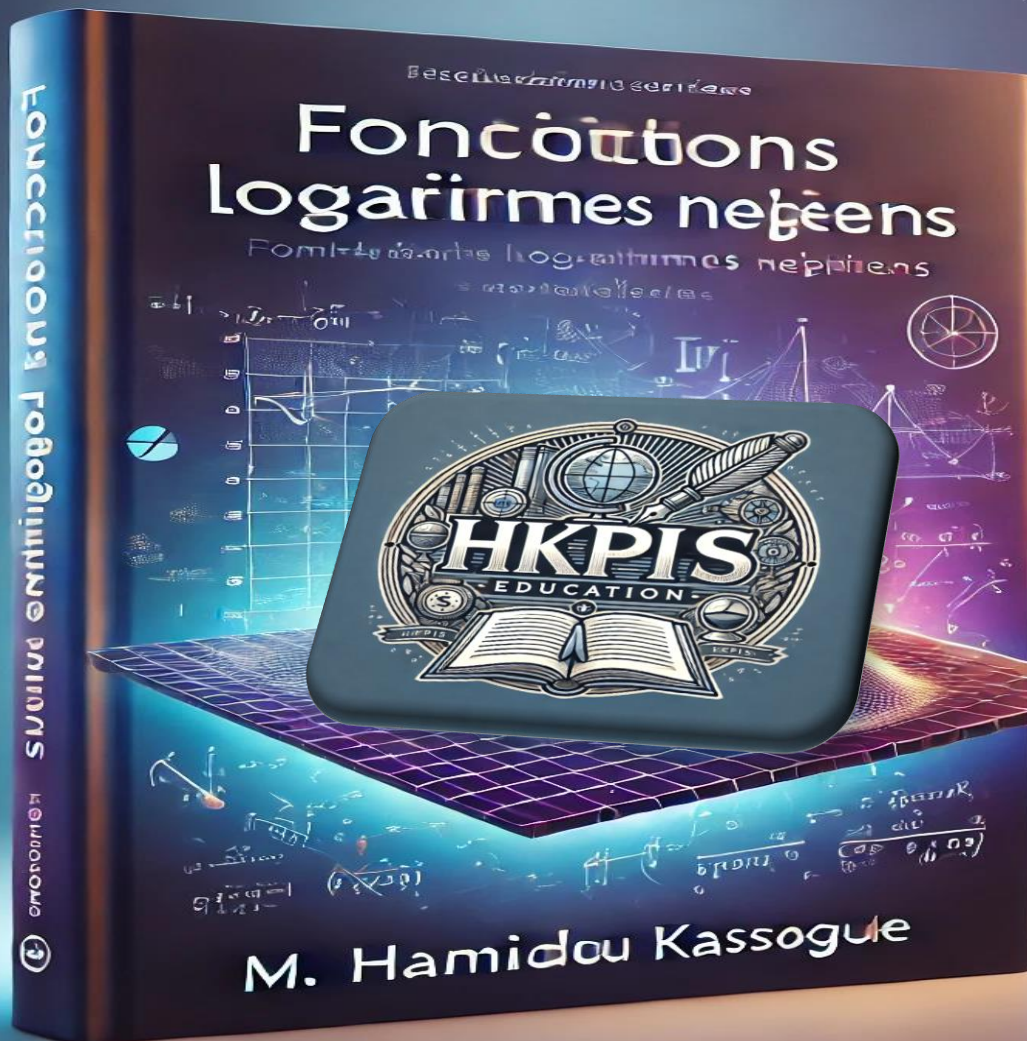




Problème 1 :

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $[10; 100]$ par : $\mapsto f(x) = \frac{-2 + \ln x}{x}$

- 1) Calcule $f'(x)$ sur $[10; 100]$.
- 2) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[10; 100]$.
- 3) Dresse le tableau de variation de f .

Partie B :

On se propose d'étudier la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge ; x représenté en années et $g(x)$ la capacité pulmonaire en litres.

Une étude a montré que sur l'intervalle $[10; 100]$, g se modélise de la façon suivante :

$x \mapsto g(x) = 110f(x)$ où f est la fonction définie dans la partie A.

