall x \in [0;\frac{1}{2}]$, $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur I.

b) Démontrons que $\forall x \in I$, $f(x) \in I$:
f étant strictement croissante sur I, on a :
$\forall x \in I$, $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$ donc f(0) ≤ f(x) ≤ $f(\frac{1}{2})$,
$f(x) \in [f(0); f(\frac{1}{2})]$
or $f(0) = \dfrac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ et $[\frac{1}{4};\frac{1}{2}] \subset I$
donc : $\forall x \in I$, $f(x) \in I$.

2) a) Démontrons que : $\forall n \in IN$, $U_n \in I$:
On a : $U_0 = 0$ et $0 \in I$, donc $U_0 \in I$ (i)
Soit $k \in IN$; si $U_k \in I$, alors $f(U_k) \in I$ (d'après 1) b)), or $f(U_k) = U_{k+1}$, donc
$U_k \in I \Rightarrow U_{k+1} \in I$ (ii)
De (i) et (ii) on déduit que :
$\forall n \in I$, $U_n \in I$.

b) Etude du sens de variation de (U_n) :
On a : $U_0 = 0$ et $U_1 = \dfrac{1}{4}$, d'où $U_0 < U_1$
Soit $k \in IN$;
$U_k < U_{k+1} \Rightarrow f(U_k) < f(U_{k+1})$ (car f est strictement croissante sur I et $\forall n \in IN, U_n \in I$)
donc $U_k < U_{k+1} \Rightarrow U_{k+1} < U_{k+2}$
Il en résulte que : $\forall n \in IN$, $U_n < U_{n+1}$,
ainsi la suite (U_n) est croissante.

c) Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente et calculons sa limite l :
D'après 2)a) et 2)b), la suite (U_n) est croissante et majorée ; par conséquent elle est convergente ; de plus : $\forall n \in IN$,
$\begin{cases} U_n \in I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ et f est continue sur I,

donc la limite l de la suite (U_n) est solution du système : $\begin{cases} f(x)=x \\ x\in I \end{cases}$

or $\begin{cases} f(x)=x \\ x\in I \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

d'où $\underline{\underline{l=\frac{1}{2}}}$

PROBLEME

Partie A

1) Calcul de $\lim\limits_{-\infty} g$:

$\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x - x\right) = +\infty$ car

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

2)

a) Calcul de $g'(x)$, $g''(x)$ pour tout x élément de $]-\infty;0]$

$\forall x\in]-\infty;0]$, $\begin{cases} g'(x)=(x+1)e^x-1 \\ g''(x)=(x+2)e^x \end{cases}$

b) Démontrons que (C_g) admet un point d'inflexion I à préciser :

$g''(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ car « $\forall x\in]-\infty;0]$, $e^x>0$ ».

Tableau de signe de $g''(x)$:

x	$-\infty$		-2		0
$g''(x)$		-	0	+	

g'' s'annule en -2 en changeant de signe par conséquent (C_g) admet le point $I(-2;g(-2))$ soit $I\left(-2;2-\frac{2}{e^2}\right)$ comme point d'inflexion.

c) Tableau de variation de g' et signe de $g'(x)$:

$\lim\limits_{-\infty} g' = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x+e^x-1\right) = -1$ et

$g'(0)=0$

x	$-\infty$		-2		0
$g''(x)$		-	0	+	
$g'(x)$	-1	↘	$g'(-2)$	↗	0

$g'(-2)=-1-\frac{1}{e^2}$

On en déduit que :

$\forall\in]-\infty;0]$, $\begin{cases} g'(x)\le 0 \\ g'(2)=0 \Leftrightarrow x=0 \end{cases}$

Partie B

3) Ensemble de définition de f :

L'ensemble de définition de f est IR.

4) Démontrons que f est continue en 0 :

On a : $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}(xe^x-x)=0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(-2x+2x\ln x)=0 \end{cases}$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = f(0)$

Par suite, f est continue en 0.

5) a) Etude de la dérivabilité de f en 0 :

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}(e^x-1)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left[2(-1+\ln x)\right]=-\infty$

Donc f est dérivable à gauche en 0 de nombre dérivé 0 et f n'est pas dérivable à droite en 0 ; au total f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique

- La représentation graphique de f admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente définie par $\begin{cases} y=0 \\ x\le 0 \end{cases}$

- La représentation graphique de f admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente définie par $\begin{cases} x=0 \\ y\le 0 \end{cases}$

5) b) Calcul et signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$:

$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = 2\ln x$

d'où $\forall x \in]0;+\infty[,\ \begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{cases}$

6) Tableau de variation de f :

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{-\infty} g = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

$\forall x \in]-\infty;0[,\ f'(x) = g'(x)$ d'où d'après les résultats 2)c), 5)a) et b), on a :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	-		‖	-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↘		↘	-2	↗	$+\infty$

7) a) démontrons que φ est une bijection :

La fonction f est continue strictement croissante sur J donc la fonction

$\varphi : J \to f(J)$

$x \mapsto \varphi(x) = f(x)$

est une bijection.

b) Prouvons que la dérivée première $(\varphi^{-1})'$ de φ^{-1} est positive sur $\varphi(J) - \{\varphi(1)\}$

φ est dérivable et on a :

$\begin{cases} \forall x \in]1;+\infty[, \varphi'(x) > 0 \\ \varphi'(1) = 0 \end{cases}$

donc l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1} est $\varphi(J) - \{\varphi(1)\}$ et pour tout x élément de $\varphi(J) - \{\varphi(1)\}$, $(\varphi^{-1})'(x) > 0$.

Partie C

8) Justifions que la droite $(\Delta) : y = -x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (-x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

d'où la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$

9) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et conclusion :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} [2(-1+\ln x)] = +\infty$

donc (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

10) Construction de (C_f) et (C_h)

(Voir figure)

11) a) Démontrons que H est définie et continue sur J :

La fonction h est continue sur J car $h = -f$ et f est continue sur J et « $1 \in J$ » ; par conséquent la fonction

$H : x \mapsto \int_1^x h(t)dt$ est la primitive sur J de h s'annulant en 1 ; par suite H est définie et continue sur J.

b) Calcul de $H(e)$ et interprétation géométrique :

$H(e) = \int_1^e h(t)dt$ soit $H(e) = \int_1^e -f(t)dt$

$H(e) = \left[x^2(1-\ln x) + \dfrac{x^2}{2} \right]_1^e$

$H(e) = \dfrac{e^2 - 3}{2}$

$H(e) = \int_1^e -f(t)dt$ et $\forall t \in [1;e]$,

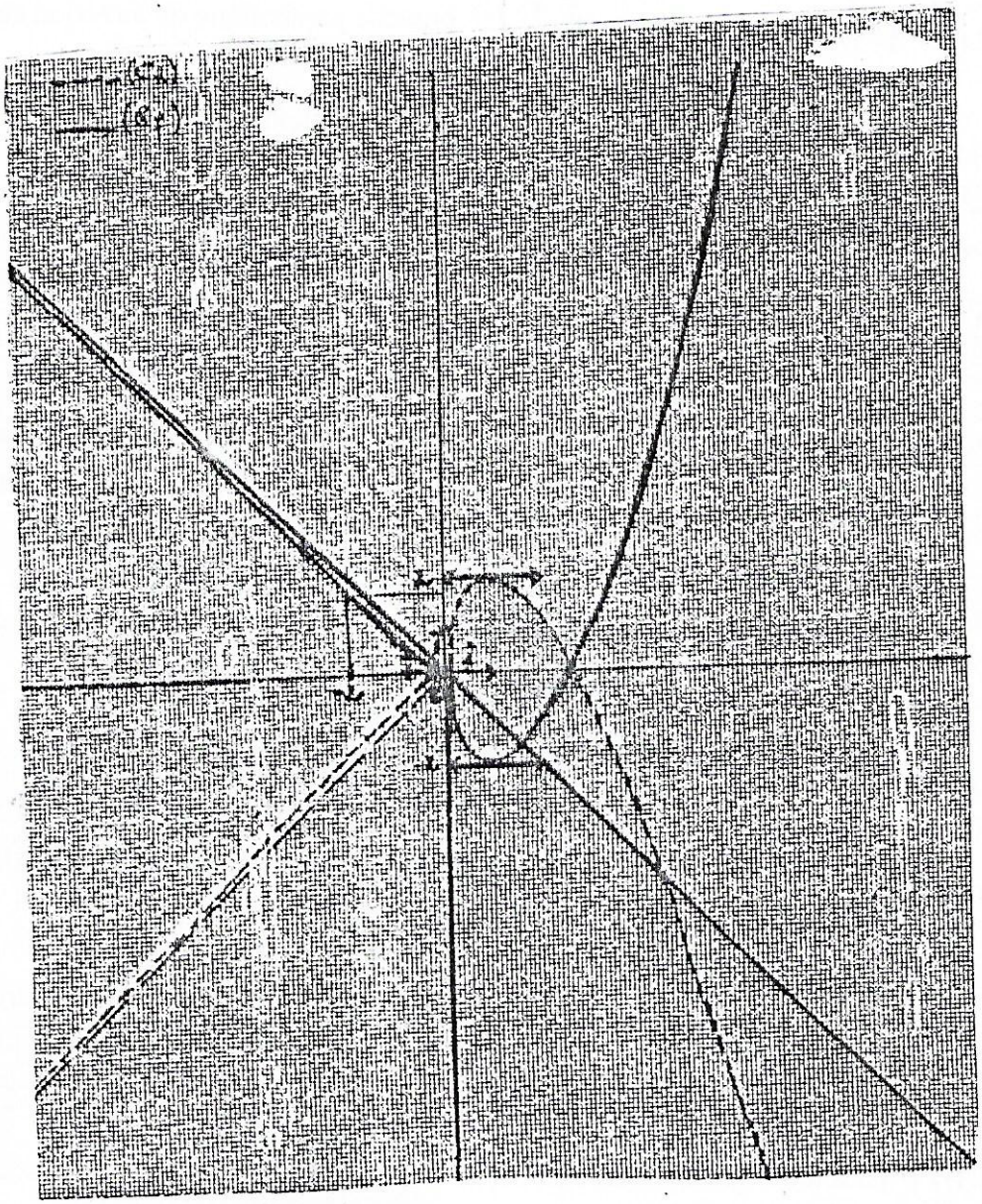
$-f(t) \geq 0$ donc H(e) est la mesure en unité d'aire de l'aire du domaine plan limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

c) Calcul de A

(C_f) et (C_h) étant symétriques par rapport à l'axe des abscisses, on a

$A = 2H(e)$ soit $A = (e^2 - 3)u.a$

$u.a$: unités d'aire.



SUJET 25

Exercice 1

1) Coordonnées de I et de J :

$I\begin{pmatrix} -2/5 \\ 7/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $J\begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2) Démontrons que (Δ) est une droite :

Soit $M \in \varepsilon$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MD} - 2\overrightarrow{MC}) = \vec{O}$

$\Leftrightarrow (5\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}) \wedge (-\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD} - 2\overrightarrow{JC}) = \vec{O}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MJ} = \vec{O}$

$\Leftrightarrow M \in (IJ)$

L'ensemble (Δ) est la droite (IJ)

3) Une représentation paramétrique de (Δ)

$(I, \overrightarrow{IJ})$ est un repère de (Δ).

$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{43}{5}; -\frac{32}{5}; 7\right)$

$$(\Delta): \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - \frac{43}{5}t \\ y = \frac{7}{5} - \frac{32}{5}t \\ z = 7t \end{cases} \quad (t \in IR)$$

4) a) Supposons $K \in (\Delta)$. On a :

$$\begin{cases} -2 = -\frac{2}{5} - \frac{43}{5}t \\ 0 = \frac{7}{5} - \frac{32}{5}t \\ 0 = 7t \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} t = \frac{8}{43} \\ t = \frac{7}{32} \\ t = 0 \end{cases} \text{ (absurde)}$$

donc $K \notin (\Delta)$

b) Distance de K à (Δ) :

$$d(K,\Delta) = \frac{\left\|\overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{IJ}\right\|}{\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|}$$

$\overrightarrow{KI}\left(\frac{8}{5}; \frac{7}{5}; 0\right)$ $\overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{IJ}\left(\frac{49}{5}; -\frac{56}{5}; \frac{9}{5}\right)$

$$d(K,\Delta) = \frac{\sqrt{5618}}{\sqrt{4098}}$$

$$d(K,\Delta) = \frac{53\sqrt{2049}}{2049}$$

c) Equation cartésienne de (P) :

Le vecteur $\vec{n} = 5\left(\overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{IJ}\right)$ est un vecteur normal à (P).

