

# Fonctions numériques d'une variable réelle

## 1.1. Définition d'une fonction

Soient A et B deux ensembles non vides.

Une relation de A vers B est une fonction de A vers B, si chaque élément de l'ensemble de départ A possède au **plus une (0 ou une)** image dans l'ensemble d'arrivée B.

A = ensemble de départ ou source, B = ensemble d'arrivée ou but

Notation

$f: A \rightarrow B$  « f envoie A dans B ou f de A vers B »

$x \mapsto f(x)$  « à x associe f(x) »

Exemples : Diagramme sagittal

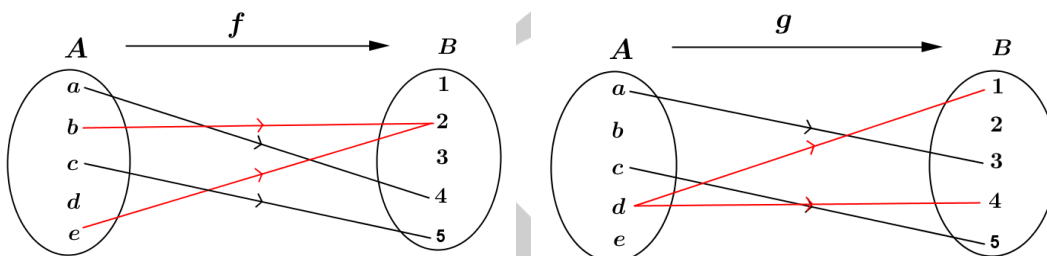


figure 1 : f est une fonction

g n'est pas une fonction

N.B : Si A et B sont des sous ensemble de  $\mathbb{R}$  alors on parle de fonction numérique d'une variable réelle.

## 1.2. Ensemble de définition d'une fonction

Soient A et B deux ensembles non vides. On appelle ensemble de définition d'une fonction de A vers B, l'ensemble des éléments de A ayant une image dans B par la fonction. Si f est la fonction on note  $D_f$ .

Notation : si  $f: A \rightarrow B$  alors  $D_f = \{x/x \in A, f(x) \in B\}$

Exemple : Dans le diagramme sagittal de la figure 1 :  $D_f = A \setminus \{d\} = \{a; b; c; e\}$

### 1.2.1. Fonction polynôme

☞ L'ensemble de définition d'une fonction polynôme f de A vers  $\mathbb{R}$  est :  $D_f = A$

☞ L'ensemble de définition d'une fonction polynôme f de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  est :  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$ .

### 1.2.2. Fonctions rationnelles

Soit u et v deux fonctions polynômes de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

On considère la fonction rationnelle f de A vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ .

L'ensemble de définition de f est :  $D_f = \{x/x \in A, v(x) \neq 0\}$ .

- Si l'équation  $v(x) = 0$  admet des solutions  $x_1, x_2, \dots$ , alors  $D_f = A \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$ .
- Si l'équation  $v(x) = 0$  n'admet pas de solution, alors  $D_f = A$ .

### 1.2.3. Fonctions irrationnelles

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions polynômes de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

On considère les fonctions irrationnelles  $f, g, h, p, q$  et  $r$  de  $A$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :

$$f(x) = \sqrt{u(x)}; g(x) = \sqrt{\frac{u(x)}{v(x)}}; h(x) = \frac{\sqrt{u(x)}}{\sqrt{v(x)}}; p(x) = \frac{\sqrt{u(x)}}{v(x)}; q(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}; r(x) = \sqrt{|u(x)|}$$

L'ensemble de définition de  $f$  est :  $D_f = \{x/x \in A; u(x) \geq 0\}$ .

L'ensemble de définition de  $g$  est :  $D_g = \{x/x \in A; \frac{u(x)}{v(x)} \geq 0 \text{ et } v(x) \neq 0\}$ .

L'ensemble de définition de  $h$  est :  $D_h = \{x/x \in A; u(x) \geq 0 \text{ et } v(x) > 0\}$ .

L'ensemble de définition de  $p$  est :  $D_p = \{x/x \in A; u(x) \geq 0 \text{ et } v(x) \neq 0\}$ .

L'ensemble de définition de  $q$  est :  $D_q = \{x/x \in A; v(x) > 0\}$ .

L'ensemble de définition de  $r$  est :  $D_r = \{x/x \in A; |u(x)| \geq 0\} = A$ .

### Rappels : Racine, factorisation et étude du signe d'un polynôme du second degré

Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

Pour déterminer les racines de  $P$ , factoriser et étudier le signe de  $P(x)$  on peut calculer le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Selon le signe de  $\Delta$  les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

| Signe de $\Delta$ | Racines de $P$                                                                                                                      | Forme factorisée de $P(x)$    | Tableau de signe de $P(x)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |           |           |                 |           |              |              |                         |                          |                         |  |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------|-----------------|-----------|--------------|--------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|--|
| $\Delta > 0$      | Deux racines distinctes<br>$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$<br><i>et</i><br><i>ou</i><br>$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ | $a(x - x_1)(x - x_2)$         | <div>Si <math>x_1 &lt; x_2</math></div> <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>P(x)</math></td><td>signe de <math>a</math></td><td><math>\bigcirc</math> signe de <math>-a</math></td><td><math>\bigcirc</math> signe de <math>a</math></td><td></td></tr></table> | $x$       | $-\infty$ | $x_1$           | $x_2$     | $+\infty$    | $P(x)$       | signe de $a$            | $\bigcirc$ signe de $-a$ | $\bigcirc$ signe de $a$ |  |
| $x$               | $-\infty$                                                                                                                           | $x_1$                         | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | $+\infty$ |           |                 |           |              |              |                         |                          |                         |  |
| $P(x)$            | signe de $a$                                                                                                                        | $\bigcirc$ signe de $-a$      | $\bigcirc$ signe de $a$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |           |           |                 |           |              |              |                         |                          |                         |  |
| $\Delta = 0$      | Une racine double<br>$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$                                                                                    | $a(x - x_1)(x - x_1)$         | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-\frac{b}{2a}</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>P(x)</math></td><td>signe de <math>a</math></td><td><math>\bigcirc</math> signe de <math>a</math></td><td></td></tr></table>                                                                                                               | $x$       | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ | $P(x)$       | signe de $a$ | $\bigcirc$ signe de $a$ |                          |                         |  |
| $x$               | $-\infty$                                                                                                                           | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |           |           |                 |           |              |              |                         |                          |                         |  |
| $P(x)$            | signe de $a$                                                                                                                        | $\bigcirc$ signe de $a$       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |           |           |                 |           |              |              |                         |                          |                         |  |
| $\Delta < 0$      | Pas de racine                                                                                                                       | $P(x)$ n'est pas factorisable | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>P(x)</math></td><td colspan="2">signe de <math>a</math></td></tr></table>                                                                                                                                                                                                     | $x$       | $-\infty$ | $+\infty$       | $P(x)$    | signe de $a$ |              |                         |                          |                         |  |
| $x$               | $-\infty$                                                                                                                           | $+\infty$                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |           |           |                 |           |              |              |                         |                          |                         |  |
| $P(x)$            | signe de $a$                                                                                                                        |                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |           |           |                 |           |              |              |                         |                          |                         |  |