- 1) Calcule la capacité pulmonaire à 10 ans ; 30 ans et 60 ans.
- 2) Trace la courbe représentative de g dans un repère orthogonal (en abscisse : 2cm pour 10 ans et en ordonnée : 3cm pour 1 litre).
- 3) A quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ?
- 4) Détermine graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à cinq litres.

Problème 2 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie par : $x \mapsto g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x}$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_g de g .
- 2) Résous, sur D_g , l'inéquation $g(x) \geq 0$.
- 3) Détermine trois nombres réels a , b et c tels que pour tout $x \in D_g$: $g(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$.

Partie B

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto f(x) = x + 2 + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|$.

Soit (C) la représentation graphique de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Étudie les variations de f .
- 2) a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) .
b. Précise la position de (C) par rapport à (D) .

c. Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C) et (D) puis écris une équation de la tangente à (C) en ce point.

3) Étudie le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition.

4) a. Trace la courbe (C) et la droite (D).

b. Précise les points d'intersection de (C) et de la droite (D') d'équation $y = x$.

5) Montre que le point $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

Problème 3

A : Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $x \mapsto g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dresse le tableau de variation de g .

2) Calcule $g(1)$ puis étudie le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B : Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $x \mapsto f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$.

1) Dresse le tableau de variation de f .

2) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions notées α et β avec $\alpha < \beta$.

3) a. Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$.

b. Étudie la position relative de (C) et (Δ).

4) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.

5) Calcule en fonction de α et β , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) et l'axe des abscisses.

Problème 4

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie. Des relevés statistiques ont permis de modéliser le nombre de malades durant l'épidémie par la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 26]$ par : $f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10$ où t représente le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

1) Calcule $f'(t)$.

2) a. Étudie le signe de $f''(t)$ sur l'intervalle $[1; 26]$.

b. Dresse le tableau de variation de la fonction f' sur l'intervalle $[1; 26]$.

c. Montre que l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 26]$ dont on déterminera un encadrement par deux entiers consécutifs.

d. En déduis le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[1; 26]$ puis les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; 26]$.

3) On admet que $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

a. Dans le contexte du problème, donne une interprétation du tableau de variations de la fonction dérivée f' obtenu à la question 2. b.

b. En se servant des questions précédentes, détermine le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malade par semaine a commencé à diminuer.

Problème 5

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = x + \frac{2(1+\ln x)}{x}$

1) a) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f et les limites aux bornes de D_f .

b) On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x^2 - 2\ln x$.

- Étudie les variations de h sur $]0; +\infty[$.

- En déduis le signe de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$.

c) Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

d) Prouve que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

2) a) Tracer la courbe (C) de f et ses asymptotes dans le même repère.

b) On désigne par $A(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par (C) , Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k$. Calcule $A(k)$.

c) Pour quelle valeur de k a-t-on $A(k) = 8$?

Problème 6 :

1) Soit la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$, par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

a) Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b) En déduire le signe $g(x)$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2 - x$.

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$.

c) Montrer que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. En déduire le tableau de variation de f .

- d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 , donner en justifiant, un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune d'elle.
- 3) On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 4cm.
- a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à (C) .
- b) Étudier la position de (C) par rapport à (D) .
- c) Déterminer les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D) .
- d) Tracer (C) et (D) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Problème 7 :

A) L'aire A (en cm^2) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids P (en gramme) est donnée par l'égalité suivante : $\ln A = \ln(9,85) + 0,64 \ln P$. ($\ln$ désignant le logarithme népérien).

- 1) Quelle est l'aire A de la peau d'un cobaye de poids $P = 780\text{g}$?
- 2) Quel est le poids P d'un cobaye dont la peau a pour aire $A = 30\text{ cm}^2$?

B) Pour déterminer l'âge d'un fossile ou d'un os, on mesure le pourcentage de "carbone 14" présent dans l'objet. En effet, à la mort d'un être vivant si k est le carbone est le pourcentage de "carbone 14" restant au bout de N années, alors on a : $N = -8310 \times \ln K$.