$(P): 49x - 56y + 9z + d = 0$

$K \in (P) \Leftrightarrow -98 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = 98$

$(P): 49x - 56y + 9z + 98 = 0$

5) a) Coordonnées de A' :

On a : $A'(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = \alpha\vec{n} \\ A' \in (P) \end{cases} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} x_0 = 49\alpha + 1 \\ y_0 = -56\alpha + 2 \\ z_0 = 9\alpha + 3 \\ 49x_0 - 56y_0 + 9z_0 + 98 = 0 \end{cases}$$

On trouve $\alpha = \frac{18}{2809}$ ce qui donne :

$A'\left(\frac{-1927}{2809}; \frac{4610}{2809}; \frac{8589}{2809}\right)$

b) Distance de A au plan (P) :

$$d(A,P) = \left\|\overrightarrow{AA'}\right\|$$

$$= \frac{18}{2809}\sqrt{49^2 + (-56)^2 + 9^2}$$

$$d(A,P) = \frac{18}{53}\sqrt{2}$$

Exercice 2

1) Calcul de $p(X = 0)$:

$(X = 0)$ est l'événement : « le joueur manque la cible ».

$p(X = 0) = 1 - 0{,}6$

$p(X = 0) = 0{,}4$

2) Expression de $p(X=i)$ en fonction de c et de i :

Sachant que la cible est atteinte, la probabilité d'atteindre la zone i est $\frac{c}{i}$.

Soit C l'événement « la cible est atteinte ».

On a $p(C)=0,6$.

La probabilité d'atteindre la zone i, sachant que la cible est atteinte, est une probabilité conditionnelle.

$$p_C(X=i)=\frac{p((X=i)\cap C)}{p(C)}$$

Pour $i\in\{1;2;5;10\}$, « $(X=i)\cap C$ » est l'événement « $X=i$ ». Donc

$$p(X=i)=p_C(X=i)\times p(C)$$

$$\underline{\underline{p(X=i)=\frac{c}{i}\times 0,6}}$$

3) Valeur numérique de $p(X=i)$:

Pour $i\in\{1;2;5;10\}$,

$$p(C)=p(X=1)+p(X=2)+p(X=5)+p(X=10)$$

$$0,6=0,6c\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)$$

$$1=\frac{c}{10}(10+5+2+1)=\frac{18c}{10}$$

$$\underline{\underline{c=\frac{5}{9}}}$$

D'où : $p(X=1)=\frac{1}{3}$

$$p(X=2)=\frac{1}{6}$$

$$p(X=5)=\frac{1}{15}$$

$$p(X=10)=\frac{1}{30}$$

4) Calcul de l'espérance mathématique $E(X)$ de X :

Sachant que $p(X=0)=0,4$ et que $E(X)=\sum x_i p(X=x_0)$, on a :

$$E(X)=0\times 0,4+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{15}+10\times\frac{1}{30}$$

$$\underline{\underline{E(X)=\frac{4}{3}}}$$

PROBLEME

Partie A

1) a) Démontrons que g_a est une similitude directe :

Sachant que $a\in IR^*$, on a :

$a(1+i)\in C-IR$, de plus $\frac{i}{3}\in C$.

Puisque l'écriture complexe de g_a est $z'=a(1+i)z+\frac{i}{3}$, g_a est une similitude plane directe.

Désignons respectivement par Ω, k et θ son centre, son rapport et son angle.

$$z_\Omega=\frac{i}{3(1-a(1+i))}$$

$$\underline{\underline{z_\Omega=\frac{-a+(1-a)i}{3((1-a)^2+a^2)}=\frac{-a+(1-a)i}{3(1-2a+2a^2)}}}$$

$$k=|a(1+i)|=|a|\sqrt{2}$$

* Si $a\in IR_-^*$

$k=-a\sqrt{2}$ et on prend $\theta=-\frac{3\pi}{4}$

* *Si* $a\in IR_+^*$

$k=a\sqrt{2}$ *et* on prend $\theta=\frac{\pi}{4}$

b) Valeurs de a pour lesquelles g_a est une rotation :

g_a est une rotation $\Leftrightarrow k=1$

g_a est une rotation $\Leftrightarrow |a|\sqrt{2}=1$

$\underline{g_a \text{ est une rotation}} \Leftrightarrow \underline{\underline{a=\frac{\sqrt{2}}{2}}}$ ou $\underline{\underline{a=\frac{-\sqrt{2}}{2}}}$

c) Expression de x', y' en fonction de x et y :

On a :

$$x'+iy'=a(1+i)(x+iy)+\frac{i}{3}$$

$$x'+iy'=(ax-ay)+i\left(ax+ay+\frac{1}{3}\right)$$

d'où

$$\begin{cases} x' = a(x-y) \\ y' = a(x+y) + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

2) a) Coordonnées de A'
D'après 1) c) on a :

$$\begin{cases} x_{A'} = a\left(\dfrac{3-e^a}{6} - \dfrac{-3-e^a}{6}\right) \\ y_{A'} = a\left(\dfrac{3-e^a}{6} + \dfrac{-3-e^a}{6}\right) + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

soit

$$A'\left(a; \frac{1}{3}(1-ae^a)\right)$$

b) Soit $a \in IR^*$, d'après 2) a) et en posant $A'(x,y)$ on a

$$\begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{1}{3}(1-ae^a) \end{cases}$$ ce qui donne

$y = \dfrac{1-xe^x}{3}$ d'où l'ensemble des points A', lorsque a décrit IR^*, est la courbe (Γ) d'équation $y = \dfrac{1-xe^x}{3}$.

Partie B

$$f(x) = \frac{1-|x|}{3} e^{|x|}$$

3) a) Continuité de f en 0 :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1+x}{3} e^{-x} \ \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{1-x}{3} e^{x} \ \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$f(0) = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x}{3} e^{-x} = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-x}{3} e^{x} = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en 0

Dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)e^{-x}-1}{3x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-x}-1}{x} + e^{-x}\right)$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$

$f'_g(0) = 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)e^{x}-1}{3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\left(\frac{e^{x}-1}{x} - e^{x}\right)$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$

$f'_d(0) = 0$

f est donc dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$

b) Variation de f :

$D_f = IR$.

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x}{3} e^{-x} = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{3} e^{x} = -\infty$.

On sait que f est continue et dérivable en 0. Elle est aussi continue et dérivable sur IR_-^* puis sur IR_+^* comme produit de fonctions continues et dérivables.
On a :

$$\begin{cases} \forall x \in IR_-^*,\ f'(x) = \dfrac{-xe^{-x}}{3} \\ \forall x \in IR_+^*,\ f'(x) = \dfrac{-xe^{x}}{3} \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$	↘	$-\infty$

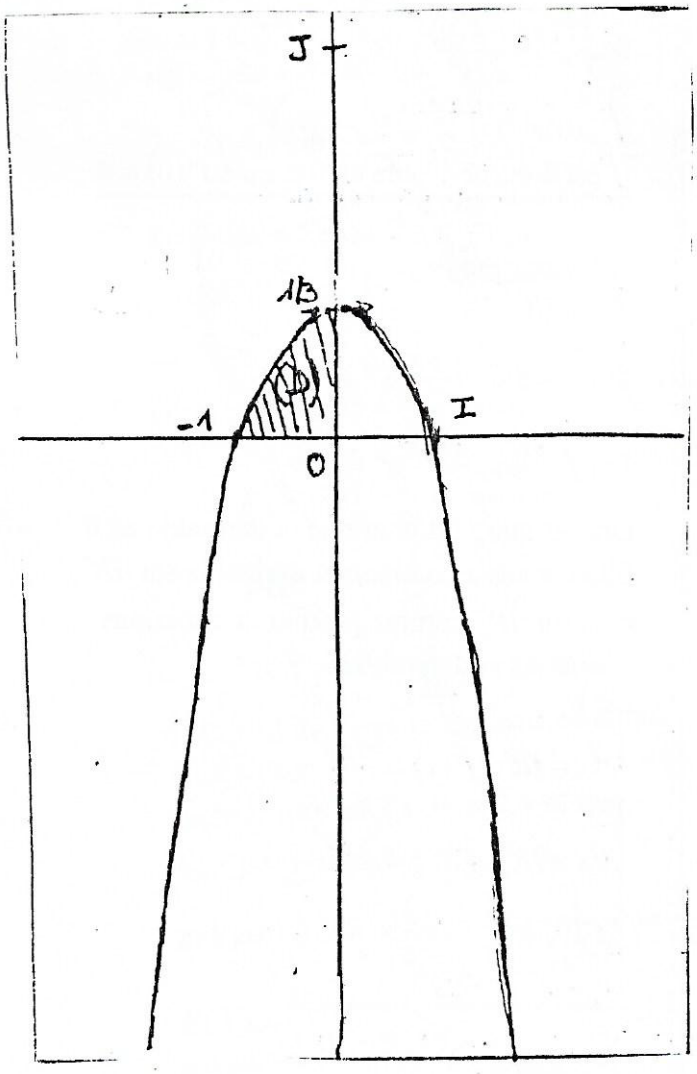
c) Tracé de (C) :

* Branches infinies :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x}{3x}e^{-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{3x}e^{x}=-\infty$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ puis au voisinage de $+\infty$.



4) a) Aire de (D) :

$A\left(\int_{-1}^{0}f(x)dx\right)\times u.a$

Soit $I=\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\dfrac{1+x}{3}e^{-x}dx$

Posons $u(x)=\dfrac{1+x}{3}$; on a $u'(x)=\dfrac{1}{3}$

et $v'(x)=e^{-x}$; on prendra $v(x)=-e^{-x}$

$I=\left[-\left(\dfrac{1+x}{3}\right)e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}\dfrac{e^{-x}}{3}dx$

$=\left[-\left(\dfrac{1+x}{3}\right)e^{-x}-\dfrac{1}{3}e^{-x}\right]_{-1}^{0}$

$=\left[-\left(\dfrac{2+x}{3}\right)e^{-x}\right]_{-1}^{0}$

$I=\dfrac{-2+e}{3}$

$u.a=1{,}5\times 6cm^2=9cm^2$

d'où $\underline{\underline{A=3(e-2)cm^2}}$

b) Calcul du volume v :

$v\left(\pi\int_{-1}^{0}(f(x))^2dx\right)u.a$

Soit

$J=\int_{-1}^{0}(f(x))^2dx=\dfrac{1}{9}\int_{-1}^{0}(1+2x+x^2)e^{-2x}dx$

Posons $r(x)=1+2x+x^2$, on a

$r'(x)=2(1+x)$ et $s'(x)=e^{-2x}$

on prendra $s(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

$J=\dfrac{1}{9}\left(\left[-\dfrac{(1+2x+x^2)}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}(1+x)e^{-2x}dx\right)$

$J'=\int_{-1}^{0}(1+x)e^{-2x}dx$

Posons $t(x)=1+x$; on a $t'(x)=1$

et $z'(x)=e^{-2x}$, on prendra $z(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$

$J'=\left[-\dfrac{(x+1)e^{-2x}}{2}\right]_{-1}^{0}+\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{0}e^{-2x}dx$

$J'=\left[-\left(\dfrac{x+1}{2}\right)e^{-2x}-\dfrac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$

Par suite on a :

$$J=\frac{1}{9}\left(\left[-\frac{(1+2x+x^2)e^{-2x}}{2}-\frac{(x+1)}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}\right)$$

$$J=\left[-\frac{(2x^2+6x+5)}{36}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$$

$$J=\frac{e^2-5}{36}$$

$u.a=1,5\times(6)^2=54cm^3$

d'où $\underline{\underline{v=\frac{3}{2}(e^2-5)\pi\, cm^3}}$

Partie C

5) D'après ses variations, f est continue et strictement décroissante sur IR_+ en particulier sur $[0;1]$. De plus $f(0)=\frac{1}{3}$ et $f(1)=0$ d'où $\underline{\underline{f([0;1])=\left[0;\frac{1}{3}\right]}}$

$f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$

Posons $h(x)=f(x)-x \quad \forall x\in[0;1]$

On a $\forall x\in[0;1] \quad h'(x)=f'(x)-1$

$$h'(x)=-\frac{(xe^x+3)}{3}$$

$h'(x)<0$ donc h est strictement croissante sur $[0;1]$. De plus elle est continue sur cet intervalle comme somme de fonctions continues.