## Travaux Dirigé

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe : TSE

2024 - 2025

### Partie A : Les préliminaires

#### Exercice 01

Détermine l'ensemble de définition des fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  suivantes :

$$f_1(x) = 5x^2 - 7x + 3$$

$$f_2: [-1; 100] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 5x + 4$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 7}{3x + 12}$$

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 7}{x^2 + 4}$$

$$f_4: [-3; 25] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 7x + \frac{5}{x^4 - 64}$$

$$f_5: x \mapsto \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^3 + 8}$$

$$f_6: x \mapsto 2x + 3 + \frac{5}{(x + 3)^2}$$

$$f_7(x) = \tan(x)$$

$$f_8(x) = \frac{\cos(x) - 3}{\sin x + \cos x}$$

$$f_9(x) = \frac{\cos(x) - 3}{2 \sin 3x + 1}$$

$$f_{10}(x) = \frac{\cos(x) - 3}{2 \sin 3x + 7}$$

$$f_{11}(x) = \frac{x^2 + 3}{|x + 2| + 5}$$

$$f_{12}(x) = \frac{x^2 - 6x}{|x + 2| - |5x - 3|}$$

$$g_1(x) = \sqrt{-7x + 3}$$

$$g_2(x) = x - \frac{3}{2} \sqrt{7x^2 - 5x - 2}$$

$$g_3(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 + x + 6}$$

$$g_4(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$g_5(x) = \sqrt{\frac{3x - 7}{x + 4}}$$

$$g_6(x) = \frac{\sqrt{-x^2 - x + 2}}{\sqrt{2x + 4}}$$

$$g_7(x) = \frac{\sqrt{x - 2} - 5}{x^2 - 7x}$$

$$g_8(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{\sqrt{x^2 - 3x - 2}}$$

$$g_9(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 6}}{x^2 - 9x}$$

$$g_{10}(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 8}}$$

$$g_{11}(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$g_{12}(x) = -2 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - x}}$$

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{1+x^2} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \sqrt{1+x} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ g(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$h_1(x) = \sqrt{|7x^2 - 5x - 2|}$$

$$h_2(x) = \sqrt{|7x - 2| + 5}$$

$$h_3(x) = \sqrt{-|7x - 2| + 5}$$

$$h_4(x) = \sqrt{|7x - 2| - |-5x + 3|}$$

$$h_5(x) = \sqrt{|7x - 2| + |-5x + 3|}$$

$$h_6(x) = \frac{x^2 + 3}{E(x) - 2}$$

$$h_7(x) = \frac{x^2 + 8}{5E(2x - 3)}$$

$$h_8(x) = \frac{2 - x}{2E(x) + 3}$$

$$h_9(x) = \frac{x^2 + 8}{x - E(x)}$$

$$h_{10}(x) = \frac{x^2 + 8}{x + E(x)}$$

$$h_{11}(x) = \frac{\sqrt{2x + 4}}{E(x) - 2}$$

$$h_{12}(x) = \sqrt{x - E(x)}$$

### Exercice 02

Calcule les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 10}{x - 2}$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2}$  ; e)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{2 - \sqrt{2x+6}}$  ; f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{1 - \sqrt{-2x+3}}$  ; g)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 1} - 3}{x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 2}}$   
 h)  $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{54 - 2x}{\sqrt[3]{x} - 3}$  ; i)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$  ; j)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-10} + 2}{6 - 3x}$  ; k)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{7x^2 + 9} + \sqrt{2x^2 + 7} - 7}{x^2 - 1}$

### Exercice 03

Calcule les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^3 + 4x^2 + 5x + 2$  ; 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x + 3}{x^5 - 1}$  ; 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 10}{8x^3 - 4x + 3}$  ;  
 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 - x^2 - 3}{6x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$  ; 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 2}$  ; 6)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 2}$  ;  
 7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 2}$  ; 8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{5x^2 + 3x + 1}$  ; 9)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x + 5 - \sqrt{x^2 + 3x + 1}$   
 10)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 2}$  ; 11)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \sqrt{x^2 + 4x + 7}$  ; 12)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x + \sqrt{9x^2 + 3x + 7}$   
 13)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 1} - 2x + 3$  ; 14)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 8}}$  ; 15)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - x}}\right)$   
 16)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{6x-1}{5+8x}}$  ; 17)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5-9x^2}{x^5+66x+1}}$  ; 18)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+3x+5}{x-1}}$  ; 19)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2-x+2}{3-x^3}}$ .

### Exercice 04

A. Calcule les limites suivantes : (On pourrait utiliser le théorème des gendarmes)

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 + 23 + \cos x}{x^4}$  ; 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 + 23 + x \sin x}{x^4}$  ; 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 + x \cos 2x}{5x}$   
 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2}{5x^2 - x \cos 2x}$  ; 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2 \sin x}{5x^2 - x \cos 2x}$

B. On rappelle que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;  $E(x) \leq x < E(x) + 1$  où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

1. Démontre que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;  $x - 1 < E(x) \leq x$ .

2. Déduis-en  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+5+E(x)}{6x^2+20}$

### Exercice 05

A) Calcule les limites suivantes :

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x}$  ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 7x}$  ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x - \sin x}{2x}$  ; 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin 7x - \tan 3x}$  ;  
 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 7x}{1 - \cos x}$  ; 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{1 - \cos 4x}$  ; 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos x}{\sin 3x + \sin 9x}$  ; 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x - 3 \cos x + 2}$  ;  
 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$  ; 10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(\tan 2x)}$  ; 11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 22x)}{\sin(23x)}$  ; 12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan 3x}{(\sqrt{1+x} - 1)^2}$

B) Calcule les limites suivantes en utilisant les changements de variables

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}$  ; 2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{3x - \pi}$  ; 3)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 3x}{\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}}$  ; 4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$  ; 5)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$  ;  
 6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{3x - \pi}$  ; 7)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$  ; 8)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x}$  ; 9)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2x - \pi) \cos x}{1 - \sin x}$

### Exercice 06

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ . soit  $(C)$  la représentation graphique de la fonction numérique  $f$ . Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, détermine  $D_f$ , calcule les limites aux bornes de  $D_f$  puis étudie les branches infinies (asymptotes et branches paraboliques).

- a)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  ; b)  $f(x) = \frac{6x - 1}{12 - 4x}$  ; c)  $f(x) = \frac{7 - 3x}{x^2 - x - 6}$  ;  
 d)  $f(x) = -2x + 3 - \frac{7}{(x - 1)^2}$  ; e)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 + 3}$  ; f)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x + 2}$  ;  
 g)  $f(x) = \frac{x^3 + 4x - 5}{x + 2}$  ; h)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$  ; i)  $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 3x - 4}$  ;  
 j)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}}{\sqrt{x^2 - 9}}$  ; k)  $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 1 - \sqrt{x + 1}}$  ; l)  $f(x) = -x + \sqrt{|x^2 + x - 2|}$

### Exercice 07

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ . soit  $(\tau)$  la représentation graphique de la fonction numérique  $g$ . Dans chacun des cas suivants, montre que la droite  $(D)$  est une asymptote oblique à la courbe  $(\tau)$ . On précisera la position relative de  $(D)$  par rapport  $(\tau)$ .

