

Exercice 1

I – résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- 1°) $e^{5x+1} = e^{3x+2}$; 2°) $e^{x^2+2} = e^{3x}$; 3°) $e^{x^2} = 4$; 4°) $e^{x+3} \times e^{x-2} = e^3$
 5°) $\frac{e^x}{e^3} = e^5$; 6°) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$; 7°) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$;
 8°) $e^x - 10e^{-x} = 3$; 9°) $e^{2(x+1)} - 8e^{x+2} - 9e^2 = 0$; 10°) $3^{2x+2} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$;
 11°) $e^{3x+2} + \frac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$; 12°) $\frac{e^{2x} - 6}{2 - 2e^x} = 1$; 13°) $-4e^{3x} + 17e^{2x} + 16e^x - 5 = 0$;
 14°) $3e^{3x} - 4e^{2x} - 13e^x + 14 = 0$; 15°) $2e^{2x-4} + 5e^{x-2} - 3 = 0$;
 16°) $e^{2x} - e^x - 12 > 0$; 17°) $3e^{2x} + e^x - 10 \geq 0$; 18°) $2e^{2x} - 11e^x + 15 > 0$.
 19°) $2e^{3x-3} + 3e^{2x-2} - 8e^{x-1} + 3 = 0$.

II- 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 3x - 10 = 0$.

En déduire la résolution des équations suivantes

- a) $9^x - 3^{x+1} - 10 = 0$
 b) $4^x - 3 \times 2^x - 10 = 0$
 c) $(\log x)^2 - 3(\log x) - 10 = 0$

2°) Soit le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

- a) Calculer $P(1)$. Écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
 b) Résoudre $P(x) = 0$. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations
- $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 4(\ln x) + 4 = 0$
 - $e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$.

3°) Résoudre dans les équations : $3^{2x} = 2^{3x}$; $6^{2\sqrt{x}} + 5 \times 6^{1+\sqrt{x}} - 6^3 = 0$

III – Résoudre dans les systèmes suivants :

- 1°) $\begin{cases} 3e^x - 4e^y = -6 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$ 2°) $\begin{cases} e^x + 2e^y = 1 \\ -3e^x + e^y = 4 \end{cases}$ 3°) $\begin{cases} \ln(y+1) - \ln(x+4) = -\ln 8 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}$
 4°) $\begin{cases} e^{2x} - 4e^x + 3 > 0 \\ 2e^{2x} - 11e^x + 5 \leq 0 \end{cases}$ 5°) $\begin{cases} \ln(3x+4y) - \ln 7 = \ln(2-5x) + \ln 5 \\ e^{x-2} \times e^{y+3} = 1 \end{cases}$ 6°) $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2 \ln 6 \\ e^x = \frac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$
 7°) $\begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases}$ 8°) $\begin{cases} \ln x - 2 \ln y = \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^{2-y}} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$ 9°) $\begin{cases} 4^x \times (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \times 8^y = 4^{y-1} \end{cases}$

IV – Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions, puis les limites aux bornes de l'ensemble de définition :

$$1^{\circ}) f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2} ; 2^{\circ}) f(x) = \frac{5}{e^x - 1} ; 3^{\circ}) f(x) = \frac{3x}{e^x + 1} ; 4^{\circ}) f(x) = \ln(e^x - 2)$$

$$5^{\circ}) f(x) = 1 + xe^{\frac{1}{x}} ; 6^{\circ}) f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) ; 7^{\circ}) f(x) = \ln(e^{x+1} + 2) ; 8^{\circ}) f(x) = \sqrt{e^x - 3}$$

$$9^{\circ}) f(x) = x + e^{\ln\left(\frac{3}{x^2 - 4}\right)} ; 10^{\circ}) f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} ; 11^{\circ}) f(x) = x + 4 - \frac{4}{e^x + 1} ;$$

$$12^{\circ}) f(x) = e^x(e^x - 2)$$

Exercice 2

A] Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$

- 1) Etudier la fonction h ;
- 2) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que :

$$-1 \leq \alpha \leq 0.$$
- 3) Donner le signe de $h(x)$ dans son domaine de définition.
- 4) A l'aide de la calculatrice donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}
 (On explicitera la méthode utilisée).