On a $h(0)=\frac{1}{3}$ et $h(1)=-1$

$h(0)\times h(1)<0$ **donc l'équation** $h(x)=0$ **c'est-à-dire** $f(x)=x$ **admet une solution unique** α **dans** $[0;1]$

6)

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{3} \\ \forall n\in IN,\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrons que $\forall n\in IN,\ U_n\in[0;\frac{1}{3}]$.

- On a $U_0=\frac{1}{3}$ donc $U_0\in[0;\frac{1}{3}]$.

- Soit $n\in IN$. Supposons $U_n\in[0;\frac{1}{3}]$.

On a $U_{n+1}=f(U_n)$ donc $U_{n+1}\in f([0;\frac{1}{3}])$.

Or $[0;\frac{1}{3}]\subset[0;1]$ et f est strictement décroissante sur IR_+ donc $f([0;\frac{1}{3}])\subset f([0;1])$;

d'après 5) $f([0;1])=[0;\frac{1}{3}]$

d'où $U_{n+1}\in[0;\frac{1}{3}]$.

Par conséquent $\underline{\underline{\forall n\in IN,\ U_n\in[0;\frac{1}{3}]}}$

b) Démontrons que $u_1\le\alpha$:

On a $u_1=f(u_0)=f(\frac{1}{3})$

$\alpha\in[0;\frac{1}{3}]$ donc $\alpha\le\frac{1}{3}$

f étant strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ on a $f(\alpha)\ge f(\frac{1}{3})$

Puisque $f(\alpha)=\alpha$, on a :

$\underline{\underline{u_1\le\alpha}}$

Déduisons-en que $|u_1-\alpha|\le u_0-u_1\le 2,5.10^{-2}$:

D'après ce qui précède, on a

$u_1\le\alpha$ donc $-\alpha\le -u_1$

$u_0-\alpha\le u_0-u_1$ (a)

De plus $u_0-\alpha=\frac{1}{3}-\alpha$

$\alpha\in[0;\frac{1}{3}]\Rightarrow 0\le\alpha\le\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\le -\alpha\le 0$$

$$\Rightarrow 0\le\frac{1}{3}-\alpha\le\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 0\le u_0-\alpha\le\frac{1}{3}$$

Donc $u_0-\alpha\ge 0$ (b)

De (a) et (b) on a :

$|u_0-\alpha|\le u_0-u_1$ (c)

$u_0-u_1=\frac{1}{3}-f(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}e^{\frac{1}{3}}$

$u_0-u_1\cong 0,0232$ donc

$u_0-u_1\le 2,5.10^{-2}$ (d)

De (c) et (d) on a :

$|u_0 - \alpha| \leq u_0 - u_1 \leq 2{,}5.10^{-2}$

c) Démontrons par récurrence que
$\forall p \in IN, u_{2p+1} \leq \alpha \leq u_{2p}$:

- D'après 6)b), on a :

$u_1 \leq \alpha$ de plus $\alpha \leq \frac{1}{3}$; doit $\alpha \leq u_0$.

Ainsi on a :

$u_{2(0)+1} \leq \alpha \leq u_{2(0)}$. Soit $p \in IN$

- Supposons $u_{2p+1} \leq \alpha \leq u_{2p}$.

f étant strictement décroissante sur [0 ;1], on a :

$f(u_{2p+1}) \geq f(\alpha) \geq f(u_{2p})$

Soit $u_{2p+2} \geq \alpha \geq u_{2p+1}$

donc $f(u_{2p+2}) \leq f(\alpha) \leq f(u_{2p+1})$

Soit $u_{2p+3} \leq \alpha \leq u_{2p+2}$

donc $u_{2(p+1)+1} \leq \alpha \leq u_{2(p+1)}$, la proximité est vraie au rang $p+1$, par conséquent,

$\forall p \in IN,\ u_{2p+1} \leq \alpha \leq u_{2p}$

7) a) Démontrons que
$\forall x \in [0;\frac{1}{3}],\ -0{,}16 \leq f'(x) \leq 0$

Soit $x \in [0;\frac{1}{3}]$, on a :

$f'(x) = \frac{-xe^x}{3}$

$0 \leq x \leq \frac{1}{3}$

$1 \leq e^x \leq e^{1/3}$

$0 \leq xe^x \leq e^{1/3}$

$-\frac{1}{9}e^{1/3} \leq \frac{-xe^x}{3} \leq 0$

$-\frac{1}{9}e^{1/3} \leq f'(x) \leq 0$

Or $-\frac{1}{9}e^{1/3} \cong -0{,}155$ d'où

$\forall x \in [0;\frac{1}{3}],\ -0{,}16 \leq f'(x) \leq 0$

On en déduit que $|f'(x)| \leq 0{,}16\ \ \forall x \in [0;\frac{1}{3}]$.

D'après la propriété des inégalités des accroissements finis, on a :

$\forall x \in [0;\frac{1}{3}],\ |f(x) - f(\alpha)| \leq 0{,}16|x - \alpha|$

b) Démontrons que
$\forall n \in IN^* - \{1\},\ |U_n - \alpha| \leq (0{,}16)^n |U_0 - \alpha|$

D'après 7)a) et sachant que $f(\alpha) = \alpha$, on a : $\forall x \in [0;\frac{1}{3}],\ |f(x) - \alpha| \leq 0{,}16|x - \alpha|$.

Puisque $\forall n \in IN, U_n \in [0;\frac{1}{3}]$ et que $U_{n+1} = f(U_n)$, on a :

$|U_1 - \alpha| \leq 0{,}16|U_0 - \alpha|$

$|U_2 - \alpha| \leq 0{,}16|U_1 - \alpha|$

- - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - -

$|U_n - \alpha| \leq 0{,}16|U_{n-1} - \alpha|$

En multipliant membre à membre ces inégalités et après simplification on a :
$\forall n \in IN^* - \{1\},\ |U_n - \alpha| \leq (0{,}16)^n |U_0 - \alpha|$

Sachant que $0 < 0{,}16 < 1$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}16)^n |U_0 - \alpha| = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - \alpha) = 0$ par conséquent (U_n) converge vers α.

SUJET 26

Exercice 1

1) a) Soit P_2 la probabilité d'obtenir 2.

$P_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P_2 = \frac{1}{3}$

b) P' la probabilité d'obtenir 421 avec le dé A.

$P' = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$

2) P'' la probabilité d'obtenir 421 avec le dé B.

$$P''=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{54}$$

3) a) A = « le dé tiré est du type A »
B = « le dé tiré est du type B »
C = « obtenir 421 »

$C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ $\qquad A\cap B=\phi$

$$p(C)=p(A\cap C)+p(B\cap C)$$
$$=p(C/A)p(A)+p(C/B)p(B)$$
$$=\frac{1}{108}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{54}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{135}$$

b)

$$p(A/C)=\frac{p(A\cap C)}{p(C)}=\frac{p(C/A).p(A)}{p(C)}=\frac{1}{4}$$

Exercice 2

$a=\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)$

b) $b=\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)$

$c=\sqrt{2}(\cos 3\pi/4+i\sin 3\pi/4)$

c) $r(A)=B\Leftrightarrow r(0;\alpha)=r$

α est une mesure de

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=Arg(i)+2k\pi,k\in Z$

on prend $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

$z'=iz$ $\qquad z'_B=iz_B=i(1+i)=-1+i$

$r(B)=C$

d) $\Gamma'=C(J,1)$

2) a)

* $|z-1|=|1+ie^{i\theta}-1|=|-ie^{i\theta}|=1$

$\Rightarrow M\in(\Gamma)$ $\qquad I(1)$

* $z_{\overrightarrow{AM}}=(1+ie^{i\theta}-1+i)=i(1+e^{i\theta})$

$\theta\neq\pi\Rightarrow 1+ie^{i\theta}\neq 0\Rightarrow z_{\overrightarrow{AM}}\neq 0\Leftrightarrow A\neq M$

* $z_{\overrightarrow{BM}}=(1+ie^{i\theta}-1-i)=i(e^{i\theta}-1)$

$\theta\neq 0$ et $\theta\neq 2\pi\Rightarrow e^{i\theta}-1\neq 0\Rightarrow B\neq M$

b) $z'=iz$ $\qquad z=1+ie^{i\theta}$ $\qquad z'=i-e^{i\theta}$

$u=z_{\overrightarrow{BM}}=-i+ie^{i\theta}$

$u'=z_{\overrightarrow{BM'}}=z'-b$

$=iz-b$

$=i-e^{i\theta}-1-i$

$=-1-e^{i\theta}$

$u=-i+ie^{i\theta}$

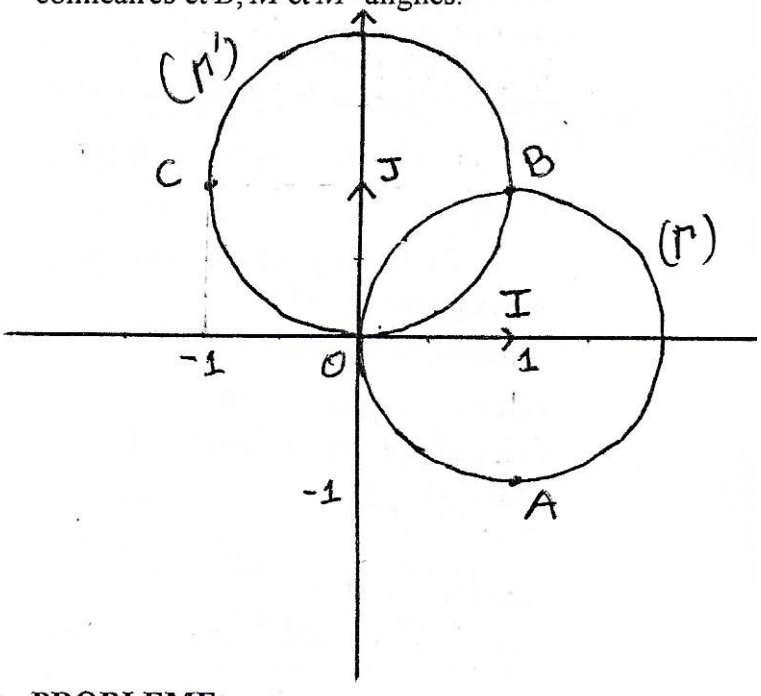
$u'=-1-e^{i\theta}$

c)

$$\frac{u}{u'}=\frac{-i+ie^{i\theta}}{-1-e^{i\theta}}=\frac{-ie^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{-i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{-i\theta}{2}}\right)}$$
$$=\frac{-i\times 2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}$$

$\dfrac{u}{u'}=\tan\dfrac{\theta}{2}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $u=\tan\dfrac{\theta}{2}\times u'$

d) $\dfrac{u}{u'}\in IR^*\Rightarrow \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires et B, M et M' alignés.



PROBLEME

$$f(x)=\begin{cases}xe^{1/x}+1 & \text{si } x<0\\ \ln(x+e) & x\geq 0\end{cases}$$

1- $D_f=IR$

2- a) Continuité et dérivabilité en 0 :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=1 \qquad f(0)=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=1$ d'où f est continue en 0 car

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=f(0)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{xe^{1/x}+1-1}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\<}} e^{1/x}=0$$

f est dérivable à gauche en 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{\ln(x+e)-\ln(e)}{x}=\frac{1}{e}$; f est dérivable à droite en 0.

$f'_g(0)\neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

b) $x\mapsto \frac{1}{x}$ continue et dérivable en tout point de IR^* en particulier sur $]-\infty;0[$.

$x\mapsto e^x$ continue et dérivable sur $]-\infty;0[$.

$x\mapsto e^{1/x}$ continue et dérivable sur $]-\infty;0[$.

$x\mapsto xe^{1/x}+1$ continue et dérivable comme produit et somme de fonction dérivable.