- 1)  $g(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x - 2}$  ;  $(D): y = 2x + 1$   
 2)  $g(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1}$  ;  $(D): y = 3x - 2$   
 3)  $g(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 1}$  ;  $(D): y = x + 3$

### Exercice 08

A. Dans chacun des cas suivants étudie la continuité de  $f$  en  $x_0$  :

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x} ; si x \neq 0 \\ f(0) = 5 \end{cases} \quad x_0 = 0 ; b) \begin{cases} f(x) = \sin x + \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} ; si x \neq 0 \\ f(0) = \sqrt{2} \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$c) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} ; si x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad x_0 = 1 ; d) \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 ; si x \in [0; 1[ \\ f(x) = \frac{2x - 1}{x} si x \in ]1; 3] \end{cases} \quad x_0 = 1$$

B. Trouve la valeur qu'il faut donner à  $m$  pour que  $f$  soit continue en  $x_0$

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x + 5}}{x - 2} ; si x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases} \quad x_0 = 2$$

$$b) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{x + 13} - 4} ; si x \neq 3 \\ f(3) = m + 2 \end{cases} \quad x_0 = 3$$

### Exercice 09

A. On considère la fonction numérique à variable réelle :  $f: x \mapsto \frac{2 - \sqrt{3x^2 + 1}}{x - 1}$ .

1)  $f$  est elle continue en 1 ? justifie ta réponse.

2)  $f$  est prolongeable par continuité en 1 ? Si oui précise son prolongement  $g$ .

C. considère la fonction  $g$  de la variable réelle  $x$  définie par  $g(x) = \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$

1) Déterminer son ensemble de définition  $D_g$ .

2) Montrer que  $g$  admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par  $h$ .

3) Montrer que  $h$  est dérivable en 2 puis donner l'équation de la tangente à la courbe (C) de  $h$  au point d'abscisse 2.

### Exercice 10

A. On considère la fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + 1 & si x \in ]-\infty; 2] \\ f(x) = 2ax + b & si x \in ]2; +\infty[ \\ f(2) = -3 \end{cases}$$

Détermine les réels  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue en  $x_0 = 2$ .

B. On considère la fonction  $g$  définie par : 
$$\begin{cases} g(x) = x^2 + ax & si x \in ]-\infty; -1] \\ g(x) = 2x - 1 & si x \in ]-1; 1] \\ g(x) = b(x^2 - 1) & si x \in ]1; +\infty[ \end{cases}$$

1. Détermine le réel  $a$  pour que  $g$  soit continue en  $x_0 = -1$ .

2. Peut-on déterminer le réel  $b$  pour que  $g$  soit continue en  $x_0 = 1$ .

C. On considère la fonction  $h$  définie par : 
$$\begin{cases} h(x) = 2x^2 + ax - 3 & si x \leq 1 \\ h(x) = \frac{2x+b}{x} & si x > 1 \end{cases}$$

Détermine les réels  $a$  et  $b$  pour que  $h$  soit continue et dérivable en  $x_0 = 1$ .

D. Soit la fonction  $r$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$  par :  $r(x) = \frac{x^2 + ax + b}{(x-1)(x-2)}$

1. Détermine les réels  $a$  et  $b$  pour que  $r$  admet un prolongement par continuité en 1 et en 2.

2. Détermine alors la fonction prolongement  $q$  de  $r$ .

### Exercice 11

A. On donne  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 2$

Calcule  $f'(x)$ ;  $f''(x)$ ;  $f'''(x)$  et  $f^{(4)}(x)$

B. On donne  $g(x) = \cos 3x + 2$

Calcule  $g'(x)$ ;  $g''(x)$ ;  $g'''(x)$  et  $g^{(4)}(x)$ .

C. Calcule la dérivée de  $f$  dans les cas suivants :

1)  $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ ; 2)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)^3$ ; 3)  $f(x) = \frac{3x+4}{2x-5}$ ; 4)  $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$

5)  $f(x) = \frac{x^3-3x^2+x+1}{3x-1}$ ; 6)  $f(x) = \frac{x^3-3x^2+x+1}{(x-1)^2}$ ; 7)  $f(x) = 3x+2 + \frac{3}{(x+1)^2}$ ;

8)  $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x+2}$ ; 9)  $f(x) = -\frac{1}{3x} + \frac{2}{5x^3} - \frac{7}{2-3x}$ ; 10)  $f(x) = \sqrt{x^2-6x+5}$ ;

11)  $f(x) = x + \sqrt{x^2-x-2}$ ; 12)  $f(x) = (x^2-5x+2)\sqrt{x^2+5}$ ; 13)  $f(x) = \sqrt{(x^2-5)(1-3x)}$ ;

14)  $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}$ ; 15)  $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ ; 16)  $f(x) = \frac{(x^2+2)(3x-5)^4}{x-7}$ ;

17)  $f(x) = \cos(3x) + \sin(-2x+5)$ ; 18)  $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2x-5}\right)$ ; 19)  $f(x) = \sin(\sqrt{-2x+5})$ ;

20)  $f(x) = \tan(2x+3) + \cotan(-3x)$ .

## Partie B : Les fonctions Polynômes

### Exercice 12 \*

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ ; où  $a$ ;  $b$  et  $c$  sont des réels.

1) Calcule  $f'(x)$ .

2) Détermine les réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sachant que  $f$  admet 1 pour extremum en  $x = 0$  et  $-3$  pour extremum en  $x = 2$ .

3) Étudie la fonction  $f$ .

4) Montre que l'équation  $f(x) = 0$  admet trois solutions  $x_1$ ;  $x_2$  et  $x_3$  dans  $\mathbb{R}$ .

5) Montre que  $x_1 \in [-1; 0]$ ; une solution unique  $x_2 \in [0; 1]$  et  $x_3 \in [2; 3]$ .

6) Déduis - en le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 13\*\*

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$  et  $(\Gamma)$  sa courbe dans un repère orthonormé

1) Étudie les variations de  $f$  sur  $D_f$ .

2) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

a. Montre que  $g$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur un intervalle  $K$  que l'on précisera.

b. Déduis que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[0; +\infty[$ .

c. Justifie que  $\alpha \in [1; 2]$  puis détermine une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,01 près.

d. Déduit le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$

3) On désigne par  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ .

- Calcule  $g(3)$ ,  $g^{-1}(16)$  et  $(g^{-1})'(16)$ .
  - Calcule  $g^{-1}(-2)$  et  $(g^{-1})'(-2)$ . Interprète le résultat de  $(g^{-1})'(-2)$ .
  - Montre que  $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{a^2+2a}$ .
  - Donne le tableau de variation de  $g^{-1}$ .
- 4) Construis  $(\Gamma)$  puis la courbe  $(\Gamma^{-1})$  de  $g^{-1}$  dans le même repère.

