

Exercice n°9. Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

- 1) $\ln(2+5x) \leq \ln(x+6)$ 2) $\ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln 3$ 3) $\ln x \geq 2$ 4) $\frac{2(1+\ln x)}{x} > 0$
 5) $(\ln x)^2 + \ln x - 6 \leq 0$ 6) $\ln(2x-5) \geq 1$ 7) $(1,2)^n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ 8) $(0,8)^n \leq 0,1, n \in \mathbb{N}$

Exercice n°10. Un capital de 5000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%. Déterminer le nombre d'années n à partir duquel le capital acquis sera supérieur à 12000 euros

Exercice n°11. Etudier le signe des expressions suivantes :

$$A(x) = \ln x(\ln x + 1) \quad B(x) = 2x \ln(1-x) \quad C(x) = -x^2 \ln(x+1)$$

Exercice n°12. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4)$ 2) $f : x \rightarrow \ln\left(\frac{4-x^2}{x}\right)$ 3) $f : x \rightarrow \ln(4-x^2) - \ln x$ 4) $f : x \rightarrow \ln(x^2 - 4) - \ln(-x)$

Exercice n°13. Déterminer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) \ln x$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x)$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 4 + \ln x)$ 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2$
 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$ 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ (Poser $X = \frac{1}{x}$) 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$ (Poser $X = 2x$)

Exercice n°14.

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous

- 1) $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2 \ln x$ 2) $f(x) = \frac{2 \ln x}{\ln 3}$ 3) $f(x) = \ln(4-x) + \ln x$
 4) $f(x) = x \ln x - x$ 5) $f(x) = x^2 \ln x$ 6) $f(x) = \ln(2x-5)$
 7) $f(x) = \ln(-3x+1)$ 8) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ 9) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
 10) $f(x) = \ln(\ln x)$ 11) $f(x) = x \ln(2x-3)$ 12) $f(x) = 2x(1 - \ln x)$
 13) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 14) $f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2}$ 15) $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x - 4$
 16) $f(x) = \ln x^2$ 17) $f(x) = (\ln x)^2$ 18) $f(x) = \ln 1 - x^2$

Exercice n°15. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(ax+b)$, et C sa courbe représentative.

- 1) Déterminer les nombres a et b tels que $f(2) = 0$ et $f'(3) = \frac{3}{4}$

Quel est alors l'ensemble de définition de f ? Quel est le sens de variation de f ?

- 2) Déterminer les nombres a et b tels que la courbe C passe par le point $A(2; 0)$ et la tangente en A ait pour coefficient directeur -2 .

Exercice n°16.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2 \ln x$

- 1) Etudier le sens de variation de g
 2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

- 1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C) . Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0; +\infty[$. Montrer que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera
 3) Etudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f

- 4) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ) . Préciser les coordonnées du point B
- 5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α . Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α . Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que $0,31 < \alpha < 0,35$
- 6) Représenter succinctement la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

Exercice n°17.

Partie I

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$

- 1) Etudier le sens de variations de f . Calculer les limites de f aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de f .
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution l dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Déterminer l'entier n tel que $l \in]n; n+1[$
- 3) Déterminer le signe de $f(x)$

Partie II

La fonction g est définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- 1) Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en $+\infty$
- 2) Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$
- 3) Montrer que On calcule $g\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{1+4l}{8l^2}$. Dresser le tableau de variation de g .
- 4) Donner les équations des tangentes à la courbe Γ représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{l}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.
- 5) Représenter succinctement Γ et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice n°18. Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

- 1) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$
- 2) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$
- 3) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$
- 4) $f(x) = \frac{3}{3x-4}$ sur $I = \left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$
- 5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$
- 6) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I =]-\infty; -1[$
- 7) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ sur $I =]2; +\infty[$
- 8) $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $I = [2; +\infty[$
- 9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$
- 10) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $I =]-1; 1[$

Exercice n°19.