- 1) Le squelette d'un « *homme du Cro – Magnon* » contient 5% de carbone initial. Quel âge a-t-il ?
- 2) Le pourcentage k de *carbone 14* contenu dans un fossile vérifie : $51,8\% < k < 53,8\%$.
Donner un encadrement de l'âge.

C) La magnitude apparente d'un astre d'éclat E est $M = \log_{\alpha} \left(\frac{E}{E_0} \right)$ où E_0 est l'éclat de référence.

- 1) Exprime M en fonction de $\ln \alpha$ et $\ln \left(\frac{E}{E_0} \right)$.
- 2) Calcule $\ln \alpha$ sachant que $E_0 = \frac{E}{10}$ et $M = 5$
- 3) En déduis la magnitude apparente des astres suivants :

a- Soleil : $E = 4,786 \times 10^{10} E_0$; b- Lune : $E = 1,2 \times 10^5 E_0$

D) Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est la pascal. La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6} Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels. On note $P_0 = 20 \times 10^{-6}$. Pour une

pression de P s'exerçant sur le tympan, avec $p \geq p_0$, le niveau sonore perçu est égal à $f(p) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000P)$

- 1) Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 Pascals ? 0,2 Pascals ? 0,02 Pascals ? Calculer $f(p_0)$.
- 2) A partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur. Déterminer la pression P correspondant à ce niveau sonore.
- 3) Montrer que pour tout réel $x \geq P_0 : f(10x) = 20 + f(x)$. On en déduit "le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10".
- 4) Exprimer, pour tout réel $x \geq P_0$, $f(100x)$ en fonction de $f(x)$ et énoncer la propriété du niveau sonore correspondante.

Problème 8 :

Partie A :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, de déterminer ensuite dans la partie B la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique.

1) Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1$

a) Montrer que la fonction g est dérivable et que $\forall x \in D_g, g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

b) Étudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

2) a- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b- Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donner le tableau de variations de la fonction f .

Partie B :

Γ Désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2 cm. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

1) Étudier le sens de variation de h puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,4; 0,7]$.

2) Montrer que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$.

3) a- Vérifier que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

b- Utiliser les résultats de la **question 1** pour déterminer les positions relatives de Γ et Δ .

4) Construire Γ et Δ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5) a- Calculer au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt$

b- En déduire l'aire, en cm^2 de la portion du plan limitée par la courbe Γ , la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Problème 9 :

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{|x+2|} - x$; C_f est la courbe représentant ses variations dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique $2cm$.

a) Écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b) Étudier les limites $f(x)$ aux bornes de l'ensemble de définition, on précisera les asymptotes à C_f .

c) Calculer la fonction dérivée de f , déduire les variations de f et tracer C_f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

d) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

2) F est la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par : $F(x) = \ln(x+2) - \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

a) Vérifier que F est la primitive de f sur $]-2; +\infty[$ qui s'annule en -1 .

b) Étudier les limites de $F(x)$ aux bornes de son ensemble de définition.

c) Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe (Γ) dans un repère autre que celui qui a servi pour tracer C_f .

d) Préciser les ordonnées des points d'abscisses 1 et 2 de cette courbe (Γ) .

Problème 10 :

1) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b) Calculer les limites aux bornes de D_f de f et étudier les variations de f .

c) Calculer $f(1)$; En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

2) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = |x-1|\ln x$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

c) Étudier les variations de g (on utilisera la **question 1**).

d) La fonction g est-elle dérivable en 1 ? si oui, calculer $g'(1)$.

e) Tracer la courbe (C) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm .

3) a) Prouver que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$, sur intervalle J que l'on déterminera.

b) La bijection de réciproque g^{-1} est-elle dérivable en 0 ? justifier votre réponse.

4) Représenter dans le même repère que (C) la courbe (C') de g^{-1} .

5) a) Hachurer le domaine du plan (D) limité par la courbe (C) de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine (D) .

Problème 11 :

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

On désigne respectivement par (C) et (H) les courbes représentatives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 4 cm .

Partie A :

1) a- Prouver que $f'(x)$ est du signe de $-4\ln x$ sur l'intervalle $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

b- Dresser le tableau de variation de f .

c- Préciser les droites asymptotes à (C)

2) Étudier la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses et donner une équation de la tangente à (C) au point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

3) Calculer l'intégrale $\int_1^2 g(t) dt$.