$x\mapsto \ln(x+e)$ continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ car

$x\mapsto x+e$ (polynôme) est continue dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$x+e>0\ \forall x\in]0;+\infty[$.

f est donc continue sur IR.

f est dérivable en tout point de IR^*

Voir 2-a).

c) $\begin{cases} y=1 \\ x\leq 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y=e^{-1}x+1 \\ x\geq 0 \end{cases}$

3- a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $f'(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}} \text{ pour } x<0 \\ \frac{1}{x+e} \quad \text{pour} \quad x>0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$0\ \|\|$	e^{-1}	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\|\|$	↗	$+\infty$

4- a) f est continue et strictement croissante sur IR ; elle est une bijection de IR sur $f(IR)=IR$; elle admet donc une bijection réciproque f^{-1} définie de IR vers IR.

b)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$		$+$			
$f^{-1}(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

c) f est continue strictement croissante sur IR :

$f(IR)=IR$; $0\in IR$; il existe un unique $a\in IR$, $f(a)=0$

$f(-2)\times f(-1)<0 \Leftrightarrow a\in]-2;-1[$

$f(a)=0\Rightarrow f^{-1}(0)=a$

$a\neq 1 \qquad f'(a)\neq 0$

$f(a)=0$; $ae^{\frac{1}{a}}+1=0$

$$e^{\frac{1}{a}}=\frac{-1}{a}$$

d) $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}$

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{\frac{a-1}{a}e^{\frac{1}{a}}}$$

$$=\frac{1}{\frac{a-1}{a}\times-\frac{1}{a}}=\frac{a^2}{1-a}$$

$$5)\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}+1-x-2\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1=0$$

Donc $\Delta: y=x+2$ est asymptote oblique à la courbe en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x}\right)$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

Branche parabolique de direction celle de (O,I) au voisinage $+\infty$.

6- Voir la représentation graphique :

7- a)

$$\lim_{x\to0}\left(\ln(x+e)-x\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln(x+e)}{x}-1\right)=-\infty$$

b) $\forall x\in[0;+\infty[,\quad g'(x)=\frac{1}{x+e}-1$

c) $g'(x)=\frac{-x-e+1}{x+e}$

$x+e=0\Rightarrow x=-e$

$-x-e+1=0\Rightarrow -x=e-1$

$\Rightarrow x=1-e$

$\forall x\in]0;+\infty[,\quad g'(x)<0$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	1 ↘	$-\infty$

d) g continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. g est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $f(]0;+\infty[)=]-\infty;1[$.

$0\in]-\infty;1[$, alors il existe unique $b\in]0;+\infty[$ tel que $f(b)=0$

$g(1)\times g(2)<0,\quad b\in]1;2[$

e) $g(1)=\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)$

$g(2)=\ln\left(1+\frac{2}{e}\right)$-1

g est continue et strictement décroissante sur $]1;2[$

$g(K)=]g(2);g(1)[$

$1<g(2)$ et $g(1)<2$

d'où $g(K)\subset K$

$$8)S(b)=(1ua\times\int_0^b f(x)dx)$$

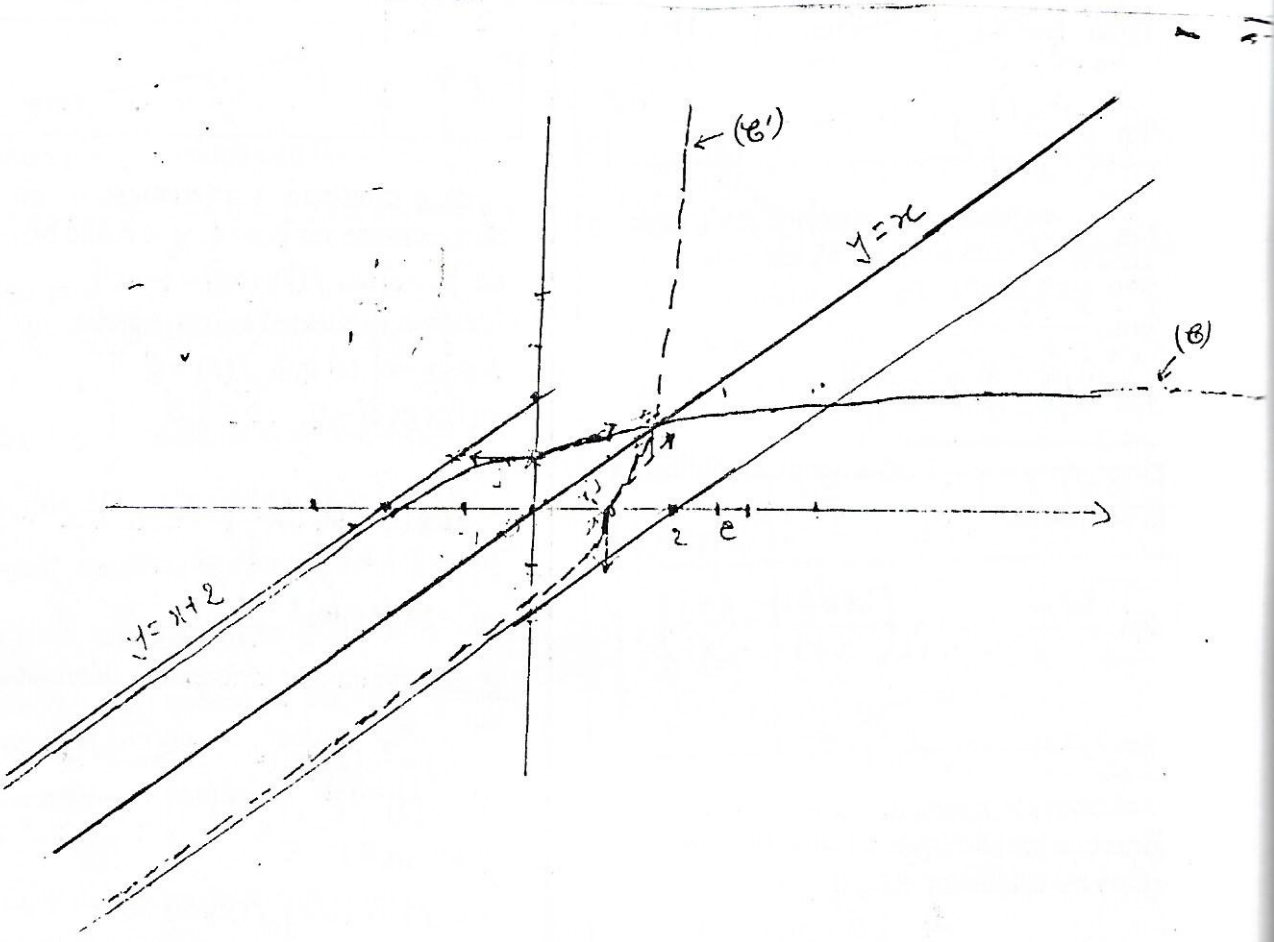
$$=\left(\int_0^b\ln(e+x)dx\right)u.a$$

$$=[x\ln(x+2)]_0^b-\int_0^b\frac{x}{x+e}dx$$

$$=b\ln(b+2)-b+e\ln(b+2)-e$$

$$S(b)=(b+e)[\ln(b+e)-1]u.a$$

$$S(b)=(b+e)(b-1)ua$$



—— (C)

- - - - (C')

SUJET 28

Exercice 1

1- $(E) : z^3 - (2+3i)z^2 + 2(-1+2i)z + 2 = 0$

a) Montrons que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à préciser :

Posons $z_0 = \alpha i$ avec $\alpha \in IR^*$

z_0 solution de $(E) \Leftrightarrow$

$(\alpha i)^3 - (2+3i)(\alpha i)^2 + 2(-1+2i)(\alpha i) + 2 = 0$

$-\alpha^3 i + 2\alpha^2 + 3\alpha^2 i - 2\alpha i - 4\alpha + 2 = 0$

$2\alpha^2 - 4\alpha + 2 + i(-\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha) = 0$

$\begin{cases} 2\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0 \\ -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2(\alpha-1)^2 = 0 \\ -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha = 0 \end{cases}$

$\underline{\underline{\alpha = 1}}$

D'où $\underline{\underline{z_0 = i}}$ est solution imaginaire pure de (E).

b) Résolvons (E) :

$z_0 = i$ étant une solution de (E), par la division euclidienne on a :

$z^3 - (2+3i)z^2 + 2(-1+2i)z + 2 =$

$(z-i)[z^2 - (2+2i)z + 2i]$

Ainsi $(E) \Leftrightarrow (z-i)[z^2 - (2+2i)z + 2i] = 0$

$\Leftrightarrow z - i = 0$ ou $z^2 - (2+2i)z + 2i = 0$

$z - i = 0 \Leftrightarrow z = i$

Posons $z^2 - (2+2i)z + 2i = 0$ (1)

Soit Δ le discriminant :

$\Delta = (2+2i)^2 - 4 \times 2i = 8i - 8i = 0$

$\Delta = 0$ donc (1) admet une racine double

$z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ d'où l'ensemble des solutions de (E) dans C est :

$\underline{\underline{S_C = \{i ; 1+i\}}}$

2- $A(1+i)$ et $B(i)$

a) Nature et les éléments caractéristiques de r :

r a pour écriture complexe

$z' = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

et $\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2} \neq 1$ donc r est une rotation.

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2} = 1\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$-\dfrac{\pi}{3}$ est un argument ; donc $-\dfrac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle de la rotation r.

Soit Ω le point d'affixe w avec

$w = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{1 - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = i$

Ainsi la nature de r est une rotation et ses éléments caractéristiques sont :

- Angle : $-\dfrac{\pi}{3}$
- Centre : B d'affixe i

b) Déterminons les affixes des points $M / AM = BM = 1$:

Soit $z = x + iy$; $x \in IR$, $y \in IR$ l'affixe du point M.

$z - z_A = (x-1) + i(y-1)$

$z - z_B = x + i(y-1)$

$|z - z_A| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

$|z - z_A| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

$AM = BM = 1 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\ \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y-1)^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = x^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 - x^2 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(-1) = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ (y-1)^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

D'où les affixes des points M sont :

$\underline{\underline{\frac{1}{2} + i\frac{(2+\sqrt{3})}{2}}}$ et $\underline{\underline{\frac{1}{2} + i\frac{(2-\sqrt{3})}{2}}}$

c) $C\left(\frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})\right)$; $r(C) = N$ *

Déterminons l'affixe de N :

$$z_N = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})\right] - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\underline{\underline{z_N = -\frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})}}$$

* Une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN})$

r est la rotation de centre B et $r(C) = N$

donc $mes(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}) = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$

d'où une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN})$ est $\frac{-\pi}{3}$.

Autre méthode :

$$\frac{z_N - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$= e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i(2\pi - \frac{\pi}{3})} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Un argument de $\frac{z_N - z_B}{z_C - z_B}$ est $\frac{-\pi}{3}$ d'où une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN})$ est $-\pi/3$ (ou $5\pi/3$).

3) h est l'homothétie de centre B et de rapport 2 et $g = hor$

a) Déterminons l'écriture complexe de g :

h étant l'homothétie de centre B et de rapport 2 et r la rotation de centre B et d'angle de mesure $-\pi/3$, alors $g = hor$ est la similitude de centre B, d'angle de mesure $-\pi/3$ et de rapport 2.