B] Soit la fonction f définie par ; $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Etudier les variations de f ;
2. Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet une droite (D) asymptote oblique en $+\infty$ que l'on précisera.
3. Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) ;
4. Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x = 0$.
5. Déterminer sur la figure le domaine puis calculer en cm^2 l'aire de la région du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1^o) Donner l'ensemble de définition D_f de f et étudier les limites aux bornes de D_f .

- 2°) Etudier le problème de la continuité de f au point 0.
- 3°) Déterminer les variations de f et tracer sa courbe.
- 4°) Calculer la dérivée de la fonction F définie par : $F(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.
- 5°) Déterminer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe de f et les droites d'équations respectives : $y=0$; $x=\frac{1}{2}$; $x=2$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x) = e^x(e^x - 2)$ et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. Etudier les variations de f
2. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point $x = \ln 2$.
3. Tracer (T) et (C_f) dans le même repère ;
4. Calculer en cm^2 l'aire de la portion du plan limitée par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$;
5. Déterminer graphiquement en fonction du réel m le nombre de solutions de l'équation $e^{2x} - 2e^x - m = 0$

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique : 2cm.

A] Soit g la fonction définie par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$;
2. Etudier le sens de variation de g . Calculer $g(0)$ puis déduire du tableau de variation de g le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Déterminer les réels a ; b ; et c pour que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive de la fonction qui à $x \mapsto -xe^{2x}$.
4. En déduire la primitive de g qui prend la valeur 3 pour $x = 0$.

B] Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$. On appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. Etudier la fonction f
2. Montrer que la droite (D) d'équation : $y = x + 3$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.
3. Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) ;
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β ($\alpha < \beta$).
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) ;
6. Calculer l'intégrale : $I = \int_{-1}^0 [f(x) - y] dx$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique : 2cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$;

b) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Montrer que les droites $(D_1) : y = x + 1$ et $(D_2) : y = x - 1$ sont asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.

d) Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D_1) et (D_2) .

3. Montrer que la fonction f est impaire. On limitera l'étude de f à l'intervalle $[0; +\infty[$

4. Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty [$.

5. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 et les asymptotes (D_1) et (D_2) .

6. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique x_0 .

7. Déterminer en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ la droite (D_2) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

(On hachurera le domaine $\mathcal{D}$ sur la figure).

Exercice 7:

Soit la famille de fonctions f_m définies par $f_m(x) = (x+1)e^{m \cdot x}$ et soit (C_m) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1. Montrer que toutes les courbes (C_m) de f_m passent par deux points fixes A et B dont précisera les coordonnées.

2. Etudier les variations des fonctions f_1 et f_{-1} .

3. Donner les équations des tangentes aux courbes (C_1) et (C_{-1}) aux points A et B.

4. Tracer les courbes (C_1) et (C_{-1}) .

5. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_1) et (C_{-1}) les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 8

1°) On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$ et on appelle (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

- a) Etudier les variations de f . préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- c) Tracer la courbe (C_f) .
- d) Soit α un réel strictement négatif. On note $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \alpha$ et $x = 0$. Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α .

Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

2°) Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $g(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} - e^x\right)$. On note (Γ) la courbe représentative de g dans le repère précédent.

- a) Préciser les limites de g en $-\infty$; en $+\infty$ et en 0.
- b) Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant les signes de $f'(x)$ et $f(x)$. Dresser le tableau des variations de g .
- c) Démontrer que pour tout réel x strictement positif $g(x) - x = \ln(1 - e^{-\frac{x}{2}})$.
Montrer que la droite $(\mathcal{D}_1)$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (Γ) .
Préciser la position de (Γ) par rapport à $(\mathcal{D}_1)$ pour tout réel strictement positif.
- d) Démontrer que pour tout réel x strictement négatif $g(x) - \frac{x}{2} = \ln(1 - e^{\frac{x}{2}})$. Montrer que la droite $(\mathcal{D}_2)$ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (Γ) . Préciser la position de (Γ) par rapport à $(\mathcal{D}_2)$ pour tout réel strictement négatif.
- e) Construire (Γ) ; $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ dans le repère $(O ; i ; j)$.

NB : On utilisera un graphique différent de celui de la partie 1°).