4) Construire (C) et (H) .

Partie B :

1) Démontrer que la position relative des courbes (C) et (H) peut se déduire du signe de $h(x) = 1 + 2\ln x - x$

2) En utilisant les variations de la fonction h , prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0; 2[$ et $]2; +\infty[$. On note α la solution appartenant à l'intervalle $]2; +\infty[$; justifier l'encadrement $3 < \alpha < 4$.

3) Préciser le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x , et conclure sur la position relative des courbes (C) et (H) .

4) Calculer les intégrales $I = \int_{\alpha}^{\ln 2} (-4e^{2x} + 8e^x) dx$.

Problème 12 :

Un échantillon de sang prélevé sur un individu, contient une certaine quantité de globules (Rouges et blancs) dont le rythme de croissance est modélisé par la fonction $R(t) = \frac{3000}{1+0,25t}$.

Où t est le temps écoulé en jours. On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $P(t)$ de globules c'est-à-dire que $P'(t) = R(t)$ et au temps $t = 0$, l'échantillon compte 1000 globules c'est-à-dire : $P(0) = 1000$.

- 1) a- Déterminer $P(t)$ désignant la population de globules après t jours.
b- Evaluer le nombre de globules présent dans l'échantillon au bout de 72 heures.
c- Après combien de jours le nombre de globules atteindra-t-il 12000 ?
- 2) a- Étudier le sens de variation de $p(t)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
b- Calculer la limite de $p(t)$ en $+\infty$.
- 3) On donne la fonction H définie sur $[0; +\infty[$ par : $H(x) = 48000(1 + 0,25t)\ln(1 + 0,25t) - 11000t$
a- Montrer que H est une primitive de P sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
b- Calculer l'intégrale $I = \int_5^{10} p(t) dt$ puis en déduire une interprétation concrète du résultat.
c- Calculer le nombre moyen de globules entre le 5^{ième} et le 10^{ième} jour.

Problème 13 :

Partie A

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2}$ et C_f sa courbe dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité : 1 cm.

- 1) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$.
- 2) a- Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
b- Démontre que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à C_f .
c- Étudie la position relative de C_f et (D) .
- 3) Calcule la dérivée f' de la fonction f puis Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- 4) a- Détermine les coordonnées des points de la courbe C_f où la tangente est parallèle à la droite (D) .
b- Détermine une équation de ces tangentes.
c- Démontre que le point $I\left(\frac{0}{5}, \frac{5}{2}\right)$ est centre de symétrie pour la courbe C_f .
- 5) Construis la courbe C_f et la droite (D) dans le même repère.

Partie B

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x + 2\ln(x^2 + 1)$

- 1) Démontre que la fonction g est la primitive f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
- 2) a- Démontre que -1 est la seule racine de $f(x)$.
b- En déduis les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
c- Calcule les limites de g lorsque x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.
- 3) Soit α un nombre réel avec ($\alpha \geq 0$)
a- Calcule en fonction α , l'aire $A(\alpha)$ en cm^2 de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que :
 $0 \leq x \leq \alpha$ et $\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \leq y \leq f(x)$.
b- Pour quelles valeurs de α a-t-on $A(\alpha) \leq 1$?
c- Écris 2^x sous la forme e^{kx} , avec $k \in \mathbb{R}$.

Problème 14 :

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

- 1) Dresse le tableau de variation de g .
- 2) Calcule $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

- 1) Dresse le tableau de variation de f .
- 2) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β ($\alpha < \beta$).
- 3) a- Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f .
b- Étudie le signe $f(x) - (-\frac{1}{2}x + 1)$ puis en déduis la position de (C) et (Δ) .
- 4) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.

Problème 15 :

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
- 2) a- Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition D_f .

b- En déduis l'équation des éventuelles asymptotes à la courbe (C).

On notera Δ l'asymptote oblique.

3) Dresse le tableau de la fonction f .

4) Démontre que le point $A(0; 0)$ est centre de symétrie pour courbe (C) de f .

5) Construis la courbe (C).

6) A l'aide d'une intégration par parties, Calcule l'aire de la surface délimitée par la courbe (C), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.