L'écriture complexe de g est alors :

$z' = az + b$ avec :

$a = 2\left[\cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3})\right]$

$a = 1 - i\sqrt{3}$

et $\frac{b}{1-a} = z_B$ soit $b = (1-a)z_B$

$b = i\sqrt{3}(i) = -\sqrt{3}$

D'où $\underline{\underline{z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3}}}$ est l'écriture complexe de g.

b) Déterminons le module et un argument de $u = \frac{g(z) - i}{z - i}$ avec $z \neq i$

$u = \frac{g(B) - z_B}{z - z_B}$

Soit M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $z' = g(z)$. M' est donc l'image de M par la similitude g de centre B, de rapport 2 et d'angle $-\pi/3$; donc

$$\begin{cases} BM' = 2BM \\ mes(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \\ k \in Z \end{cases}$$

$$|u| = \left|\frac{g(z) - i}{z - i}\right|$$

$$= \frac{|g(z) - i|}{|z - i|}$$

$$= \frac{|z_{M'} - z_B|}{|z_M - z_B|}$$

$$= \frac{BM'}{BM} = \frac{2BM}{BM} = 2$$

D'où $\underline{|u|=2}$

$\arg u = \arg\dfrac{g(z)-i}{z-i}$

$\arg u = \arg\left(\dfrac{z_{M'}-z_B}{z_M-z_B}\right)$

$= mes\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)$

$= \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in$

D'où un argument de u est $\underline{\dfrac{-\pi}{3}}$.

c) Ecrivons u^{2003} sous forme algébrique :

$u = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$

$u^{2003} = 2^{2003}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]^{2003}$

$= 2^{2003}\left[\cos\left(-2003\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-2003\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 2^{2003}\left[\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)\right]$

$u^{2003} = 2^{2003}\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\underline{u^{2003} = -2^{2002} + 2^{2002}i\sqrt{3}}$

Exercice 2

$I = \int_0^{\pi}\left[(2x+1)\cos^2 3x\right]dx$ et

$J = \int_0^{\pi}\left[(2x+1)\sin^2 3x\right]dx$

1- Calculons $I+J$:

$I+J = \int_0^{\pi}\left[(2x+1)\cos^2 3x + (2x+1)\sin^2 3x\right]dx$

$= \int_0^{\pi}(2x+1)\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right)dx$

$= \int_0^{\pi}(2x+1)dx$

$= \left[x^2+x\right]_0^{\pi} = \pi^2+\pi$

$\underline{I+J = \pi^2+\pi}$

2-

$I-J = \int_0^{\pi}\left[(2x+1)\cos^2 3x - (2x+1)\sin^2 3x\right]dx$

$= \int_0^{\pi}(2x+1)\left(\cos^2 3x - \sin^2 3x\right)dx$

$= \int_0^{\pi}(2x+1)\cos 6x\,dx$

Posons $u(x) = 2x+1;\ u'(x) = 2$

$v'(x) = \cos 6x;\ v(x)\dfrac{1}{6}\sin 6x$

$I-J = \left[(2x+1)\frac{1}{6}\sin 6x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{3}\sin 6x\,dx$

$= 0 - \left[\frac{-1}{18}\cos 6x\right]_0^{\pi} = 0$

$\underline{I-J=0}$

3- Déduisons I et J :

$\begin{cases} I+J = \pi^2+\pi \\ I-J = 0 \end{cases}$

$2I = \pi^2+\pi$ d'où $\underline{I = \dfrac{\pi^2+\pi}{2}}$

$\underline{J = I = \dfrac{\pi^2+\pi}{2}}$

Exercice 3

$f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}\ln(x-1)$

1) $g(x) = x\left[1-\ln(x-1)\right]+\ln(x-1)$

Etudions les variations de g :

* Ensemble de définition D_g de g :

$D_g = \{x \in IR,\ x-1>0\}$

$\underline{D_g =]1;+\infty[}$

* Limites aux bornes de D_g :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} x\left[1-\ln(x-1)\right]+\ln(x-1)$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[x - x\ln(x-1)+\ln(x-1)\right]$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[x-(x-1)\ln(x-1)\right] = 1$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(x-1)\ln(x-1) = \lim\limits_{x\to 0^+} X\ln X = 0$

$(X = x-1)$

d'où $\underline{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x) = 1}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [x-(x-1)\ln(x-1)]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[1-\frac{(x-1)}{x}\ln(x-1)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-(x-1)}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-(x-1)}{x}\ln(x-1) = -\infty$$

* Dérivée :

$x \mapsto x$ est dérivable sur $D_g =]1;+\infty[$ car dérivable sur IR comme fonction polynôme.

$x \mapsto \ln(x-1)$ est dérivable sur $D_g =]1;+\infty[$ car $x \mapsto x-1$ est dérivable sur IR donc sur $]1;+\infty[$ comme fonction polynôme et $\forall x \in]1;+\infty[,\ x-1>0$.

Alors $g : x \mapsto x[1-\ln(x-1)]+\ln(x-1)]$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur D_g.

$\forall x \in D_g$,

$$g'(x) = 1-\ln(x-1)+x\times\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}$$

$$= -\ln(x-1)$$

$$\underline{g'(x) = -\ln(x-1)} \quad \forall x \in D_g$$

* Sens de variation de g :

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	

$\forall x \in]1;2[,\ g'(x) > 0$

$\forall x \in]2;+\infty[,\ g'(x) < 0$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

D'où g est strictement croissante sur $]1;2]$ et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.

* Tableau de variation :

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

2- Prouvons que $g(x) = 0$ admet une solution β unique et que l'on a $4,5 < \beta < 4,6$:

g est continue et strictement croissante sur $]1;2]$ donc $g(]1;2]) = \left]\lim_{x\to1} g(x); g(2)\right]$

$=]1;2]$

donc $\forall x \in]1;2], 1 < g(x) < 2$

donc $\forall x \in]1;2],\ g(x) \neq 0$. Alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]1;2]$. (1)

g est continue et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$ donc g réalise un bijection de $[2;+\infty[$ sur $g([2;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x); g(2)\right]$

$=]-\infty;2]$

Or $0 \in]-\infty;2]$ donc il existe un unique $\beta \in [2;+\infty[$ tel que $g(\beta) = 0$. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans $[2;+\infty[$ (2)

De (1) et (2), l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β.

De plus

$$\begin{cases} [4,5\ ;\ 4,6] \subset [2;+\infty[\\ g(4,5) \cong 0,12 > 0 \\ g(4,6) \cong -0,01 < 0 \end{cases}$$

$g(4,5)g(4,5) < 0$

D'où $\underline{4,5 < \beta < 4,6}$

Tchinkcyr

3- Signe de g sur D_g :

D'après les résultats précédents,

$$\begin{cases} \forall x \in]1;\beta[, \quad g(x) > 0 \quad \text{et} \\ \forall x \in]\beta;+\infty[, \quad g(x) < 0 \\ g(\beta) = 0 \end{cases}$$

4- a) Relation entre $f'(x)$ et $g(x)$

$x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x-1)$ sont dérivables sur $]1;+\infty[$ et $x \neq 0 \ \forall x \in]1;+\infty[$. Donc $x \mapsto \dfrac{\ln(x-1)}{x}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$.

D'où $f : x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x}\ln(x-1)$ est dérivable sur $D_f = D_g =]1;+\infty[$.

$\forall x \in]1;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\ln(x-1) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{x + (1-x)\ln(x-1)}{x(x-1)}\right]$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x-1)} \quad \forall x \in]1;+\infty[$$

b) Limites aux bornes de D_f :

$* \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left[2 + \frac{1}{x}\ln(x-1)\right] = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$

$$* \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[2 + \frac{(x-1)}{x}\frac{\ln(x-1)}{x-1}\right]$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0 \end{cases}$

c) Tableau de variation de f :

$\forall x \in]1;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(x-1)}$

$x - 1 > 0$ et $x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

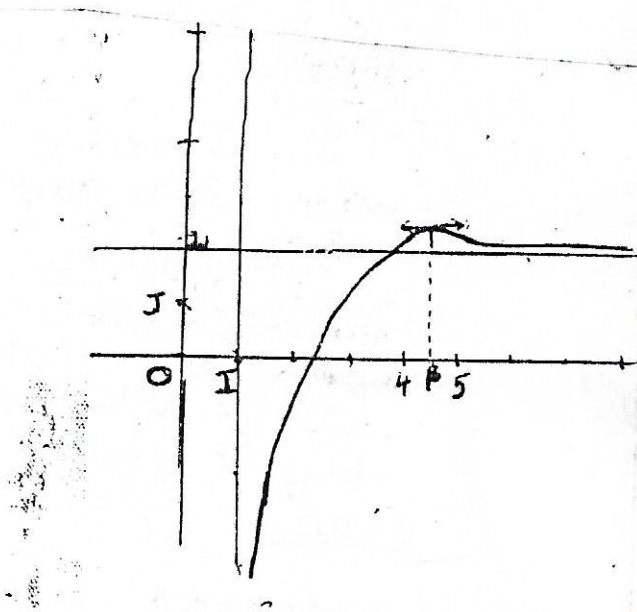
x	1		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	
f	‖	↗	$f(\beta)$	↘	2
	‖	$+\infty$			

5- a) Etudions les branches infinies de (C) :

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Construisons (C) :



6- $I = \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x}dx$; $J = \int_2^3 \ln(x-1)dx$

a) Interprétation géométrique :

$x \mapsto f(x) - 2$ est continue sur $[2;3]$ et $\forall x \in [2;3], \ f(x) - 2 \geq 0$

$$I = \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x}dx = \int_2^3 (f(x) - 2)dx$$

D'où I est l'aire, en unité d'aire, du domaine plan délimité par (C) et les droites d'équations respectives :

$y = 2$; $x = 2$ et $x = 3$.

b) Prouvons que $\frac{1}{3}J \le I \le \frac{1}{2}J$:

Pour $x \in [2;3]$ on a :

$2 \le x \le 3$

$1 \le x-1 \le 2$

$0 \le \ln(x-1) \le \ln 2$

Et $\ln(x-1) \ge 0$.

On a aussi : $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{2}$

Alors $\frac{1}{3}\ln(x-1) \le \frac{\ln(x-1)}{x} \le \frac{1}{2}\ln(x-1)$

donc

$\frac{1}{3}\int_2^3 \ln(x-1)dx \le \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x}dx \le \frac{1}{2}\int_2^3 \ln(x-1)dx$

D'où $\underline{\underline{\frac{1}{3}J \le I \le \frac{1}{2}J}}$

c) Calcul de J :

$J = \int_2^3 \ln(x-1)dx$

Posons $u(x) = \ln(x-1)$; $u'(x) = \frac{1}{x-1}$

$v'(x) = 1$; $v(x) = x$

$J = [x\ln(x-1)]_2^3 - \int_2^3 \frac{x}{x-1}dx$

$= [x\ln(x-1)]_2^3 - \int_2^3 \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]dx$

$= [x\ln(x-1)]_2^3 - [x + \ln|x-1|]_2^3$

$\underline{\underline{J = 2\ln 2 - 1}}$

Encadrement de I :

$\frac{1}{3}J \le I \le \frac{1}{2}J$ et $J = 2\ln 2 - 1$

D'où $\underline{\underline{\frac{2\ln 2 - 1}{3} \le I \le \frac{2\ln 2 - 1}{2}}}$

SUJET 29

Exercice 1

$(E_1) : z^3 - 8 = 0$

1- Résolution de (E_1) :

$z^3 - 8 = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$

$z^2 + 2z + 4 = 0$

$\Delta' = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$z_1 = -1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

$S_C = \{2; -1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\}$

2- $u = z - 2$

$(E_2) : z^3 - 6z^2 + 12z - 16 = 0$

u solution de (E_1)

$\Leftrightarrow u^3 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (z-2)^3 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - 6z^2 + 12z - 8 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - 6z^2 + 12z - 16 = 0$

$\Leftrightarrow z$ solution de (E_2)

b) Résolvons (E_2) :

z solution de $(E_2) \Leftrightarrow z = u + 2$ avec u solution de (E_1).

