

FICHE D'EXERCICES SUR LES FONCTIONS :

Problème 1:

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ où a, b, c, d sont des réels et

(Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) Trouver les réels $a ; b ; c$ et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (Cf) passe par les points $A(2 ; 3)$, $B(4 ; 7)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.

2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1 ; b = -1 ; c = -5$ et $d = -3$

a- Etudier la fonction f

b- Etudier la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique

c- Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[4 ; +\infty[$ réalise une bijection de $[4 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

d- Calculer $g(5) ; g(6) ; (g^{-1})'\left(\frac{15}{2}\right)$

3) Montrer que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on déterminera

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β

5) a- Montrer que $\forall x \in [4,5]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

b- En déduire que $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$

6) Tracer (Cf) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ainsi que (Cg^{-1}) la courbe de g^{-1}

Problème 2 :

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue

3) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$ puis interpréter graphiquement vos résultats.

4) Montrer que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$.

5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (Δ) et (D)

6) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

7) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) de f .

Problème 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f .
- 2) Etudier la périodicité et la parité de f puis en déduire un intervalle d'étude D_E .
- 3) Montrer que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$
- 4) Etudier le signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E .
- 5) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
- 6) Tracer la courbe C_f .

Problème 4 :

Partie A : On considère la fonction numérique h de variable réelle u définie sur $[-1 ; 1]$ par : $h(u) = 2u^3 + 8u^2 - 4$.

- 1) Déterminer l'arrondi d'ordre zéro de $h(-0,79)$ et de $h(0,66)$.
- 2) Etablir le tableau de variation de h et donner les signes de $h(u)$ pour $u \in [-1 ; 1]$.

Partie B : On donne la fonction numérique g telle que $g(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x + 2}$.

Soit C_g sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_g .
- 2) En étudiant la périodicité et la parité de g puis montrer que l'on peut étudier g sur un nouvel ensemble d'étude $D_E = [0 ; \pi]$ d'amplitude 2π .
- 3) Déterminer $g'(x)$ et prouver $g'(x)$ dépend en signe et en racine de : $2\cos^3 x + 8\cos^2 x - 4$ pour tout $x \in D_E$
- 4) En admettant que $\cos(0,85) = 0,66$ et que $\cos(2,49) = -0,79$, établir le tableau de variation de g sur D_E .
- 5) a- Tracer C_g sur D_E .
b- En déduire le tracé de C_g sur I .

Problème 5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \sin x$.

- a) Montrer que f admet un centre de symétrie
- b) Étudier et représenter sa courbe. (on étudiera les points d'inflexion, les positions de la courbe par rapport à la direction asymptotique).