#### Exercice 14\*

Soit  $f$  la fonction polynôme définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x$ .

- Calcule la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , puis sa dérivée seconde  $f''$ .
- a) Détermine les variations de la fonction  $f'$  et le tableau de variation de  $f'$ .  
b) Prouve que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que cette solution appartient à l'intervalle  $]-\infty; -1]$ . Donne un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
- a) Détermine le signe de la fonction  $f'$ , puis dresse le tableau de variation de la fonction  $f$ .  
b) Montre que  $f(\alpha) = \frac{3\alpha(4-\alpha)}{4}$ .  
c) Détermine le nombre de racines du polynôme  $f$ .

#### Exercice 15\*

Etudie puis représente graphiquement les fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  suivantes :

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1; \quad g(x) = x^4 - 10x^2 + 9; \quad h(x) = |x^2 - 4x - 5|$$

### Partie C : Les fonctions rationnelles

#### Exercice 16\*

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-1}$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des réels.

Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  pour que la courbe  $(C)$  de passe par les points  $A(0 ; -6)$  et  $B(2 ; 4)$ , puis admet au point  $B$  une tangente de coefficient directeur égal à  $-3$ .

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ . Soit  $(C)$  sa courbe.

- a) Montrer qu'il existe des réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ .  
b) En déduire l'équation de l'asymptote oblique  $(\Delta)$  à la courbe  $(C)$ .  
c) Etudier la position relative de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$ .
- Étudier les variations de la fonction  $f$ ;
- Montrer que le point  $I$  intersection des asymptotes est centre de symétrie de  $(C)$ .
- Donner une équation de la tangente à  $(C)$  en  $x = 2$ .
- Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe  $(C)$  et ses asymptotes.
- Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel  $m$  l'existence et le signe des racines de l'équation  $x^2 - (3+m)x + m + 6 = 0$ .

#### Exercice 17\*\* : Extrait de composition TSE Bamako Rive Gauche

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+d}$  où  $a, b, c, d$  sont des réels et  $(C_f)$

sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Trouver les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  et  $d$  sachant que la droite d'équation  $x = 3$  est asymptote et (Cf) passe par les points A( 2 ; 3 ) , B( 4 ; 7 ) et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
- 2) Dans la suite du problème on prendra  $a = 1$  ;  $b = -1$  ;  $c = -5$  et  $d = -3$ 
  - a) Etudier la fonction  $f$
  - b) Etudier la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique
  - c) Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $[4 ; +\infty[$  réalise une bijection de  $[4 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
  - d) Calculer  $g(5)$  ;  $g(6)$  ;  $(g^{-1})'(\frac{15}{2})$
- 3) Montrer que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on déterminera
- 4) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$
- 5) a- Montrer que  $\forall x \in [4,5] \text{ on a } |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$   
 b- En déduire que  $|f(x) - \frac{15}{2}| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$
- 6) Tracer (Cf) dans le repère  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  ainsi que (Cg<sup>-1</sup>) la courbe de g<sup>-1</sup>

**Exercice 18\*\* : Extrait de composition TSE 2007 Bamako Rive Droite**

**Partie A :**

- 1) Démontrer que l'équation :  $x^3 + 3x^2 + 10x + 5 = 0$  a une unique solution réelle  $x_0$ .
- 2) Vérifier que  $] -0,59; -0,58[$  est un encadrement de  $x_0$ .

**Partie B :**

- 3) On considère la fonction numérique  $f$  à variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x + 1)^2}$$

- 1) Quel est son ensemble de définition ?
- 2) Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variation.
- 3) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  tels que pour tout  $x$  élément de son ensemble de définition,  $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$ . En déduire que la courbe représentative (C) de  $f$  admet une asymptote oblique  $\Delta$  dont on précisera une équation.
- 4) a) Etudier la position relative de (C) et  $\Delta$ .  
 b) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes dans le plan muni d'un repère orthonormé et donner une équation de la tangente à (C) en son point d'abscisse  $x_1 = -2$ .
- 5) a) Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $I = [1; +\infty[$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser.  
 b) Tracer la courbe de la bijection réciproque  $g^{-1}$  dans le même repère.  
 c) Calculer  $g(3)$  et en déduire le coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $g^{-1}$  au point d'abscisse  $\frac{89}{16}$ . Donne le tableau de variation de  $g^{-1}$ .

**Partie C :**

On appelle D le domaine du plan délimité par (C),  $\Delta$ , l'axe des ordonnées et la

droite d'équation  $x = 4$

- 1) Montre qu'il existe des réels  $\alpha, \beta, \gamma$ , et  $\delta$  tels que pour tout  $x$  élément de son ensemble de définition,  $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}$
- 2) Détermine l'aire du domaine D.

#### Partie D :

- 1) Détermine l'abscisse du point A de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à  $\Delta$ .
- 2) Déduis-en graphiquement, suivant les valeurs du réel  $m$ , le nombre de solution de l'équation  $f(x) = x + m$ .
- 3) Montre que les abscisses des points d'intersections de (C) et la droite d'équation  $y = x + m$  sont les solutions de l'équation (E):  $(m-1)x^2 + (2m-9)x + m-5 = 0$ .
- 4) Pour quelles valeurs de  $m$ , (C) et la droite d'équation  $y = x + m$  ont-elles deux points communs Q et R ?

#### Exercice 19\*\*

##### Partie A : Etude de la fonction auxiliaire

On considère le polynôme  $P$  définie :  $P(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 12x - 9$

- 1) Calcule  $P(1)$  et  $P(3)$ .
- 2) Détermine les réels  $a$  et  $b$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(3-x)(ax^2 + b)$ .
- 3) Etudie le signe de  $P(x)$  suivant les valeurs de  $x$  sur  $\mathbb{R}$ .

##### Partie B : Etude de la fonction $f$

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x - 3}{(x-1)^2}$$

Soit  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Détermine l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$  et montre qu'il existe des réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

- 2) Calcule les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
- 3) Montre que la droite  $(\Delta): y = -x + 1$  est une asymptote à  $(\Gamma)$ . Précise l'autre asymptote
- 4) Démontre que  $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^4}$ . Déduis le signe de  $f'(x)$  sur  $D_f$ .
- 5) Etablie le tableau de variation de  $f$ .
- 6) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $] -\infty; 1[$ .
  - e. Montre que  $g$  réalise une bijection de  $] -\infty; 1[$  sur un intervalle  $K$  que l'on précisera.
  - f. Déduis que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $] -\infty; 1[$ .
  - g. Justifie que  $\alpha \in [-1; 0]$  puis détermine une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,1 près.
  - h. On désigne par  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ . Calcule si possible  $(g^{-1})'(-3)$ .
  - i. Donne le tableau de variation de  $g^{-1}$ .
- 7) Construis  $(\Gamma)$  et ses asymptotes puis la courbe  $(\Gamma^{-1})$  de  $g^{-1}$  dans le même repère.

#### Exercice 20 : Extrait de Bac TSExp 2019 Mali

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ , et on note  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 1cm).