Si $u = 2$ alors $z = 4$

Si $u = -1 + i\sqrt{3}$ alors $z = 1 + i\sqrt{3}$

Si $u = -1 - i\sqrt{3}$ alors $z = 1 - i\sqrt{3}$

$S_C = \{4; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$

3-

a) $z_A = 1 - i\sqrt{3}$; $z_B = 1 + i\sqrt{3}$; $z_C = -i\sqrt{3}$

b) Nature du triangle ABC :

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -2i\sqrt{3}$

Donc ABC est rectangle en A.

c) Affixe de D pour que ABD soit équilatéral direct :

ABD équilatéral direct donc :

$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ soit $z_D = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A$

$z_D = -2$

T inkcyr

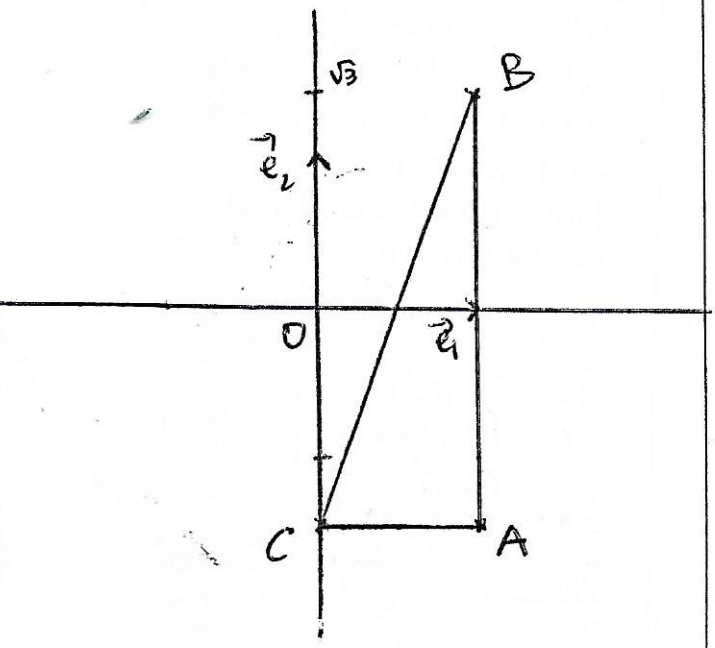
4- $f : z = \left(-2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z' + 1 - i$

$f : z' = -\dfrac{1}{2e^{i\frac{\pi}{12}}}(z - 1 + i)$

$= -\dfrac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}z + \dfrac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} + \dfrac{i}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$z' = az + b$

$|a| = \dfrac{1}{2}$ donc f est la similitude plane directe de rapport $\dfrac{1}{2}$, d'angle $\dfrac{11\pi}{12}$ et de centre W d'affixe $z_0 = \dfrac{\frac{1}{2}(-1+i)e^{i\frac{11\pi}{12}}}{1-\frac{1}{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}}$



Exercice 2

1- a) Vérifions que A, B, C et D ne sont pas coplanaires :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = -8 \neq 0$ donc les points A, B, C, et D ne sont pas coplanaires.

$V_{(ABCD)} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right| uv = \dfrac{4}{3}uv$

b) Equation du plan (P)

plan médiateur de $[AB]$

$\overrightarrow{AB}$ vecteur normal à (P)

Donc $(P) : \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$ $I\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$

D'où $(P) : x - y - 2z - 11 = 0$

2- $(\Delta) \perp (P)$ et $C \in (\Delta)$

a) Représentation paramétrique de (Δ) :

Un vecteur directeur de (Δ) est :

$\vec{u}(1,-1,-2)$ d'où

$$(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases} \qquad t \in IR$$

b) Coordonnées de H :

$$\begin{cases} H \in (\Delta) \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \\ z = -2t + 2 \\ x - y - 2z - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{8}{3} \\ x = \frac{8}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

$H\left(\dfrac{8}{3};-\dfrac{5}{3};-\dfrac{10}{3}\right)$

c) Déduisons la distance du point C à la droite (P) :

$d(C,P) = CH = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2}$

$= \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$

3- a)

$\forall M \in E,\ 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$

$M \in (\Delta') \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MD}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} \wedge \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\right) = \vec{O}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{DA} = \vec{O}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{DA}$ colinéaires

(Δ') est la droite passant par G et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{DA}$.

$G\begin{pmatrix}\frac{2x_A + x_B - x_C}{2}\\ \frac{2y_A + y_B - y_C}{2}\\ \frac{2z_A + z_B - z_C}{2}\end{pmatrix}$ donc $G\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{9}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$

D'où une représentation paramétrique de (Δ') :

$$(\Delta'):\begin{cases} x=-t+\frac{5}{2} \\ y=3t-\frac{9}{2} \\ z=t-\frac{9}{2} \end{cases} \quad t\in IR$$

b) Déterminons $(\Delta)\wedge(\Delta')$:

$$\begin{cases} t=-\alpha+\frac{5}{2} \\ -t+1=3\alpha-\frac{9}{2} \\ -2t+2=\alpha-\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{3}{2} \\ t=1 \\ \alpha=\frac{9}{2} \end{cases}$$

absurde

$(\Delta)\wedge(\Delta')=\phi$ (a)

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=10\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ donc (Δ) et (Δ') ne sont pas parallèles. (b)

De (a) et (b) on déduit que (Δ) et (Δ') ne sont pas coplanaires.

PROBLEME

Partie A

$(E): y''-y'(-4x-2)e^{-x}$

$(E'): y''-y=0$

1- Démontrons que φ_0 est solution de E :

$\varphi_0'(x)=e^x+(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x)e^{-x}$

$=e^x+(2-x^2)e^{-x}$

$\varphi_0''(x)=e^x+2xe^{-x}-(2-x^2)e^{-x}$

$=e^x-(2+2x-x^2)e^{-x}$

$\forall x IR,\ \varphi_0''(x)-\varphi_0(x)=(-2-4x)e^{-x}$ d'où φ_0 est solution de (E).

2- a) Démontrons que φ est solution de $(E) \Leftrightarrow \varphi-\varphi_0$ est solution de (E')

Soit φ une solution de (E).

$(\varphi-\varphi_0)''=\varphi''-\varphi_0''$; on a donc :

$(\varphi-\varphi_0)''-(\varphi-\varphi_0)=\varphi''-\varphi-(\varphi''-\varphi_0)$

Et $x\in IR$, on a :

$(\varphi-\varphi_0)''(x)-(\varphi-\varphi_0)(x)=$

$\varphi''(x)-\varphi(x)-(\varphi_0''(x)-\varphi_0(x))$

(or φ solution de (E))

$=(-4x-2)e^{-x}-(-4x-2)e^{-x}=0$

$\Leftrightarrow \varphi-\varphi_0$ solution de (E')

et donc φ solution de (E) $\Leftrightarrow \varphi-\varphi_0$ solution de (E')

b) Solution de (E') :

$y''-y=0 \Leftrightarrow y=Ae^x+Be^{-x};\ (A,B)\in IR^2$

et alors

$\varphi(x)-\varphi_0(x)=Ae^x+Be^{-x}\ ;\ (A,B)\in IR^2$

$\Leftrightarrow \varphi(x)=Ae^x+Be^{-x}+e^x+(x^2+2x)e^{-x}$

$(A,B)\in IR^2$

3- Déterminons φ_1 :

$\varphi_1(0)=1$ et $\varphi_1'(1)=0$

$\varphi_1'(x)=(A+1)e^x+(2-B-x^2)e^x$

$\varphi_1'(1)=(A+1)e+(1-B)e^{-1}=0$

$\varphi_1(0)=A+B+1=1$

donc $A+B=0$ soit $A=-B$

$(A+1)e+(A+1)e^{-1}=0$

$\Leftrightarrow (A+1)(e+e^{-1})=0$

$\Leftrightarrow A=-1$

$A=-1$ et $B=1$

$\varphi_1(x)=(x^2+2x+1)e^{-x}$

$\varphi_1(x)=(x+1)^2e^{-x}$

Partie B

$g(x)=(x+1)^2e^{-x}$

4- a) $D_g=IR$; g est dérivable sur IR et

$\forall x\in IR,\ g'(x)=(1-x^2)e^{-x}$

$\forall x\in\ ]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$, $g'(x)<0$ alors g est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-2[$ et $]1;+\infty[$ et g est croissante sur $]-1;1[$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{-\infty}(x+1)^2=+\infty \\ \lim\limits_{-\infty}e^{-x}=+\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{+\infty} g(x)=0$

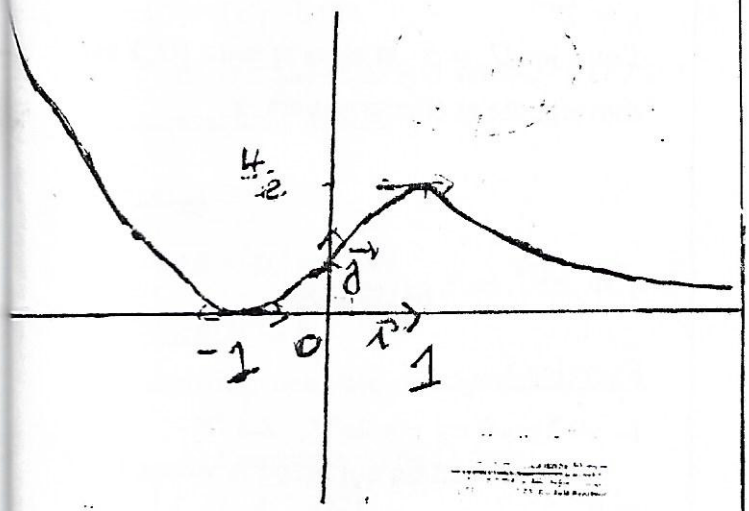
car $\lim\limits_{+\infty} x^2e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{+\infty}(1+\frac{1}{x})^2=1$

Tchinkcyr

c) Etudions les branches infinies de (C) :
$\lim\limits_{+\infty} g(x) = 0$ donc (C) a la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 xe^{-x} = -\infty$ donc la courbe (C) a une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘ 0



5- a) Démontrons que $g(x) = 2$
* g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$ donc g réalise une bijection de $]-\infty;-1]$ sur $[0;+\infty[$.
Comme $2 \in [0;+\infty[$, alors l'équation $g(x) = 2$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty;-1]$.

* Le maximum de g sur $]-1;+\infty[$ est $\frac{4}{e}$ or $\frac{4}{e} < \alpha$
donc l'équation $g(x) = 2$ n'a pas de solution dans $]-1;+\infty[$.
De plus $g(-2) = e^2$
$g([-2;-1]) = [0;e^2]$
$2 \in [0;e^2]$
$[-2;-1] \subset]-\infty;-1]$
d'où $\alpha \in [-2;-1]$
soit $-2 \le \alpha \le -1$

b) Démontrons que α vérifie :
$\alpha = 1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$:
$\alpha \in]-\infty;-1]$ donc $\alpha < -1$ soit $\alpha + 1 < 0$
$g(\alpha) = 2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2$
$\Leftrightarrow (\alpha+1)^2 = 2e^{\alpha}$
$\Leftrightarrow \alpha + 1 = -\sqrt{2e^{\alpha}} = -\sqrt{2}\,e^{\frac{\alpha}{2}}$
$\Leftrightarrow \alpha = -1 - \sqrt{2}\,e^{\frac{\alpha}{2}}$
d'où $\alpha = -1 - \sqrt{2}\,e^{\frac{\alpha}{2}}$

Partie C

$K = [-2;-1]$; $f(x) = -1 - \sqrt{2}\,e^{\frac{x}{2}}$

6- a) Sens de variation de f sur K :
$f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{x}{2}}$ donc f est décroissante sur $[-2;-1]$ alors
$\forall x \in [-2;-1]$, $f(-1) \le f(x) \le f(-2)$
$\Leftrightarrow \forall x \in [-2;-1]$,
$-1 - \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}} \le f(x) \le -1 - \sqrt{2}\,e^{-1}$
$-1 - \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}} = -1 - \sqrt{\frac{2}{e}}$; $\frac{2}{e} < 1$, $\sqrt{\frac{2}{e}} < 1$
$-\sqrt{\frac{2}{e}} > -1$ d'où
$-2 < -1 - \frac{\sqrt{2}}{e}$ et $-1 - \sqrt{2}e^{-1} < -1$
d'où $\forall x \in K$, on a $-2 \le f(x) \le -1$
soit $\forall x \in K$, $f(x) \in K$

c) Démontrons que $\forall x \in K$,

$|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$

* $f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$\forall x \in K, -1 \leq \frac{x}{2} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\forall x \in K, e^{-1} \leq e^{\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{x}{2}} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-1}$

$\Leftrightarrow \forall x \in K, |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\forall x \in K, |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$

D'où $\forall x \in K, |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$

* f est continue et dérivable sur K et $\forall x \in K, |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$, $\alpha \in K$; donc d'après la propriété des inégalités des accroissements finis, on a :

$\forall x \in K, |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}} |x - \alpha|$ or

$\frac{1}{\sqrt{2e}} < \frac{1}{2}$ et $f(\alpha) = \alpha$

d'où $\forall x \in K, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

7-

$\begin{cases} U_0 = -\frac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Démontrons que $\forall n \in IN$, on a :

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$:

$U_0 \in K$; si $U_n \in K$, alors

$f(U_n) = U_{n+1} \in K$

Donc $\forall n \in IN, U_n \in K$

D'après 6-c) on a :

$\forall n \in IN, |f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

soit $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$

$|U_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-2} - \alpha|$

$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha|$

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

or $U_0 = -\frac{3}{2}$ et $\alpha \in [-2; -1]$ donc

$|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

d'où $\forall n \in IN, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

b) $\forall n \in IN$,

$\begin{cases} |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0 \end{cases}$

d'où $\lim\limits_{+\infty} U_n = \alpha$ et alors la suite (U_n) est convergente et converge vers α.