Exercice 09

On considère, pour n entier naturel non nul, les fonctions f_n définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{-1}{n}x}, \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1°) Etude des variations de f_n pour $x \in [0 ; +\infty[$.

a) Prouver que f_n est continue sur $[0 ; +\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 0.

c) Calculer $f_n'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2°) Etude au voisinage de $+\infty$.

a) Etudier la limite de f_n en $+\infty$.

b) Donner le tableau des variations de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = e^{-x} - (1 - x).$$

En déduire que pour tout nombre réel $u \geq 0$: $0 \leq 1 - e^{-u} \leq u$. **(1)**

3°) Soit $t \geq 0$, en intégrant sur l'intervalle $[0 ; t]$ l'encadrement **(1)**, en déduire que,

$$\text{pour tout nombre réel } t \geq 0 \text{ on a : } 0 \leq e^{-t} - (1 - t) \leq \frac{t^2}{2}. \text{ **(2)**}$$

4°) Démontrer grâce à **(2)** que, pour tout réel $x \geq 0$; on a

$$0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}. \text{ **(3)**}$$

En déduire que la droite D_n d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est asymptote à la courbe (C_n) de f_n .

5°) Préciser la position relative de (C_n) et (D_n) .

6°) Tracé de courbes

a) Donner le tableau des variations de f_n .

b) Tracer la courbe (C_1) et son asymptote en précisant la tangente en O.

c) Démontrer que, pour tout $n > 0$, (C_1) est l'image de (C_2) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$. Construire (C_2) sur le même graphique que (C_1) .

7°) Pour n entier naturel non nul, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

On se propose d'encadrer l'intégrale I_n sans chercher à la calculer.

a) Montrer que, pour tout x de $[0 ; 1]$: $f_n(x) \leq x$.

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \leq \frac{1}{2}$.

b) En utilisant la relation **(3)**, établir que : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$.

c) Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^x - nx$. On note $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; i ; j)$.

A] Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

1. Déterminer la dérivée de g_n . Faire le tableau des variations de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que g_n s'annule pour une valeur α_n , et que α_n est positif ou nul.
3. Montrer que : $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1+\alpha_n}\right)$ avec $0 \leq \alpha_n \leq \ln(n)$.
4. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln x \leq x-1$, **(1)**.
b) Dédire de **(1)** le signe de $g_n(\ln \sqrt{n})$;
c) Justifier que : $\frac{1}{2} \ln(n) \leq \alpha_n$.

Quelles sont les limites des suites de termes généraux α_n et $\frac{\alpha_n}{n}$?

B] – 1. a) Déterminer la dérivée de f_n . En déduire les variations de f_n .

b) Déterminer les limites de aux bornes de f_n son ensemble de définition.

c) Montrer que $f_n(\alpha_n) = \frac{-n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$.

2. Montrer que $(\mathcal{C}_n)$ admet une asymptote $(\mathcal{D}_n)$ que l'on déterminera.

3. Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_n)$ avec l'axe des abscisses, et préciser la position de par rapport à cet axe.

4. Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$.

5. a) Montrer que : $0,35 \leq \alpha_2 \leq 0,40$. Déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près, par défaut et par excès de α_2 . En déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

b) Tracer $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sur le même graphique d'unité 10cm, en mettant en évidence les résultats précédents. Préciser les tangentes en O à $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

Exercice 11

Soit les fonctions f et g définies sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{36}{8 + e^{-t}} \quad \text{et} \quad g(t) = 2\ln(t+1) + 2.$$

Soit (C_f) et (C_g) leurs courbes respectives dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1/- a) Etudier les variations de chacune des fonctions f et g .

b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$

c) Tracer les tangentes à (C_f) et à (C_g) aux points d'abscisse $x = 0$ puis les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère.

2/- On suppose $h = g - f$

a) Calculer la dérivée h' de la fonction h

b) On admet que $h'(x) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$. Montrer que h s'annule en une seule valeur α de $[0 ; 5]$ et une seule. Montrer que $\alpha \in [2 ; 3]$.

