

## FICHE D'EXERCICES SUR L'ETUDE DES FONCTIONS $\ln$ et $\exp$ :

### Problème1 :

- 1) Soit la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$ .
  - a) Etudier le sens de variation de  $g$  et calculer  $g(1)$ .
  - b) En déduire le signe de  $g(x)$ .
- 2) Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2 - x$ .
  - a) Déterminer les limites de  $f$  en  $0$  et  $+\infty$ .
  - b) Calculer  $f'(x)$ .
  - c) Montrez que  $f'(x)$  a le signe de  $g'(x)$ . En déduire le tableau des variations de  $f$ .
  - d) Montrez que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  ; donnez, en justifiant, un encadrement d'amplitude  $0,1$  de chacune d'elles.
- 3) On note  $(\mathcal{C})$  la représentation graphique de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique  $4cm$ .
  - a) Montrez que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 2$  est une asymptote à  $(\mathcal{C})$ .
  - b) Etudier la position relative de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(D)$ .
  - c) Déterminez les coordonnées du point  $A$  de  $(\mathcal{C})$  où la tangente est parallèle à  $(D)$ .
  - d) Tracer  $(\mathcal{C})$  et  $(D)$  dans le même repère.

### Problème2 :

- 1) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$ .
  - a) Etudier les variations de la fonction  $g$ .
  - b) En déduire les signes de  $g(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
- 2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$ .  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique  $2cm$  sur  $(ox)$  et  $1cm$  sur  $(oy)$ ).
  - a) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
  - b) Montrer que la droite  $(\Delta) : y = x + 2$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  en  $+\infty$ .
  - c) Etudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(\Delta)$ .
  - d) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$  puis dresser le tableau des variations de  $f$ .
  - e) Tracer  $(\mathcal{C})$  et  $(\Delta)$ .
- 3) Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}$ .
  - a) Prouver que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b) Calculer en  $cm^2$  l'aire  $A(D)$  de la partie  $D$  du plan limité par  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ .

### Problème3 :

#### Partie A :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[10 ; 100]$  par :  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$

- 1) Calculer  $f'(x)$ .
- 2) Démontrer que  $f'(x)$  est positive sur l'intervalle  $[10 ; e^3]$  et négative sur  $[e^3 ; 100]$ .
- 3) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

### Partie B :

On se propose d'exprimer la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge.  $x$  représenté en années et  $g(x)$  la capacité pulmonaire en litres, on admet que sur l'intervalle  $[10 ; 100]$  on a :  $g(x) = 110f(x)$ . où  $f$  est la fonction définie dans la **partie A**.

- 1) Calculer la capacité pulmonaire à **10 ans; 15 ans; 30 ans et 60 ans**.
- 2) Tracer la courbe représentative de  $g$  dans un repère orthogonal (en abscisse : **1cm pour 10 ans** et en ordonnées **3cm pour 1 litre**).
- 3) À quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelle est cette capacité maximale ?
- 4) Déterminer graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à **5 litres**.

### Problème4 :

On considère les fonctions numériques  $f_m$  de la variable réelle  $x$  définie par  $f_m(x) = e^{x-1} - mx$  où  $m$  est un paramètre réel. On désigne par  $(C_m)$  la courbe représentative de  $f_m$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité **2cm**).

- 1) Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par un point fixe **A** dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Montrer que la droite  $\Delta_m$  d'équation :  $y = -mx$  est une asymptote à la courbe  $(C_m)$  et déterminer la position de cette droite par rapport à  $(C_m)$ .
- 3) Etudier la fonction  $f_1$  et tracer avec soin la courbe  $(C_1)$  dans le repère.
- 4) Soit  $g_1$  la restriction de  $f_1$  à  $[1; +\infty[$ . Montrer que  $g_1$  admet une réciproque  $(g_1)^{-1}$ . Représenter la courbe  $(C_1')$  de  $(g_1)^{-1}$ .
- 5) Calculer en  $cm^2$  l'aire  $A(\alpha)$  de la portion du plan limitée par  $(C_1)$ , la droite  $\Delta_1: y = -x$ , et les droites d'équations respectives :  $x = 1$  et  $x = \alpha$ , ( $\alpha < 1$ ).

### Problème5 :

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$ ,  $/\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .

b) Etudier les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.

c) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.

- 2) Montrer que le point  $I(0; 1)$  est centre de symétrie pour la courbe  $/\mathcal{C}$  de  $f$ .
- 3) Calculer le coefficient directeur de la tangente  $(T)$  à  $/\mathcal{C}$  au point **A** d'ordonnée **4**. En déduire son équation.
- 4) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

- Montrer que  $g$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  à préciser
- Expliciter l'application réciproque notée  $g^{-1}$  de  $g$ .
- Etudier le sens de variation de  $g^{-1}$ .
- On désigne par  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $g^{-1}$ . Calculer le coefficient directeur de la tangente  $(T')$  à  $(\Gamma)$  au point  $B$  d'abscisse 4. Donner l'équation de  $(T')$ .
- Représenter  $(\mathcal{C})$  et  $(\Gamma)$  dans le même repère ( $(\Gamma)$  en pointillé).
- Calculer l'aire du domaine limité par  $(Ox)$ , les droites  $x = -2$ ,  $x = 1$  et la courbe  $(\mathcal{C})$ .

### Problème6 :

Soient la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$  et  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique **3 cm**.

- Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Que peut-on dire pour la courbe ?
- Calculer  $f'(x)$ , en déduire les variations de  $f$  pour  $x \in [0; +\infty[$ .
- Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  en son point d'abscisse 0.
- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $m$ , montrer que  $m \in [1; 2]$  et déterminer un encadrement de  $m$  à  $10^{-1}$  près par dichotomie.
- Tracer  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$  sur la même figure.
- a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels  $\forall x \neq -1; \frac{x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$ .  
b) En déduire l'aire  $cm^2$  du domaine limité par  $(T)$ ;  $(\mathcal{C})$  et la droite  $y = 1$ .

### Problème7 :

- A. Soit la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \ln|x^2 - 2x - 3|$
- Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
  - Ecrire  $f(x)$  sans valeur absolue puis calculer les limites de  $f$  aux bornes  $D_f$ .
  - Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
  - Montrer que la droite d'équation  $x = 1$  est axe de symétrie de la courbe de  $f$ .
  - Tracer la courbe représentative  $(\mathcal{C})$  de  $f$  dans un repère orthonormé d'unité **1 cm**.

- B. Soit la fonction numérique  $g$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$g(x) = x(\ln x)^2 \quad \text{et} \quad g(0) = 0$$

- Etudier le signe de  $g'(x)$ ,  $\forall x \in D_g$ .
- Montrer que  $g$  n'est pas dérivable en 0.
- Quelle est la demi tangente en  $x_0 = 0$  ?
- Donner l'équation de la tangente  $(T)$  en  $x_1 = e$ .
- Tracer la courbe  $(\Gamma)$  de  $g$  dans un autre repère.
- Soit  $G$  la fonction définie par  $G(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x (\ln x - 1) + \frac{x^2}{4}$ .  
a) Montrer que  $G$  est une primitive de  $g$ .  
b) Calculer l'aire  $A(\lambda)$  de la portion du plan comprise entre  $(\Gamma)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) et  $x = 1$ .
- Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$ .