SUJET 30

Exercice 1

1- $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y = \lambda e^{-2x}, \lambda \in IR$

Soit h la solution qui prend la valeur 1 en 0.

$h(x) = \lambda e^{-2x}$

$h(0) = 1 \Rightarrow \lambda = 1$

$h : x \mapsto h(x) = e^{-2x}$

2- a) $g(0) = \ln 2$

b) $\forall x \in IR, f'(x) = e^{2x}\left(g'(x) + 2g(x)\right)$

Exercice 2

1- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{O}$: A, B et C sont non alignés donc déterminent un plan (P).

$(P): 6x-3y+9z-27=0$

soit $(P): 2x-y+3z+9=0$

2- Représentation paramétrique de (Δ) :

$$(\Delta)\begin{cases} x=4t+7 \\ y=-2t-1 \\ z=6t+12 \end{cases} (t\in IR)$$

3- a) Justifions que $D\in(\Delta)$:

$$\frac{x_D-7}{4}=\frac{y_D+1}{-2}=\frac{z_D-12}{6}=-\frac{1}{2}$$

donc $D\in(\Delta)$.

b) Un vecteur directeur de (Δ) est

$\vec{u}(4;-2;6)$

$\vec{u}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=84$

$\vec{u}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\neq 0$

d'où (Δ) et (P) sont sécants.

c) Déterminons $(\Delta)\cap(P)$:

$(\Delta)\cap(P)=\{A\}$

d) $D\in(\Delta)$ et $D\neq A$ donc $D\notin(P)$ par conséquent $d(D,(P))\neq 0$

4- a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$$ d'où $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$

constitue une base orthogonale.

b) Coordonnées de O dans $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}}{AB^2}=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}}{AC^2}=-\dfrac{11}{42} \\ z=\dfrac{\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}}{AD^2}=-\dfrac{9}{28} \end{cases}$$

$$O\left(\frac{4}{3};\frac{-11}{42};\frac{-9}{28}\right)$$

Exercice 3

1- $u(x)=x+1+e^{-x}$

a) Variations de u :

$D_u=IR$

$$*\lim_{-\infty}u=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\left(xe^x+e^x+1\right)=+\infty$$

$$*\lim_{+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1+e^{-x}\right)=+\infty$$

$*\ \forall x\in IR,\ u'(x)=1-e^{-x}$

$$\begin{cases} u'(x)=0\Leftrightarrow x=0 \\ u'(x)>0\Leftrightarrow x>0 \\ u'(x)<0\Leftrightarrow x<0 \end{cases}$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		-	0	+	
$u(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

b) Signe de u sur IR :

$\forall x\in IR,\ u(x)\geq 2$

donc $\forall x\in IR,\ u(x)>0$

2- $f(x)=\ln\left(x+1+e^{-x}\right)$

a) Justifions que f est définie sur IR :

$f(x)=\ln[u(x)]$ et $\forall x\in IR,\ u(x)>0$ d'où f est définie sur IR.

b) $\lim\limits_{-\infty}f=+\infty$

$\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$

c) Variations de f :

$$\forall x\in IR,\quad f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\begin{cases} f'(x)=0\Leftrightarrow x=0 \\ f'(x)>0\Leftrightarrow x>0 \\ f'(x)<0\Leftrightarrow x<0 \end{cases}$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

d)

$\forall x \in IR,\ f(x) = \ln\left[e^{-x}\left(xe^{x}+e^{x}+1\right)\right]$

$= -x + \ln\left(xe^{x}+e^{x}+1\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=0$

d'où (C) admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y=-x$ en $-\infty$

Position de (C) par rapport à (Δ) :

$f(x)+x = \ln\left(xe^{x}+e^{x}+1\right)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)+x$	-	0	+

Dans $]-\infty;1[$, (C) est en dessous de (Δ)

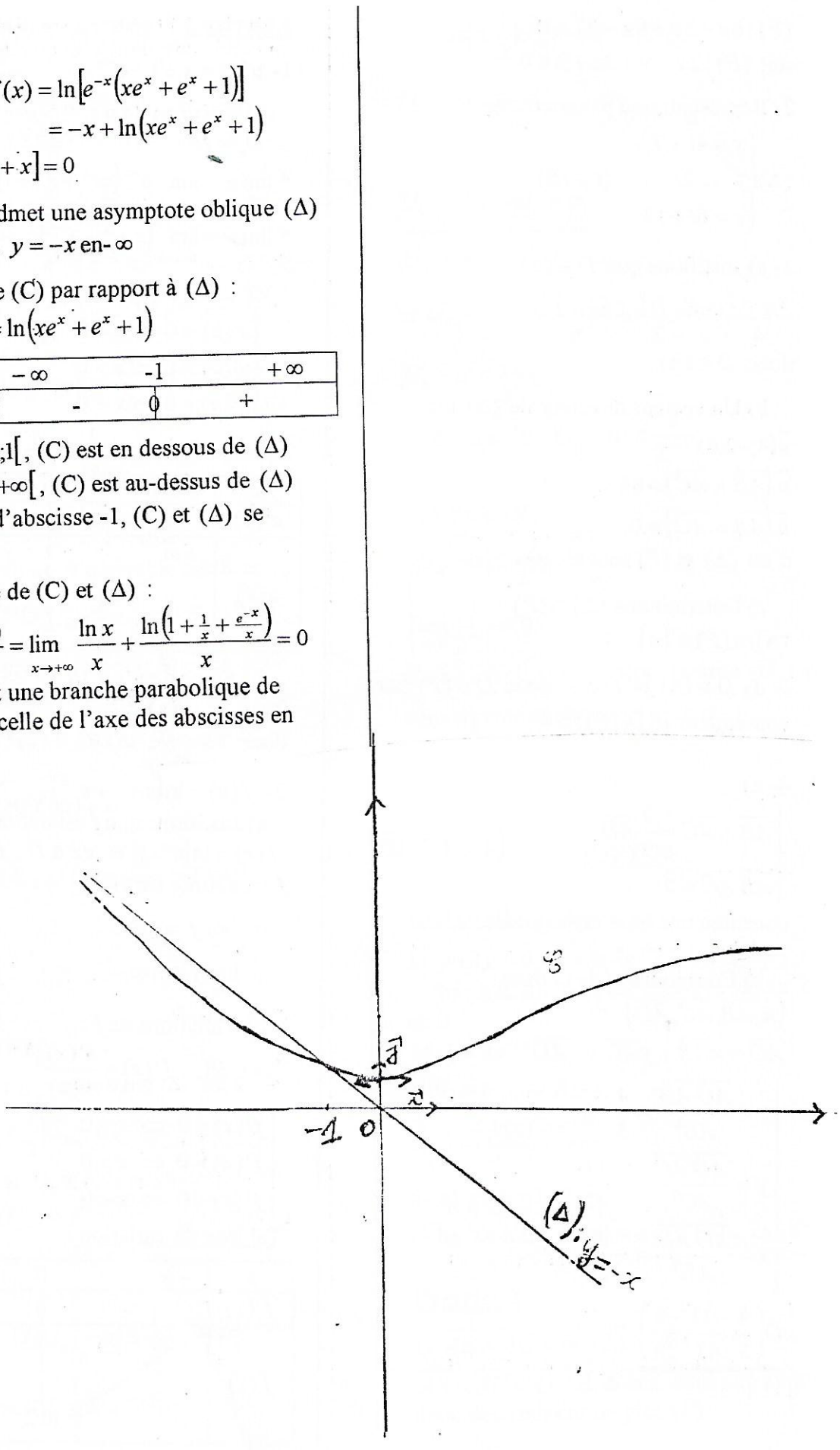
Dans $]-1;+\infty[$, (C) est au-dessus de (Δ)

Au point d'abscisse -1, (C) et (Δ) se coupent.

e) Tracé de (C) et (Δ) :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{e^{-x}}{x}\right)}{x} = 0$

(C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses en $+\infty$.



SUJET 31

Exercice 1

1- a) Résolvons dans C l'équation :
$(z-2)(z^2-2z+2)=0$
On trouve :
$z_0=2$; $z_1=1+i$; $z_2=1-i$

b) Ecrivons z_2 sous forme exponentielle :
$z_2=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

c) Déduisons $\sqrt{2}+z_2$ sous forme exponentielle :
$\sqrt{2}+z_2=\left(2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\pi/8}$

Déduisons la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$:
$\sqrt{2}+z_2=(1+\sqrt{2})-i$
$\sqrt{2}+z_2=\left(2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\pi/8}$
On en déduit que :
$2\sqrt{2}\cos^2\frac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}$
comme $\cos\frac{\pi}{8}>0$, on a :
$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2- a) Ecrivons sous forme exponentielle les nombres complexes :
$\frac{a-c}{b-c}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$; $\frac{a}{b}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) Déduisons la nature du quadrilatère $OACB$:
$\frac{a-c}{b-c}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$, d'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en C(à justifier).
$\frac{a-0}{b-0}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ d'où le triangle OAB est isocèle et rectangle en O.
De plus $OA=AC$.
Il en résulte que le quadrilatère $OACB$ est un carré.

c) Déterminons une équation cartésienne du cercle circonscrit au quadrilatère $OACB$:
Le cercle circonscrit au quadrilatère OACB est le cercle (C) de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon $r=1$.
$(C):(x-1)^2+y^2=1$

Exercice 2

$$\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\sqrt{2}n-1+2\sqrt{2} \quad \forall n\in IN\end{cases}$$

1) $t_n=an+b$, $\quad (a,b)\in IR^2$
Déterminons a et b de façon que (t_n) vérifie la relation $(\Re)$:
(t_n) vérifie $(\Re)$ équivaut successivement à :
$t_{n+1}=\frac{1}{2}t_n+n\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}$
$an+(a+b)=\left(\frac{a}{2}+\sqrt{2}\right)n+\frac{b}{2}-1+2\sqrt{2}$
$$\begin{cases}a=\frac{1}{2}a+\sqrt{2}\\ a+b=\frac{b}{2}-1+2\sqrt{2}\end{cases}$$
$a=2\sqrt{2}$ et $b=-2$

2- $t_n=2n\sqrt{2}-2$

a) Démontrons que (t_n) est une suite arithmétique :
$t_{n+1}-t_n=2\sqrt{2}$. Par suite la suite (t_n) est une suite arithmétique.

b) On pose $v_n=u_n-t_n$.
Démontrons que (v_n) est une suite géométrique :
$v_{n+1}=u_{n+1}-t_{n+1}$
$=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}t_n$
$=\frac{1}{2}(u_n-t_n)=\frac{1}{2}v_n$

Par suite, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$.

c) Exprimons u_n en fonction de n :

$v_0 = u_0 - t_0 = -2$

$v_n = v_0 \times q^n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On sait que $v_n = u_n - t_n$.

Donc $u_n = v_n + t_n$ d'où

$u_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n\sqrt{2} - 2$

3- a) Calculons T_n et V_n en fonction de n :

$T_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(t_0 + t_n) = (n+1)(\sqrt{2}n - 2)$

$V_n = V_0 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = -4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

b) Déduisons U_n en fonction de n :

$U_n = T_n + V_n = (n+1)(-2+\sqrt{2}n) - 4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

PROBLEME

$u : x \mapsto u(x) = \frac{x^2}{x+1}$

1- a) Précisons l'ensemble de définition D de u :

$D = IR - \{-1\}$

b) Déterminons les nombres réels a, b et c tels que $\forall x \in D$, $u(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$:

On trouve $a=1$, $b=-1$, $c=1$

2- Étudions les branche infinies de (Γ) :

$\lim\limits_{x\to-\infty} [u(x) - (x-1)] = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [u(x) - (x-1)] = 0$

d'où la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote à (Γ).

$\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} u(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} u(x) = +\infty$

La droite d'équation $x=-1$ est asymptote à (Γ).

3) $f : x \mapsto f(x) = |x-1| + \frac{1}{x+1}$

a) Etudions la dérivabilité de f en +1 :

$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-5}{4}$. La fonction f est dérivable à gauche en 1.