Problème 16 :

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, on pose : $U(x) = \frac{3x-6}{x+2}$.

1) a- Résous dans $\mathbb{R} - \{-2\}$ l'équation $U(x) = -1$.

b) Étudie dans $\mathbb{R} - \{-2\}$ l'équation $U(x) = 1$.

c) Étudie le signe de $U(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R} - \{-2\}$.

2) a- Étudie les variations de la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right)$.

b- le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, Trace la courbe représentative (C) de la fonction f .

3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$

a- Écris l'expression de $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b- Étudie les variations de la fonction g .

c- Trace la courbe représentative (Γ) de la fonction g dans un repère orthonormé.

d- Montre (Γ) admet pour centre de symétrie le point $\omega(0; \ln 3)$.

4) Soit h l'application de $] -2; 2[$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $h(x) = \ln\left(\frac{-3x+6}{x+2}\right)$ Montre que h est une bijection de $] -2; 2[$ sur $\mathbb{R}$ puis Détermine l'application réciproque de h^{-1} de h .

Problème 17 :

Le but de ce problème est l'étude de la fonction f définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = x \ln\left|\frac{x+2}{x}\right|$ si $x \in] -2; +\infty[\setminus \{0\}$ et $f'(0) = 0$ et le tracé de sa courbe (C) dans un repère orthonormé (O; I; J) (unité = 2cm)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $] -2; +\infty[\setminus \{0\}$ et par : $g(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{2}{x+2}$

1) Calculer les limites de g en 0, en $+\infty$ et à droite en -2

2) a) Calculer $g'(x)$ et justifier que $\forall x \in]-2; +\infty[\quad g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$

b) Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation de variation.

3) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-2; 0[$ et que $-0,44 < \alpha < -0,43$

b) Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]-2; \alpha], g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha, 0[\cup]0; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1) a) Démontrer que $\forall x \in]-2; +\infty[\setminus \{0\} \quad f(x) = 2\ln|x+2| - x\ln|x|$, En déduire que f est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter le graphiquement le résultat.

2) a) Calculer la limite de f à droite en -2 . Interpréter graphiquement le résultat.

b) Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ en déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Calculer $f'(x)$ et justifier que $\forall x \in]-2; +\infty[\setminus \{0\}, f'(x) = g(x)$

b) En déduire en utilisant la question **[3.b)]** de la partie A le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. Démontrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha+2}$

4) a) Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe d'abscisse non nulle. Déterminer les coordonnées de A .

b) Écrire une équation de la tangente de (T) à (C) au point d'abscisse -1 .

5) Construire (C) avec ses asymptotes et sa tangente (T) .

On donne : $\ln \frac{39}{11} = 1,26$ et $\ln \frac{157}{43} = 1,29$ $f(\alpha) \simeq -0,5$.

Problème 18 :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2 + 2x$ et $f(0) = 0$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ unité graphique 10 cm.

Partie A

1- Étudier la continuité de f en 0

2- Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats

3- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ Interpréter graphiquement le résultat de la deuxième limite.

4- Démontrer que $\forall x > 0 \quad f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x + 2$

- 5- Étudier le signe de $f'(x)$ puis déterminer le sens de variation de f
- 6- Dresser le tableau de variation de f .
- 7- Soit A le point d'abscisse 1 de (C) . Démontrer que la tangente (T) à (C) au point A est la droite (OA)
- 8- Étudier les positions relatives de (C) et (T) .
- 9- Construire (C) et (T) .

Partie B

- 1) Démontrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.
- 2) On note f^{-1} la bijection de f
 - a) Dresser le tableau de variation de f^{-1}
 - b) Tracer la courbe (τ) de f^{-1} dans le même repère que (C) .

Problème 19 :

Exercice 19 (2014-2015)

Partie A :

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x + (x - 2)\ln x$

- 1- a) Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = 2\frac{x-1}{x} + \ln x$
- b) Calculer $g'(1)$
- c) Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]0; 1[; g'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[; g'(x) < 0 \end{cases}$
- 2- a) Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation (*on ne calculera pas les limites aux bornes*)
- b) En déduire que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) \geq 1$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + x(\ln x) + (\ln x)^2$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$; unité graphique 2cm.