3/- a) vérifier que $f(t) = \frac{36e^t}{8e^t + 1}$. Calculer l'intégrale $I = \int_0^5 f(t)dt$; en donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

b) Calculer $J = \int_0^5 g(t)dt$. (on utilisera la dérivée de la fonction k définie sur

$[0 ; +\infty[$ par $k(t) = (t+1)\ln(t+1) - t$; en donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

4/- On estime que sur une période $[t ; t+1[$ où $0 \leq t \leq 9$. Un plan de restructuration industrielle entraîne des suppressions d'emplois données par $f(t)$ (nombre d'emplois supprimés exprimé en milliers) pendant la même période ce plan crée de nouveaux emplois donnés par $g(t)$ (nombre d'emplois créés exprimé en milliers). On suppose que ces deux phénomènes se réalisent continûment au cours du temps. Le solde d'emploi à l'instant t est donc

$$h(t) = g(t) - f(t).$$

a) D'après le graphique de h , à partir de quelle année ce solde devient-il positif ?.

b) On admet que sur les cinq premières années le de restructuration induit une variation dans le nombre d'emploi assimilable à l'intégrale $L = \int_0^5 h(t)dt$.

Exprimer le bilan de restructuration sur 5 années.

Exercice 12

Soit la fonction f définie par $f(x) = (-2x - 4)e^{\frac{x}{2}} + 2 - x$; et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A :

Pour tout réel x , on considère la fonction g définie par : $g(x) = x - e^{\frac{x}{2}}$.

- 1°) Etudier les variations de la fonction g .
- 2°) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

- 1°) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2 - x)]$ puis interpréter.
- 3°) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = g(x)e^{\frac{x}{2}}$.
- 4°) En déduire le sens de variation de f .
- 5°) Déterminer les coordonnées du point B intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f et de son asymptote oblique $(\mathcal{D})$. En déduire la position de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{D})$.
- 6°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique ℓ dans $\mathbb{R}$ et justifier que $-2 < \ell < -1$.
- 7°) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
- 8°) Tracer $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 9°) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{D})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$, $x = 0$.

Exercice 13

Soient les fonctions f et g définies par : $f(x) = x - e^x$ et $g(x) = (1 - x)e^x$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

- 1°) Etudier les variations des fonctions f et g .
- 2°) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.
- 3°) Pour tout réel x on pose $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - a) Montrer que pour tout réel x , $h'(x) = 1 - g(x)$;
 - b) En déduire le sens de variation de h ;
 - c) Dresser le tableau de variation de h , on calculera les limites de h .
- 4°) Démontrer que les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ admettent un unique point d'intersection, dont, l'abscisse, notée α , appartient à $[1; 2]$.
- 5°) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{C}_g)$.
- 6°) Tracer la droite $(\mathcal{D})$ et les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.
- 7°) Calculer en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

Exercice 14

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$ et soit (Cf) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

1°) Étudier les variations de la fonction f .

2°) Vérifier que le point $I(0 ; \frac{3}{2})$ est centre de symétrie pour la courbe (Cf).

3°) Déterminer les coordonnées des points de la courbe (Cf) en lesquels la tangente admet un coefficient directeur égal à (-6) .

4°) Tracer la courbe (Cf) dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

5°) Calculer en cm^2 l'aire du domaine formé par l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

6°) La droite (D) d'équation $y = x$ coupe (Cf) en deux points. Soit M_0 leur point d'intersection dont l'abscisse x_0 est positive.

a) Montrer que x_0 est solution de l'équation : $xe^x - 2e^x - x + 1 = 0$.

b) Montrer que la fonction numérique h définie par $h(x) = xe^x - 2e^x - x + 1$ est continue et strictement monotone sur $[2 ; +\infty[$.

En déduire que x_0 appartient à l'intervalle $[2 ; 3]$ et calculer une valeur approchée de x_0 par défaut et par excès à 10^{-1} près.

Exercice 15

Soit g la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1°) Étudier les variations de g sur $K = [1 ; +\infty[$. (On ne demande pas de tracer sa courbe).

2°) Montrer que si x appartient à $[1 ; +\infty[$ alors $g(x)$ appartient à $K = [1 ; +\infty[$.

3°) Montrer que pour tout x de K , on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En déduire que pour tout x de K , on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |x - \alpha|$.