1) On pose  $g(x) = x^3 + 3x + 8$ .

a) Etudie le sens de variation de  $g$ , et montre que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$  dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

b) Précise le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

2) a) Calcule  $f'(x)$  et étudie le sens de variation de  $f$ .

b) Etudie les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , puis dresse le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Montre qu'il existe quatre réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$ .

b) En déduis que  $C$  admet une asymptote oblique  $\Delta$  et étudie la position de  $C$  par rapport à  $\Delta$ . Vérifie en particulier que  $C$  rencontre  $\Delta$  en un point unique  $A$ .

4) Détermine les abscisses des points  $B$  et  $B'$  de  $C$  admettant une tangente parallèle à  $\Delta$ .

5) Vérifie que  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ; en déduis une valeur approchée de  $f(\alpha)$ .

6) Construis la courbe  $C$ .

### Exercice 21\*\*

**Partie A :** On donne la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.

2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $2,19 < \alpha < 2,20$

3) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$

**Partie B** On considère la fonction numérique  $h$  à variable réelle  $x$  définie par :

$$h(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

4) Précise son ensemble de définition.

5) Etudie les variations de  $h$ , puis dresse son tableau de variation.

6) a) Détermine les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que  $\forall x \in D_h, h(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$ .

b) Déduis-en que la courbe  $(C)$  de  $h$  admet une asymptote oblique  $\Delta$  dont on précisera une équation.

c) Etudie la position relative de  $(C)$  et  $\Delta$ .

7) Trace la courbe  $(C)$  et ses asymptotes.

8) Détermine l'abscisse des points de la courbe  $(C)$  où la tangente est parallèle à la droite d'équation  $y = x + 2$ .

### Exercice 22 \*

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{|x| - 1}$$

- 8) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$  :
- 9) Ecrire  $f(x)$  sans le symbole de la valeur absolue.
- 10) Calcule les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ . Préciser les asymptotes à la courbe (C) de  $f$ .
- 11) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 ; donner une interprétation géométrique du résultat.  
b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
c) Construire (C) et ses asymptotes.
- 12) a) Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $I = ]-1 ; 1[$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  que l'on précisera.  
b) Calculer  $g(0)$ ,  $g\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $(g^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$  où  $g^{-1}$  est la réciproque de  $g$ .

### Exercice 23 \*

Soit  $f$  la fonction numérique de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = |x| - 2 + \frac{4}{(x-1)^2}$ , ( $C_f$ ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Détermine l'ensemble de définition de  $f$
- 2) Ecris  $f(x)$  sans le symbole de la valeur absolue.
- 3) Calcule les limites aux bornes de  $D_f$ . Précise les équations des asymptotes à ( $C_f$ ).
- 4) Etudie la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$ .
- 5) Etudie la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$ . Interprète graphiquement vos résultats.
- 6) Précise l'ensemble de dérivabilité de  $f$  puis calcule  $f'$ .
- 7) Etudie le sens de variations de  $f$  puis dresse son tableau de variations.
- 8) Construis la courbe ( $C_f$ ) de  $f$  et ses asymptotes.
- 9) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]-\infty; -1]$
- a) Montre que  $g$  réalise une bijection de  $]-\infty; -1]$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- b) Calcule  $g(-4)$ ,  $g(-5)$  et  $(g^{-1})'\left(\frac{54}{25}\right)$ .
- c) Dresse le tableau de variations de  $g^{-1}$  bijection réciproque de  $g$ .
- d) Construis la courbe ( $C_{g^{-1}}$ ) de  $g^{-1}$  dans le même repère que ( $C_f$ ).

### Exercice 24\*\*

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$  et soit (C) sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Etudier la fonction  $f$  (limites, variations).
- 2) a- Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  et  $d$  tel que  $\forall x \neq 1$  on a :  $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$   
b- En déduire que la droite (D) d'équation  $y = x - 2$  est asymptote à (C)  
c- Préciser la position de la courbe (C) et la droite (D) et les coordonnées du point commun I à la courbe (C) et (D).
- 3) Tracer (C) et (D)
- 4) a- Déterminer l'abscisse du point J de la courbe (C) où la tangente est parallèle (D) ; puis l'équation de cette tangente. Tracer cette tangente (T).

b- En déduire graphiquement suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation

$$f(x) = x + m.$$

5) On se propose de retrouver par calcul le résultat trouvé en 4)

a) Montrer que les abscisses des points d'intersection de (C) et de la droite d'équation

$y = x + m$  sont les solutions de l'équation :

$$(E) : (m + 2)x^2 + (-2m - 7)x + m + 4 = 0$$

b) Trouver suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation (E).

c) Pour quelles valeurs de  $m$  la courbe (C) et la droite d'équation  $y = x + m$  ont-elles deux points communs M et N ?

d) Dans ce cas, calculer en fonction de  $m$ , l'abscisse du milieu I de [M N].

e) Montrer que lorsque  $m$  varie, le point I appartient à la courbe (C') d'équation :

$$y = x + \frac{7 - 4x}{2x - 2}$$

## Partie D : Analyse du Tableau de variation et des courbes

### Exercice 25 \*

Dresser le tableau de variation de la fonction numérique donnée partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour  $f$  :

- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que l'équation  $f'(x) = 0$  admet les solutions  $x = -1$  et  $x = \frac{3}{2}$
- $f$  n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée  $f'$  et les points  $E_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$  et  $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$  sont ses extremums
- les droites  $y = -2$  et  $y = 3$  sont ses asymptotes respectives en  $-\infty$  et  $+\infty$

2) Pour  $g$  :

- $g$  est définie sur  $] -\infty; 0] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$  et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et  $\frac{5}{2}$
- $g$  est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite  $y = -x$  est à la fois asymptote oblique en  $-\infty$  et  $+\infty$
- les points de coordonnées  $(0; -3)$  et  $\left(\frac{5}{2}; 1\right)$  sont sur la courbe de  $g$ .

3) Pour  $h$  :

- $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{0; 2\}$  et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- le point de coordonnées  $(0,3; 0,4)$  est l'extremum maximum absolue de la courbe  $(C_h)$  et  $h$  est croissante sur  $[0; 0,3] \cup [2; +\infty[$
- les droites d'équations  $y = -1$  et  $y = -2x + 1$  sont asymptotes de  $(C_h)$  respectivement en  $-\infty$  et  $+\infty$
- les points de coordonnées  $(0; 0); (1; 0);$  et  $(2; -2)$  appartiennent à  $(C_h)$

### Exercice 26 \*

Soit  $g$  la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

|         |           |            |     |            |     |
|---------|-----------|------------|-----|------------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$       | $1$ | $+\infty$  |     |
| $g'(x)$ | $+$       | $\bigcirc$ | $-$ | $\bigcirc$ | $+$ |
| $g(x)$  |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
|         |           |            |     |            |     |
| </      |           |            |     |            |     |

La fonction  $g$  a pour formule explicite :  $g(x) = ax^3 + bx + c$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $g$ .
- 2) Calculer  $g'(x)$ .
- 3) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  en utilisant les données du tableau de  $g$ .
- 4) Donner une équation de la tangente ( $T_0$ ) à la courbe ( $C$ ) de  $f$  au point d'abscisse 1.
- 5) Tracer la courbe ( $C$ ) de  $g$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.