- 1- a) Calculer la limite de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$, puis interpréter graphiquement les résultats
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2- On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$
 - a) Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$
 - b) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

3- Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle que l'on précisera

4- a) Calculer $f(1)$

b) Démontrer que f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$

5- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; 1[$

6- Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,1

7- Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1.

Partie C

On pose $\varphi(x) = f(x) - x$ et $u(x) = x - 1 - \ln x$

1- a) Déterminer le tableau de variation de u sur $]0; +\infty[$. *On ne calculera pas les limites aux bornes*

b) Justifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $u(x) \geq 0$

2- a) Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\varphi(x) = (\ln x - 1) \cdot u(x)$

b) Déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x

c) Déterminer la position de la courbe (C_f) par rapport à la tangente (T)

3) (C') est la courbe représentative de f^{-1} . Tracer (T) , (C_f) et la courbe (C') dans le même repère.

Problème 20 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, I, J) , unité graphique : 2cm

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

1- Étudier de variation de u sur $]0; +\infty[$

2- Calculer $u(1)$ et en déduire que $\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, u(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, u(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2- Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{u(x)}{x}$

3- Déduire de la question 2 de la partie A, les variations de f puis dresser son tableau de variation.

- 4- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
- 5- Étudier les positions relatives de (C) et (Δ) .
- 6- Tracer (C) et (Δ) .

Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif. On désigne par $A(\lambda)$, l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan délimitée par (C) , la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$.

- 1- On suppose dans cette question que $\lambda > 1$;
 - a) à l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $A(\lambda) = 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$
 - b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$
- 3- Démontrer que $A\left(\frac{1}{e}\right) = 1$

Problème 21

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x+2}{1-x} - \ln|1-x|$

- 1- Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$
- 2- a) Justifier clairement que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$
 - b) Interpréter graphiquement les résultats
- 3- a) Démontrer que pour tout $x \in] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, $g'(x) = \frac{4-x}{(1-x)^2}$
 - b) En déduire les variations de g
 - c) Dresser le tableau de variation de g
- 4- a) Démontrer que g sur $] -\infty; 1[$ pour une seule valeur α telle que $-1 < \alpha < 0$
 - b) Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$
- 5- Justifier que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in] -\infty; \alpha[\cup]1; +\infty[; g(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in]\alpha; 1[; g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = (x+2)\ln|1-x|$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) .

- 1- Calculer les limites de f aux bornes de $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ et préciser l'asymptote à la courbe (C)
- 2- Démontrer que pour tout $x \in] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) = -g(x)$
- 3- a) Étudier les variations de f

b) Dresser son tableau de variation

4- Démontrer que $f(\alpha) = \frac{(\alpha + 2)^2}{1 - \alpha}$

5- Démontrer les coordonnées des points d'intersections de (C) et de l'axe des abscisses.

6- Tracer la courbe (C) . Prendre $\alpha = -0,8$

Partie C

Soit h la restriction de f à $[\alpha; 1[$

1- Démontrer que h réalise une bijection de $[\alpha; 1[$ vers un intervalle K à préciser.

2- Justifier que la bijection de réciproque h^{-1} de h n'est pas dérivable en $h(\alpha)$

3- Déterminer le sens de variation de h^{-1} et dresser son tableau de variation.

4- Construire la courbe de (C^{-1}) de h^{-1} dans le même repère.

Problème 22 :

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1- Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $g'(x)$

3- Étudier le sens de variation de g

4- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0,2 < \alpha < 0,3$

5- Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{1+x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le

repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique 2 cm

1- a) Démontrer que f est continue en 0

b) démontrer que (C_f) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

2- a) Calculer les limites de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$

b) Interpréter graphiquement ces résultats.

3- a) démontrer que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I

4- a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation

b) Justifier que $\alpha + 1 = -\ln \alpha$ et en déduire que $f(\alpha) = -\alpha$

- 5- a) Démontrer que la restriction h de f l'intervalle $[1; +\infty[$ admet une bijection réciproque h^{-1}
 b) Démontrer que h^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(h^{-1})'(0)$

6- Tracer (T) , (C_f) et $(C_{h^{-1}})$

7- a) Montrer que pour tout $x \in [1; e]$; $\frac{\ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{e}{2} \ln x$

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, un encadrement de l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe (OI) , la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$

Problème 23 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + 2 \frac{\ln x}{x}$, on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan (*unité graphique : 2cm*).

1. Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

- a- Étudier la limite de g en 0 et en $+\infty$
 - b- Étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation ;
 - c- Déduire de ce qui précède le signe de g sur $]0; +\infty[$.
- 2.a- Étudier la limite de f en 0 et en $+\infty$
- b- Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer la dérivée f' de f sur $]0; +\infty[$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 - c- Vérifier que f' a le même signe que g sur $]0; +\infty[$.
 - d- Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
 - e- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C_f) .
 - f- Étudier la position de (C_f) par rapport à (D) .
 - g- Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) de (C_f) au point d'intersection de (C_f) et (D)
 - h- Tracer (D) et de (T) et (C_f) .

3. On désigne par h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$

- a- Calculer $h'(x)$.
- b- α étant un réel donné strictement supérieur à 1, calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C_f) et (D) .
- c- Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

Problème 24 :

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2 + \frac{3}{x^3} - 6 \frac{\ln(x)}{x^3}$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$
2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation et en déduire pour tout $x > 0, g(x) > 0$

Partie B : Soit f la fonction de la variable réelle définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1. a- Calculer la dérivée de f et préciser son sens de variation (on remarquera que la dérivée première de f donne g).
b- Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
c- En déduire le sens de variation de f .
2. a- Démontrer la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f et préciser sa position par rapport à cette courbe.
b- Préciser les ordonnées des points d'abscisses 0,5, 1, 2 et 3.
c- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
3. Tracer (C) .
4. Calculer l'aire du domaine du plan compris entre la droite (D) et la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Problème 25

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

- 1°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 2°) Étudier le sens de variation de g et dresser le tableau de variation de g .
- 3°) En déduire que pour tout $x > 0$ on a $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie de sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$. On considère par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2cm)

- 1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire que (C) admet une asymptote verticale dont on précisera l'équation.
- 2°) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

3°) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) . Préciser la position de (C) par rapport à (D) .

b) Déterminer les coordonnées du point B de (C) en lequel la tangente est parallèle à (D) .

4) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Déterminer une équation de (T) .

5°) a) Démontrer que f est une bijection définie de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]\frac{1}{2}; 1[$.

c) Construire (C) . (On placera les points A et B et les tangentes à (C) en A et en B).

6°) Construire dans le même, la courbe (C') de la fonction f^{-1} réciproque de f .

7) Calculer l'aire S en cm^2 du domaine du plan délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = x$; $x = 1$ et $x = e$.

Problème 26:

Ce problème comporte 3 parties A , B et C liées

Partie A

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x}{|x-2|}$

Démontrer que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in [0; 1], h(x) \leq 1 \\ \text{pour tout } x \in]1; 2[\cup]2; +\infty[, h(x) \geq 1 \end{cases}$

Partie B

Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x \ln x - (x-2) \ln |x-2|$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Démontrer que g admet un prolongement par continuité en 2 puis définir ce prolongement

2. a) Pour tout x élément de D_g , calculer $g'(x)$ puis montrer que $g'(x) = \ln(h(x))$.

b) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x

Partie C

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln|x-2|}{\ln x} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

2. a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1} = -1$ et en déduire que f est continue en 1?

b) Montrer que f est dérivable en 1.

3. a) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) En déduire les asymptotes éventuelles à (C_f) la courbe représentative de f .

4. a) Pour tout x élément de D_f ; Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-2)(\ln x)^2}$
- b) En utilisant la question $B - 3$, montrer que le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(x - 2)$
- c) Dresser le tableau de variation de f
5. a) Montrer que f réalise une bijection de $]0; 2[$ vers un intervalle K à préciser
- b) la bijection réciproque f^{-1} de f est-elle dérivable en -1 ?
6. Construire (C_f) ainsi que les éventuelles asymptotes dans un repère orthonormé (O, I, J) .
- Unité graphique : 2 cm .