

FICHE D'EXERCICES :

PROBLEME1 :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{1}{2} [\ln(x) - \ln(1-x)]$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{U} ; \vec{V})$ (unité graphique 5cm)

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites aux bornes de D_f . En déduire les équations des droites asymptotes à la courbe (C) .

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) a) Montrer que le point $A(\frac{1}{2} ; 0)$ est un centre de symétrie de (C) .

b) Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point A .

c) On pose $\varphi(x) = f(x) - 2x + 1$.

Etudier les variations de $\varphi(x)$ puis déduire les positions relatives de (C) et (D) .

3) Tracer (C) et (D) dans le repère orthonormé $(O ; \vec{U} ; \vec{V})$.

PROBLEME2 :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} \ln x$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de $]0; +\infty[$. Interpréter graphiquement la limite en 0

2) En considérant f comme somme de deux fonctions déterminer ses variations sur $]0; +\infty[$.

3) a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[3; 4]$.

b) A l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .

PROBLEME3 :

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{x+1} + x - 1$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

PARTIE A :

1) Calculer $f(0)$ et $f(1)$. (On donnera les valeurs exactes)

2)a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

b) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) .

3) Calculer la limite de f en $+\infty$.

PARTIE B :

1)a) On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2)a) Montrer que sur l'intervalle $[0; 1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α .

b) Donner une valeur arrondie au centième près de α .

c) Préciser le signe de $f(x)$ selon les valeurs réelles.

3) Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

PARTIE C :

1) Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer l'intégrale $I = \int_1^3 f(x) dx$.

- Donner la valeur exacte de I , puis une valeur décimale arrondie au centième près.

- Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

PROBLEME 4 :

PARTIE A :

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par :

$$g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x.$$

1)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

2)a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

b) En déduire le sens de variation de $g(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction $g(x)$.

3) a) Démontrer que $x \in]0; +\infty[$, $g(x)=0$ admet une solution unique α .

b) Justifier que $2.55 < \alpha < 2.56$.

c) Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[; g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) > 0. \end{cases}$

PARTIE B :

On considère la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par :

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}.$$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unités graphiques $OI=2\text{cm}$; $OJ=10\text{cm}$).

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
- 2) Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$.
- 3) a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = e^{-x} g(x)$.
b) En utilisant la PARTIE A, déterminer la variation de f .
c) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1 est : $y = -\frac{3}{e} + \frac{4}{e}$.
- 5) Construire la droite (T) et la courbe (C_f) dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra $\alpha = 2.6$.

PARTIE C :

- 1) Soit h la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $h(x) = e^{-x} \ln x$.
Démontrer que h est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
- 2) Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.
 - a) Calculer en cm^2 et en fonction de λ , l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C_f) , (OI) et les droites d'équation $x=3$ et $x=\lambda$.
 - b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