$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{4}$. La fonction f est dérivable à droite en 1.

Vu que $\frac{-5}{4} \neq \frac{3}{4}$, on en déduit que f n'est pas dérivable en 1.

b) Donnons une interprétation géométrique du résultat obtenu :

(C) admet en son point d'abscisse 1 une demi-tangente à gauche (T_g) et une demi-tangente à droite (T_d) de coefficients respectifs $\frac{-5}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

c) Définissons les demi-tangentes à (C) :

- La demi-tangente (T_g) est définie par :

$\begin{cases} x \leq 1 \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4} \end{cases}$

- La demi-tangente (T_d) est définie par :

$\begin{cases} x \geq 1 \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \end{cases}$

d) Calculons $f'(x)$ pour $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;1[$ et pour $x \in]1;+\infty[$.

* Si $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;1[$,

$f'(x) = -1 - \frac{1}{(1+x)^2}$

* Si $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$

4- Etudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation de f :
$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;1[,\ f'(x) < 0$ et
$\forall x \in]1;+\infty[,\ f'(x) > 0$.
La fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
La fonction f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;1]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	-		-	$-\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$
		$-\infty$					

5- Ecrivons une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 3 :
$T : y = \frac{15}{16}x - \frac{9}{16}$.
Démontrons que les droites d'équations $y = x-1$ et $y = -x+1$ sont asymptotes à (C) :
- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)] = 0$ d'où la droite d'équation $y = -x+1$ est asymptote à (C).
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = 0$ d'où la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote à (C).

6- Courbe (voir figure) :

7- Calculons l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) et les droites d'équation $y = x-1$; $x = 2$ et $x = 3$.
En unité d'aire cette aire est :
$A = \int_2^3 [f(x)-(x-1)]dx$

$= \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx$

$A = [\ln(x+1)]_2^3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

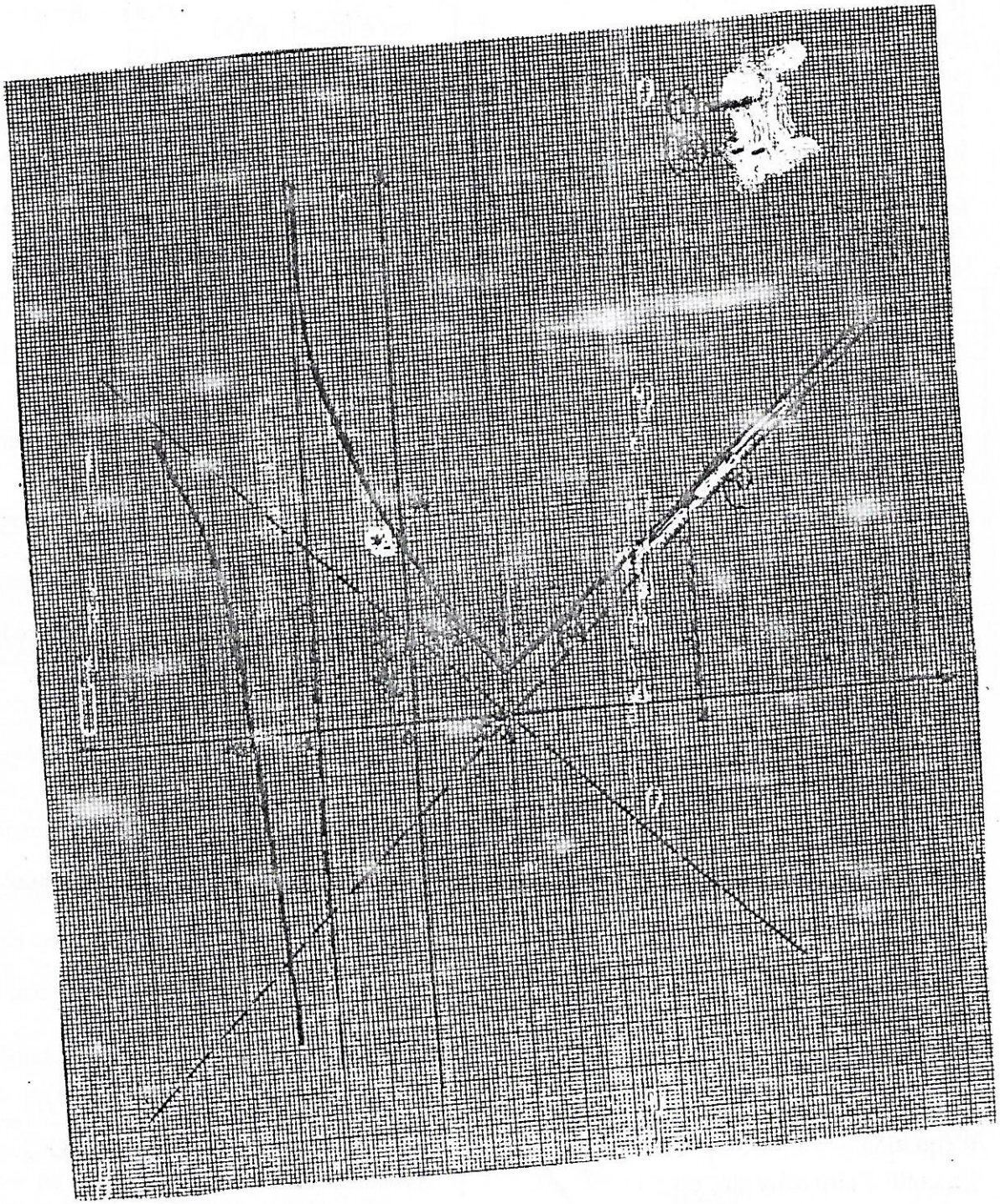
8-
$g :]1;+\infty[\to IR$
$x \mapsto g(x) = \ln(f(x))$

a) Etudions le sens de variation de g :
La fonction g est dérivable sur $]1;+\infty[$.
$\forall x \in]1;+\infty[,\ g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$\forall x \in]1;+\infty[,\ g'(x) > 0$
La fonction g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

b) Calculons les limites suivantes :
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = -\ln 2$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

c) Démontrons que l'équation $g(x) = y_0$ admet une solution unique x_0 dans IR_+ :
La fonction g est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et
$g(]1;+\infty[) =]-\ln 2;+\infty[$.
$y_0 \in]-\ln 2;+\infty[$ donc y_0 a un antécédent unique par g ; par suite l'équation $g(x) = y_0$ admet une solution unique x_0 dans IR_+.

d) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et déduisons une interprétation géométrique :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{x}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{f(x)} \times \frac{f(x)}{x}$
$= 0$
car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{f(x)} = 0$
Ainsi la courbe (C') de g admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe $(o,\vec{i})$.



SUJET 32

Exercice 1

1- a) Déterminons en fonction de r et θ, le module et un argument de $\frac{z_1+i}{z_2+i}$:

$\left|\frac{z_1+i}{z_2+i}\right| = |r| = -r$ et

$\arg\left(\frac{z_1+i}{z_2+i}\right) = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$

b) Déduisons $\frac{z_1+i}{z_2+i}$ sous forme trigonométrique :

$\frac{z_1+i}{z_2+i} = -r\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

2- Déterminons θ pour que les points A, M_1 et M_2 soient alignés :

A, M_1 et M_2 sont alignés si et seulement si :

$\frac{z_1+i}{z_2+i} \in IR^*$ (I)

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$

3- a) Déterminons θ pour que AM_1M_2 soit rectangle en A :

AM_1M_2 est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_1+i}{z_2+i} \in iIR^*$ (II)

$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \theta = 0$

b) i- Vérifions que $z_2+i = \frac{i}{r}(z_1+i)$

AM_1M_2 est rectangle en A donc d'après 3-a), $\theta = 0$ alors on a :

$\frac{z_1+i}{z_2+i} = -r\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -ir$

Par suite $z_2+i = \frac{i}{r}(z_1+i)$.

ii- Déduisons que M_2 est l'image de M_1 par une similitude plane directe :

$z_2+i = \frac{i}{r}(z_1+i) \Leftrightarrow z_2 = \frac{i}{r}z_1 - i - \frac{1}{r}$

Cette égalité est sous la forme $z_2 = az_1 + b$ où $a \in C^*$, $b \in C$ or $|a| = -\frac{1}{r}$ donc M_2 est l'image de M_1 par la similitude plane directe de rapport $k = -\frac{1}{r}$, d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et de centre $A(-i)$.

Exercice 2

1- a) Vérifions que les points A et B appartiennent à (Q) :

(Q) est le plan de repère $R = \left(A;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ où $\vec{e_1}(1,1,0)$ et $\vec{e_2}(1,1,1)$ donc $A \in (Q)$.

$\vec{n} = \vec{e_1} \wedge \vec{e_2}(1,-1,0)$ est un vecteur normal au plan (Q) ; par conséquent une équation cartésienne du plan (Q) est $x - y + 1 = 0$.

$x_B - y_B + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$ donc $B \in (Q)$.

b) Démontrons que (P) et (Q) sont perpendiculaires :

$\vec{n'}(1,1,1)$ est un vecteur normal au plan (P).

$\vec{n}.\vec{n'} = 1\times1 + (-1)\times1 + 1\times0 = 0$ donc (P) $\perp$ (Q).

c) Déterminons un repère de (Δ) :

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$M \in (P) \cap (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t-1 \\ y = t \\ z = -2t+2 \end{cases} \quad (t \in IR)$

Un repère de la droite (Δ) est $\left(I;\vec{e_3}\right)$ où $I(-1,0,2)$ et $\vec{e_3}(1,1,-2)$.

2- a) Démontrons que (D) est parallèle à (P) et à (Q) :

$\vec{n}.\vec{u} = 1\times1 + (-1)\times1 + 0\times(-2) = 0$ donc (D) // (P)

$\vec{n'}.\vec{u'} = 1\times1 + 1\times1 + 1\times(-2) = 0$ donc (D)//(Q).

b) Calculons $d(A,(D))$:

$$d(A,(D))=\frac{\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|},\ \overrightarrow{AC}\wedge\vec{u}(2,0,1)$$

donc $d(A,(D))=\frac{\sqrt{30}}{6}\,ul$

c) Calculons le volume v du tétraèdre $ABIC$:

$$v=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|,\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-2,2,-1)$$

et $\overrightarrow{AI}(0,0,1)$ donc $v=\frac{1}{6}uv$

3- Déterminons p_0 :

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

On a $card\Omega=A_6^3=120$.

$$p_0=\frac{A_4^3}{120}=\frac{24}{120}\quad\text{soit}\quad p_0=\frac{1}{5}$$

PROBLEME

Partie A

1- a) Déterminons D

$D=\{x\in IR/\,x+2\neq 0\}$

$=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

b) Etudions les limites de f aux bornes de D :

$$\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=0\ \text{ car }\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x+2}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x}{n}}=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty\ \text{ car }\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+2}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{n}}=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\<}}f_n(x)=+\infty\ \text{ car}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2}(2x+3)=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}}(x+2)=0\ \text{ et } x+2<0\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\>}}f_n(x)=-\infty\ \text{ car}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2}(2x+3)=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}(x+2)=0\ \text{ et } x+2>0\end{cases}$$

c) Etudions les branches infinies de la courbe (C_n) :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)=0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à (C_n) au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}}f_n(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=-2$ est une asymptote à (C_n).

$\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+2}\times\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}=+\infty$$

donc (C_n) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2- Etudions le sens de variation de f_n :

f_n est dérivable en tout point de D et on a

$$\forall x\in D,\ f_n'(x)=\frac{2x^2+7x+6+n}{n(x+2)^2}e^{\frac{x}{n}}$$

Le signe de $f_n'(x)$ est celui de $2x^2+7x+6+n$ car $\forall x\in D$,

$$\begin{cases}n(x+2)^2>0\\ e^{\frac{x}{n}}>0\end{cases}$$

$f_n'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2+7x+6+n=0$

$\Delta=1-8n\Rightarrow\Delta<0$ car $n\in IN^*$ $(n\geq 1)$ donc $\forall x\in IR,\ 2x^2+7x+6+n>0$

par conséquent $f_n'(x)>0,\forall x\in D$; par suite la f_n est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$.

3- Dressons le tableau de variation de f_n :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f_n(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4- a) Déterminons les coordonnées des points d'intersections de (C_1) avec les axes des coordonnées :

Tchinkeyr