

EXERCICES SUR LES ETUDES DE FONCTIONS COMPORTANTS ln

EXERCICE 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x+1) + \ln(3x-2) = 3\ln 2$; b) $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$; c) $\ln(\ln x) = \ln(\ln(3x-6))$;
d) $\ln^3 x + \ln^2 x - 17\ln x + 15 = 0$; e) $\ln^4 x - 13\ln^2 x + 36 = 0$; f) $[\ln(x+1) - \ln(x-2)]^2 = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x+3) + \ln(x+5) \leq \ln(x+15)$; b) $\ln^2 x - \ln \frac{1}{x} - 2 > 0$; c) $\ln \frac{x(10-x)}{16} \leq 0$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ \ln(x+y) = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = 19 \\ 3\ln x - 5\ln y = -19 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y=m \\ \ln x + \ln y = \ln(m+1) \end{cases}$ (on discutera suivant les valeurs du réel m).

EXERCICE 2 :

1. Soit a et b deux nombres réels et f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de f passe par le point A (1 ; 0) et admette en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

2. On donne la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} g(x) = (x-1)^2 & \text{si } x < 1 \\ g(x) = \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
.

a) Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier la dérivabilité de g au point 1.

3.a) Soit x un nombre réel strictement supérieur à 1. En utilisant les inégalités des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[1; x]$; montrer que pour tout $x > 1$, on a : $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$. ①

b) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; 1[$; montrer que les inégalités ① sont vraies.

EXERCICE 3 :

1. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x$.

Étudier les variations de g ; calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x-1|\ln x$

a) Étudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

d) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque f^{-1} de f est-elle dérivable au point 0 ? Représenter sur le même graphique que ($\mathcal{C}$) la courbe (Γ) de f^{-1} .

EXERCICE 4 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = x \ln x$ et on appelle (Γ) sa courbe représentative. Étudier g et tracer (Γ) .
- 3.a) Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
- b) Montrer que les courbes (Γ) et $(\mathcal{C})$ sont asymptotes et préciser leurs positions relatives.
4. Étudier le sens de variation de la fonction dérivée f' . En déduire le signe de f' .
5. Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe $(\mathcal{C})$ sur le même graphique que (Γ) .

EXERCICE 5 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

- 1.a) Démontrer que pour nombre réel positif x on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- b) En déduire que pour tout $x > 0$: $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$.
- c) Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. Démontrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$ où φ est une fonction à préciser.
3. Étudier les variations de la fonction φ sur $]0; +\infty[$. En déduire le signe de φ .
4. Calculer la limite de f en $+\infty$; dresser le tableau de variation de f puis tracer $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 6 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation
2. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{x}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) .
3. Montrer que le point $I \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$. Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en I et construire $(\mathcal{C})$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique x_0 et que $x_0 \in \left] \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right[$.

EXERCICE 7 :

Pour tout entier naturel non nul n , on définit la famille de fonctions f_n par : $f_n(x) = x(\ln x)^n$ pour $x \neq 0$ et : $f_n(0) = 0$. On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0.
2. Étudier les variations de f_1 et construire (C_1) .
3. Étudier les variations de f_n pour $n > 1$. (On distinguera deux cas suivant la parité de n)
4. Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes
5. $(\mathcal{C})$. les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) lorsque x décrit l'intervalle $]1; +\infty[$.
6. Construire la courbe (C_2) sur le même graphique que (C_1) .

EXERCICE 8 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 - x - 4 \frac{\ln x}{x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormal.

1. Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 - 4 + 4\ln x$.
 - a) Étudier le sens de variation de g et déterminer son maximum sur $]0; +\infty[$.
 - b) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.
2. a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 . Vérifier que : $1 \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$.
4. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ et étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) .
5. Déterminer les coordonnées du point A de $(\mathcal{C})$, sachant que $(\mathcal{C})$ admet en A une tangente (T) parallèle à (Δ) .
6. Tracer les droites (Δ) et (T), puis la courbe $(\mathcal{C})$.
7. Soit la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$. Calculer $h'(x)$; en déduire les primitives de f sur $]0; +\infty[$.

EXERCICE 9 :

f est la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par $f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0; 1]$: $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{1+x}$ de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{j}\| = 2\|\vec{i}\|$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire : Soit u la fonction définie sur $]0; 1]$ par $u(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x$.

Dresser le tableau de variation de u . En déduire que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique a dans l'intervalle $]0; 1]$. Vérifier que : $0,54 \leq a \leq 0,55$.

2. Étude de la fonction :

a) $]0; +\infty[$ la dérivabilité de f en zéro. Que peut-on déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?

b) Démontrer que f est dérivable sur $]0; 1]$ et que $f'(x) = \frac{x(2+x)}{(1+x)^2} \times u(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

c) Démontrer que $f(a) = -\frac{a^2}{2+a}$ et tracer la courbe $(\mathcal{C})$ en mettant en évidence les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

EXERCICE 10 :

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln x - 1$.

Étudier le sens de variation de g . En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

2.a) Montrer que f est continue au point 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0 ; on précisera la valeur de sa dérivée en 0.

c) Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

d) Étudier le sens de variation de f , dresser son tableau de variation et tracer sa courbe $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 11 :

1. On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$.

a) Étudier les variations de g . Préciser $g(1)$.

b) En déduire le signe de g sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

2. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$; $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression de $f(x)$). Déterminer la limite de f en 0.

c) Montrer que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{1}{2x}g(x)$. En déduire le sens de variation de f .

d) Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormal.

3.a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0; 1]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une solution unique β sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

c) Montrer que $\alpha\beta = 1$. Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} ; en déduire un encadrement de α .

EXERCICE 12 :

Le repère (O, I, J) est orthonormé. Soit m un nombre réel strictement positif et f_m la fonction définie par :

$$f_m(x) = \ln(mx) + \frac{m}{\ln x}. \text{ On désigne par } (C_m) \text{ la courbe représentative de } f_m.$$

1.a) Déterminer l'ensemble de définition de f_m et étudier les branches infinies de (C_m) .

b) Déterminer la dérivée de f_m et démontrer que l'ensemble des extremums de (C_m) lorsque m décrit $]0; +\infty[$ est la courbe (Γ) d'équation : $y = 2\ln(x|\ln x|)$

c) Étudier la fonction $x \mapsto 2\ln(x|\ln x|)$ et tracer (Γ) .

2.a) Étudier la fonction f_1 et tracer la courbe (C_1) .

b) On désigne par g la restriction de f_1 à l'intervalle $[e; +\infty[$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. Tracer la courbe représentative de g^{-1} .

3. Démontrer que (C_1) admet un point d'inflexion dont l'abscisse α est solution de l'équation :

$$(\ln x)^3 - \ln x - 2 = 0. \text{ Déterminer une valeur approchée de } \alpha \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

EXERCICE 13 :

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln|\ln x|$.

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

2. Démontrer que pour tout nombre réel m , l'équation $\ln|\ln x| = m$ admet deux solutions x_1 et x_2 . Calculer le produit $x_1 x_2$