### Exercice 27 \*

Soit  $f$  une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

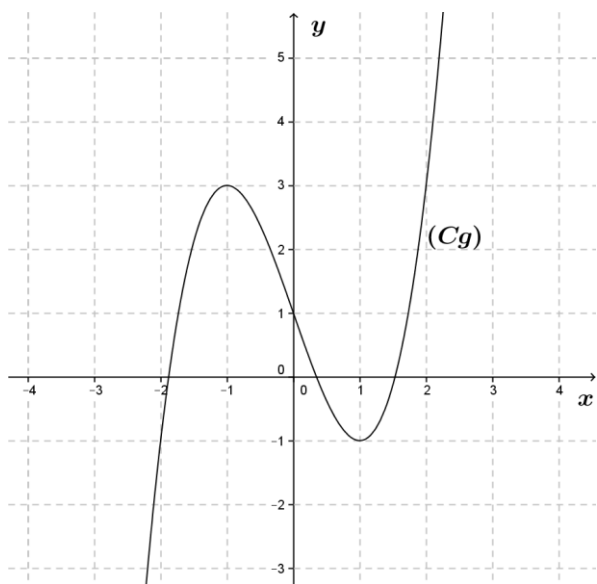
|         |           |      |           |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-1$      | $0$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f$     | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ | $2$ | $+\infty$ |     |

La fonction  $f$  est de la forme :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ .

- 1) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
- 2) Trouver les réels  $a, b$  et  $c$  en utilisant les données du tableau.
- 3) Montrer que la courbe ( $C$ ) admet une droite asymptote oblique ( $D$ ). Étudier la position de ( $C$ ) par rapport à ( $D$ ).
- 4) Donner le signe de  $f(x)$  pour  $x$  élément du domaine de définition de  $f$ .
- 5) Tracer la courbe ( $C$ ) de  $f$  et ses asymptotes dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- 6) Interpréter graphiquement le résultat de la question 4).

### Exercice 28\*

Soit la fonction  $g$  définie par sa représentation graphique ci-dessous



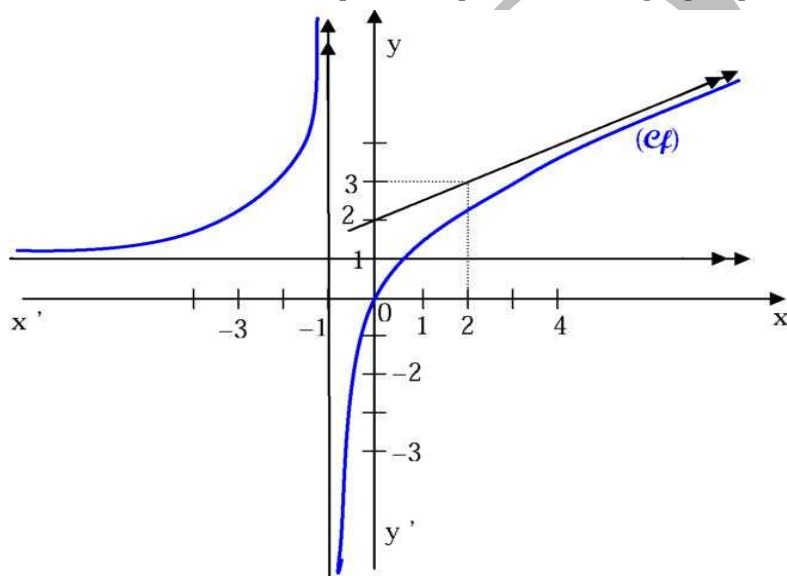
A partir des renseignements fournis par la courbe  $(C_g)$  de  $g$ .

- 6) Détermine l'ensemble de définition  $D_g$  de  $g$ .  $g$  est-elle continue sur  $D_g$  ?
- 7) Détermine les limites de  $g$  aux bornes de  $D_g$ .
- 8) Détermine les extremums relatifs de  $(C_g)$ .
- 9) Dresse le tableau de variations de  $g$ .
- 10) On suppose que la fonction  $g$  a pour formule explicite :  
 $g: x \mapsto ax^3 + bx + c$ .  
 a) Calcule  $g'(x)$ .

Détermine les réels  $a, b$  et  $c$  en utilisant les données de la courbe  $(C_g)$  de  $g$ .

### Exercice 29\*

Soit  $f$  la fonction définie par sa représentation graphique  $(C_f)$  ci-dessous

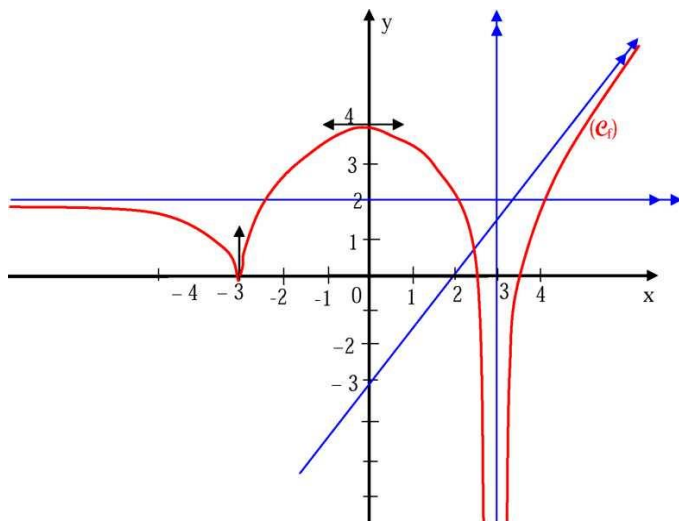


A partir des renseignements fournis par la courbe  $(C_f)$  de  $f$ . Déterminer :

- 1) Le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
- 3) une équation de chacune des asymptotes à la courbe  $(C_f)$  de  $f$ .
- 4) le tableau de variation de  $f$ .

### Exercice 30 \*\*

Soit la fonction  $f$  définie par sa représentation graphique ci-dessous



- 1) Détermine l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Détermine les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
- 3) Détermine une équation de chacune des asymptotes éventuelles à la courbe  $(Cf)$  de  $f$ .
- 4) La fonction  $f$  est-elle continue; dérivable en  $x_0 = -3$  ? Justifie ta réponse.
- 5) Dresse le tableau de variation de  $f$ .
- 6) Donne une équation de la tangente  $(T)$  à  $(Cf)$  au point d'abscisse  $x_0 = 0$ .
- 7) Montre que la restriction  $g$  de  $f$  à  $[0; 3[$  est une bijection de  $[0; 3[$  sur une partie  $J$  de  $\mathbb{R}$  que l'on précisera.
- 8) Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Détermine graphiquement suivant les valeurs de  $m$  le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$ .

## Partie E : Les inégalités des accroissements finis

### Exercice 31 \*\*

Soit  $\varphi: x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ .

- 1) Calculer  $\varphi'(x)$  et  $\varphi''(x)$ .
- 2) Montrer que  $\forall x \in [1; 2], \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \varphi'(x) \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$ .
- 3) En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [1; 2]; \frac{x+1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1+x^2} \leq \frac{2x-2+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}.$$

### Exercice 32 \*\*

Soit la fonction  $g: x \mapsto \frac{x+4}{x+1}$

- 1) Étudier les variations de la fonction  $g$ .
- 2) Montrer que  $g$  est une bijection de  $]-1; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- 3) Calculer  $(g^{-1})'(5)$ .
- 4) Montrer que pour tout réel  $x$  de  $[1; 3]$  on a  $:-\frac{3}{4} \leq g'(x) \leq -\frac{3}{16}$ .
- 5) En utilisant les inégalités des accroissements finis, En déduire que :

$$\forall x \in [1; 3]; \quad \frac{13 - 3\alpha}{4} \leq g(\alpha) \leq \frac{43 - 3\alpha}{16}.$$

### Exercice 33 \*\*

Soit la fonction numérique à variable réelle :  $g(x) = \sin(x)$

Montre que  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]; \frac{1}{2}x \leq g(x) \leq x$ .

### Exercice 34 \*\*

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-1; 1]$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ .

- 1) Calculer  $f'(x)$  et en déduire que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$  on a :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .
- 2) Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$  on a :  $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - 1|$

### Exercice 35 \*\*

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4}$ .

- 1) Démontrer que pour tout  $x$  de  $[4; 6]$  on a :  $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{8}$ .
- 2) Montrer que pour tout  $x$  de  $[4; 6]$  on a :  $\left|f(x) - \frac{11}{2}\right| \leq \frac{3}{8}|x - 6|$

## Partie F : Les fonctions irrationnelles

### Exercice 36 \*\* : Extrait de Bac TSE 2012 Mali

Soit  $f$  la fonction de  $[0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 8}}$

1. a) Etudie le sens de variation de  $f$ .  
b) Etudie la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Interprète graphiquement le résultat.  
c) Dresse le tableau de variation de  $f$ .
2. On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  : 1cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.  
a) Donne une équation de la tangente (T) à  $(C_f)$  au point d'abscisse nulle.  
b) Trace (T) et  $(C_f)$ .
3. En utilisant les variations de  $f$ , démontre que  $\forall x \in [1; 2], 1 \leq f(x) \leq 2$
4. a) Démonstre que pour tout réel  $x$  de  $[1; 2]$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$   
b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montre que pour tout  $x$  de  $[1; 2]$  on a :  $|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}|x - 1|$ .

Déduis en un encadrement de  $f$  sur  $[1; 2]$  par deux fonctions affines que l'on précisera sur la figure.

### Exercice 37 \*\* : Extrait de composition TSE 2008 Bamako Rive Droite

On considère la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -x + \sqrt{x^2 + x - 2}$$

et  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .  
 b) Etudier la dérivabilité de  $f$  au points  $x_0 = -2$  et  $x_1 = 1$ .  
 c) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
- 2) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de  $(C)$  avec l'axe  $(O; \vec{i})$ .
- 3) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$  et préciser les asymptotes à  $(C)$ .
- 4) Tracer  $(C)$  et ses asymptotes.
- 5) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]-\infty; -2]$ .  
 a) Montrer que  $h$  est une bijection de  $]-\infty; -2]$  vers un intervalle  $J$  à préciser.  
 b) Soit  $h^{-1}$  la réciproque de  $h$ . Calculer  $h^{-1}(5)$  et  $(h^{-1})'(5)$ .  
 c) Pour tout  $x$  de  $J$ , exprimer  $h^{-1}(x)$ .
- 6) Construire sur le même graphique que  $(C)$  la courbe  $(\Gamma)$  de  $h^{-1}$ .

### Exercice 38 \*\*

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Donne l'expression de  $f(x)$  sans le symbole valeur absolue.
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$ , en particulier en 1 et en 5. La courbe admet-elle des tangentes en ces points ?
- 3) Etudier les variations de  $f$ .
- 4) Démontrer que la droite d'équation  $x = 3$  est axe de symétrie pour la courbe  $(C)$ .
- 5) Démontrer que les droites d'équations  $y = x - 3$  et  $y = -x + 3$  sont asymptotes à la courbes  $(C)$ .
- 6) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de la courbe  $(C)$  avec ses deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.
- 7) Soit I le point de coordonnées  $(3; 0)$ . Démontrer que  $\forall x \in [1; 5]$  le point M de coordonnées  $(x, f(x))$  est une distance constante du point I. En déduire la nature géométrique de la courbe  $(C)$ , lorsque  $1 \leq x \leq 5$
- 8) Tracer  $(C)$  et ces asymptotes. Faire figurer les points A et B.

### Exercice 39\*\*\*

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$  et  $(C)$  la représentation graphique de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, I, J)$  tel que l'unité graphique sur  $(O, I)$  soit 4cm et sur  $(O, J)$  2cm.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$  puis écrire  $f(x)$  sans le symbole de la valeur absolue.
- 2)  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?
- 3)  $f$  est-elle dérivable en  $-\frac{1}{2}$  ? en  $\frac{1}{2}$  ?
- 4) Calculer la dérivée de  $f$  sur  $D_f$ .
- 5) a) Montrer l'ensemble des solutions de l'inéquation :  $x \in \mathbb{R}, \sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0$  est l'intervalle  $]-\infty; -\frac{1}{2}]$ .

b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation :  $x \in \mathbb{R}, \sqrt{1-4x^2} - 4x > 0$  est l'intervalle  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{5}}\right]$ .

c) En déduire le signe de  $f'(x)$

5) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et donner le tableau de variation de  $f$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$ .

En déduire que  $(C)$  admet deux asymptotes.

c) Tracer la courbe  $(C)$ .

6) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ .

a) Montrer que  $h$  est une bijection de  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

b) Soit  $h^{-1}$  la bijection réciproque de  $h$ . Calculer  $h^{-1}(0)$  puis trouver une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $(\Gamma)$  représentant les variations de  $h^{-1}$ , au point de coordonnées  $(0; h^{-1}(0))$ .

c) Construis  $T$  et  $(\Gamma)$  sur le même graphique que  $(C)$ .

#### Exercice 40 \*\*: Extrait de composition TSE 2018 Bamako Rive Gauche

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et on désigne par } (C_f) \text{ sa courbe représentative dans le plan}$$

muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a) Etudier les variations de la fonction numérique  $g$  définie sur  $]1; +\infty[$  par

$$g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1.$$

b) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]1; +\infty[$  et vérifier que  $1,28 < \alpha < 1,3$ .

c) Déterminer le signe de  $g$  sur  $]1; +\infty[$ .

2. a) Justifier que l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  est  $[-1; +\infty[$ .

b) Etudier la continuité de  $f$  en 1.

3. a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1 et en  $-1$  puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .

4. a) Démontre que 
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} & \text{pour } x \in ]1; +\infty[ \\ f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{pour } x \in ]-1; 1[ \end{cases}$$

b) Etudier le signe de  $f'$  sur  $] -1; 1[$ .