4°) Soit (U_n) la suite d'éléments de K définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout entier n positif ou nul on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |U_n - \alpha|$.

b) En déduire que pour tout entier n positif ou nul on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

Exercice 16

Les fonctions f_1 et f_2 sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $f_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Partie I :

- 1) déterminer les fonctions dérivées de f_1 et f_2 .
- 2) Dresser le tableau de variation de f_1 puis celui de f_2 .
- 3) Déterminer la position relative des courbes $(\mathcal{C}_1)$ de f_1 et $(\mathcal{C}_2)$ de f_2 .
- 4) Déterminer les points d'intersection de chacune de ces courbes avec l'axe des ordonnées et une équation de la tangente à chacune des courbes en ces points.
- 4) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans un repère orthonormé (unité 2cm).
- 5) calculer en cm^2 l'aire $A(\lambda)$ du domaine plan limité par les courbes $(\mathcal{C}_1)$; $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \lambda$, ($\lambda > 0$). Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

Partie II :

On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

- 1) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$, et que $(f_1(x))^2 - (f_2(x))^2 = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

En déduire la fonction dérivée h' de h et dresser le tableau de variation de h

- 2) Préciser les asymptotes éventuelles de la courbe $(\mathcal{C}_h)$ de h .
- 3) Déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_h)$ par rapport aux asymptotes
- 4) Déterminer le point de $(\mathcal{C}_h)$ d'abscisse nulle et la tangente en ce point
- 5) Construire dans un repère orthonormé la courbe $(\mathcal{C}_h)$ de h .
- 6) En posant $u(x) = e^x + e^{-x}$, montrer que $h(x)$ peut s'écrire sous la forme $h(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Calculer alors $I = \int_0^{\ln 2} h(x) dx$.

Exercice 17

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Soit U la fonction définie par $U(x) = \frac{e^x}{1-x}$. Démontrer que, pour tout nombre réel x non nul et différent de 1, $(f(x) - x)$ est le taux de variation de U entre 0 et $\frac{1}{x}$.

Déduisez-en la limite de $(f(x) - x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3°) Soit g la fonction définie de la façon suivante :
$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = f(x), \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

On désigne par (Cg) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Justifier que g est le prolongement de f par continuité à gauche en $x_0 = 0$.

b) Etudier la dérivabilité de g en $x_0 = 0$.

4°) a) Démontrer que l'équation $f(x) = x + 2$ a les mêmes solutions que

$$\text{l'équation : } e^{\frac{1}{x}} = (1 - \frac{1}{x})(1 + \frac{2}{x}).$$

b) Résolvez l'équation : $e^x = (1-x)(1+2x)$ et déduisez-en les solutions de l'équation : $f(x) = x + 2$ puis les positions relatives de (Cf) et de la droite D d'équation : $y = x + 2$.

5°) Dessiner la courbe (Cf) .

Exercice 18

Partie A

Pour tout entier naturel n strictement positif on donne f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$. On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

- 1°) Déterminer la fonction dérivée f_n' de f_n et donner l'expression de f_n' en fonction de f_n et f_{n+1} .
- 2°) Étudier les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 ; $+\infty$ (On distinguera le cas n pair et impair)
- 3°) Démontrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par un même point fixe.
- 4°) Déterminer la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$? Tracer sur deux figures distinctes les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

Partie B

On donne $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1°) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
- 2°) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- 3°) En utilisant la question A) 1°) trouver une relation entre I_n et I_{n+1} .
- 4°) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_{n+1} = 1$. En déduire que la suite $(n \times I_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge et déterminer sa limite.

Partie C

Dans cette partie on donne $n = 2$

- 1°) Démontrer que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
- 2°) Étudier les variations de f_2' dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et en déduire que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ on a :
 $-0,25 \leq f_2'(x) \leq 0$.
- 3°) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

- a) Démontrer en utilisant la question C) 2°) que pour tout entier n on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

- b) En déduire que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

- b) Déterminer n pour que U_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près

NB : On donne $\sqrt{e} = 1,65$; $\ln 2 = 0,69$; $\ln 5 = 1,6$.

Exercice 19

Partie A : Étude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}; \vec{j})$. L'unité graphique est 1cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées.

1°) a) On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

2°) On considère la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$.

a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

b) En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3°) a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

4°) Tracer les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

Partie B : Comportement asymptotique d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1°) Étudier le sens de variation de la fonction F .

2°) a) Vérifier que pour tout nombre réel t , $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ et calculer $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$.

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.

c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2 \ln 2 \quad ; \quad F(x) = \ln \left(\frac{e^x}{1 + e^x} \right) - f(x) + 2 \ln 2.$$

3°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

4°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) - x)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

Partie C : Étude d'une suite.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^n e^{-k} \ln(1 + e^k)$.

1°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

2°) a) Justifier que pour tout entier k , tel que $1 \leq k \leq n$; on a : $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$.

b) Comparer U_n et $F(n)$.

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?