On considère la fonction définie sur $I = [4; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 4}{x-2}$

- 1) Trouver trois réels a, b , et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
- 2) En déduire une primitive de f sur $[4; +\infty[$

Exercice n°20. Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $I =]0; \frac{\pi}{2}[$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $I = [1; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $I =]1; +\infty[$

4) $f(x) = \tan x$ sur $I = \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$

Exercice n°21. Calculez les intégrales

1) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$

2) $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2} dx$

3) $\int_{-2}^0 \frac{4}{1-5x} dx$

4) $\int_1^2 \frac{x^2 + x - 2}{x^2} dx$

5) $\int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2-x} - \frac{4}{x+2} \right) dx$

6) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

7) $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1} dx$

Exercice n°22.

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$

1) Montrez que pour tout x de $]1; +\infty[$, $f(x) = x + 4 + \frac{3}{x-1}$

2) Calculez $\int_4^2 \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} dx$

Exercice n°23.

Soit f la fonction définie sur $\left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$ par $f(x) = \frac{6x^2 + 13x + 4}{3x + 2}$

1) Trouver trois nombres réels a , b et c tels que pour tout x de $\left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$, $f(x) = ax + b - \frac{c}{3x + 2}$

2) Calculez $\int_0^2 \frac{6x^2 + 13x + 4}{3x + 2} dx$

Exercice n°24. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x \ln x - x$

1) Déterminez la dérivée g' de g

2) Calculez $\int_1^e \ln x dx$

Exercice n°25. Calculez l'intégrale I en utilisant la formule d'intégration par parties: $I = \int_1^e x \ln x dx$

Exercice n°26.

On considère l'application f_n définie pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n(t) = \frac{1}{t(t^n + 1)}$, où n est un entier strictement positif.

1) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout réel t strictement positif: $f_n(t) = \frac{1}{t(t^n + 1)} = \frac{at^{n-1} + b}{t^n + 1} + \frac{c}{t}$

2) Montrer que: $\int_1^2 f_n(t) = \ln \left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n + 1}} \right)$

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer: $\int_1^2 \frac{t^{n-1} \ln t}{(t^n + 1)^2} dt$

Exercice n°27.

On considère la suite (u_n) de réels strictement positifs, définie par : $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

- 1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n) .
- 2) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) , et préciser sa limite.
- 3) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .
- 4) Exprimer la somme $\sum_{k=1}^n \ln(u_k)$ en fonction de n . En déduire le calcul de $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ en fonction de n .

Exercice n°28.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- 1) Donner la dérivée de f .
- 2) Donner le sens de variation de f .
- 3) Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
- 4) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- 5) Quel est le sens de variation de la fonction G définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $G(x) = \int_1^x f(t) dt$

Exercice n°29.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

- 1) Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. f est-elle dérivable en 0 ?
- 2) Etudier le sens de variations de f et étudier la limite de f en $+\infty$
- 3) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[e; +\infty[$
- 4) Soit T la tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse 1. Déterminer l'équation de T .
- 5) Tracer la courbe représentative (C) de f et la droite T dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 6) Soit $\lambda \in]0; e]$. On pose $I(\lambda) = \int_{\lambda}^e f(x) dx$
 - a) Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda \in]0; e]$
 - b) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0
 - c) En déduire l'aire de la partie d plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x=0)$ et $(x=e)$

Exercice n°30.

Soit la fonction f définie par $f(x) = x \ln(|x|)$

- 1) Donner le domaine de définition D de la fonction f ; déterminer une parité éventuelle ; et étudier les limites aux bornes du domaine de définition. Calculer pour tout x de D la dérivée de f (si elle existe !)
- 2) On étudie, pour cette question, le cas $x > 0$. Montrer qu'il existe un unique λ tel que $f'(\lambda) = 0$; montrer que l'on a : $0,3 \leq \lambda \leq 0,4$ (on pourra utiliser le fait que le réel e tel que $\ln e = 1$ vérifie $2,5 \leq e \leq 3$)
- 3) En déduire le tableau de variations de f (sur D)
- 4) Déterminer une primitive de g définie par $g(x) = \ln(x)$ (on précisera le domaine sur lequel on travaille)