5. Justifier que :  $f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$  et  $-0,15 < f(\alpha) < -0,10$ .

6. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-1; +\infty[$ .

7. Etudier les branches infinies puis donne l'allure de  $(C_f)$ .

#### Exercice 41 \*\*\*

La courbe  $(\Gamma)$  est celle de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$  et  $(\Gamma')$  la courbe de la fonction  $K^{-1}$  réciproque d'une application  $K$

- I) On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$
- 1)
    - a) Étudie les variations de  $g$
    - b) Démontre que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $0,78 < \alpha < 0,79$
    - c) Déduis-en le signe de  $g(x)$
    - d) Démontre que  $f(\alpha) = \frac{\alpha^4-3}{3\alpha}$  et que  $-1,13 < f(\alpha) < -1,10$
  - 2)
    - a) Démontre que l'équation  $g(x) = x$  admet une unique solution  $\beta$  telle que  $0,4 < \beta < 0,5$
    - b) Étudie le sens de variation de  $g'$ . Que représente le point  $I(0,1)$  pour la courbe  $(C_g)$
    - c) Justifie que  $\forall x \in [0,4 ; 0,5], |g'(x)| \leq \frac{3}{2}$  puis  $|g(x) - \beta| \leq \frac{3}{2}|x - \beta|$
- II) 1) a) Étudie le sens de variation de  $f$  (on exprimera  $f'$  en fonction de  $g$ )
- b) Dresse le tableau de variation de  $f$
  - c) Étudie les branches infinies de  $(\Gamma)$
- 2) Soit  $K$  l'application de  $\mathbb{R}_-$  dans  $f(\mathbb{R}_-)$  définie par  $K(x) = f(x)$
- a) Justifie que  $K$  admet une application réciproque  $K^{-1}$  et précise son ensemble de définition  $J$
  - b) Étudie la dérivabilité de  $K^{-1}$  sur  $J$ . Justifie que le point  $A(-\sqrt{3}-2; -\sqrt{3})$  est un point de  $(\Gamma')$  puis détermine une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à  $(\Gamma')$  au point  $A$
  - 3) Trace avec soins les courbe  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$  dans le même repère orthonormé d'unité 2cm

### Exercice 42\*\*

A) Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = |3x| + \sqrt{9x^2 + 1}$ .

1. Détermine l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ . Ecris  $f(x)$  sans valeur absolue pour  $x \in D_f$ .
2. Etudie la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$ . Interprète graphiquement les résultats.

B) Soit la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = -3x + \sqrt{9x^2 + 1}$  et  $(C_g)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 1 cm)

1. Calcule les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  puis démontre que la courbe  $(C_g)$  admet deux asymptotes dont l'une est la droite  $(D) : y = -6x$ .
2. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , calcule  $g'(x)$  et montre que  $g''(x) = \frac{9}{(9x^2+1)\sqrt{9x^2+1}}$ .
3. Dresse le tableau de variation de  $g'$  puis déduis-en le signe de  $g'(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Dresse le tableau de variation de  $g$ .
5. Démontre que  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  que l'on précisera. (0.5 pt)
6. Soit  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ .
  - a) Dresse le tableau de variation de  $g^{-1}$ .
  - b) Détermine une équation de la tangente à  $(C_{g^{-1}})$  au point d'abscisse 1.
  - c) Détermine l'expression explicite de  $g^{-1}$ .

d) Construis les courbes  $(C_g)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère.

7. a. Montre que  $\forall x \in [0 ; 1] ; -3 \leq g'(x) \leq -3 + \frac{9}{\sqrt{10}}$ .

b. En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontre que :

$$\forall x \in [0 ; 1] ; 1 - 3x \leq g(x) \leq \frac{(9-3\sqrt{10})x+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}.$$

## Partie G : Les fonctions paramétriques

### Exercice 43\*\*

Soient  $m$  un paramètre réel et la fonction  $f_m$  définie par  $f_m(x) = \frac{1-mx^2}{1-x}$ .

- 1) Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  de  $f_m$  passent par un point fixe  $A$  dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Etudier les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  puis représenter leur courbe respectives  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .

### Exercice 44\*\*

Soient  $m$  un paramètre réel et la fonction  $f_m$  définie par  $f_m(x) = \frac{mx^2-2x+1}{x^2-2mx+1}$ .

- 1) Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  de  $f_m$  passent par deux points fixes  $A$  et  $B$  dont on déterminera les coordonnées
- 2) Représenter graphiquement la fonction pour  $m = 0$ .

### Exercice 45 \*\*

Soit  $f_m$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$ .

Où  $x$  est la variable et  $m$  est un paramètre réel.

Soit  $(C_m)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Donner le tableau de variation de la fonction  $f_m$  suivant les valeurs de  $m$ .  
(On distinguera les cas où  $m \neq 1$  et  $m \geq 0$ ).
- 2) Comparer  $f_m(x)$  et  $f_{-m}(-x)$  puis donner la position relative des courbes  $(C_m)$  et  $(C_{-m})$ .
- 3) Quelle sont les coordonnées des points de  $(C_m)$  à tangentes parallèles à  $(ox)$  quand ceux-ci existent ?
- 4) Montrer que ces points sont sur une même courbe fixe.
- 5) Etudier les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  puis représenter leur courbe respectives  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .

## Partie H : Les fonctions circulaires

### Exercice 46 \*\*

Soit  $(C)$  la courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  de la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{2} \cos x$ .

- 1) Détermine l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Etudie la parité et la périodicité de  $f$ .
- 3) Dédus-en que l'on peut restreindre le domaine d'étude de  $f$  à  $[0 ; \pi]$ .
- 4) Calcule  $f'(x)$  et montre que  $\forall x \in [0 ; \pi], f'(x) = \sin x (2 \cos x + \sqrt{2})$
- 5) Etudie le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in [0 ; \pi]$
- 6) Etudie le sens de variations de  $f$  puis dresse son tableau de variations sur  $[0 ; \pi]$ .

### Exercice 47\*\*

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x$ .

- 1) Montre que l'on peut restreindre l'étude de  $f$  à  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ .
- 2) Montre que  $f'(x) = \cos x \cos 2x$
- 3) Donne pour  $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  les signes de  $\cos x$  et de  $\cos 2x$ . Dédus - en le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$  et dresse le tableau de variation de  $f$ .
- 4) Trace la courbe représentative de  $f$  lorsque  $x \in [-\pi ; \pi]$ .

### Exercice 48\*\*

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{2 - \sin x}$

- 1) Détermine  $D_f$ .
- 2) Montrer que l'on peut restreindre l'étude de  $f$  à  $[0 ; 2\pi]$  ou  $[-\pi ; \pi]$
- 3) Compare  $f(\pi - x)$  et  $f(x)$ . Interprète ce résultat. Montre qu'il est plus simple d'étudier alors  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ .
- 4) Dresse le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Tracer la courbe représentative de  $f$  lorsque  $x \in \left[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

### Exercice 49\*\*

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

- 1) Détermine  $D_f$ .
- 2) Montre que  $f$  est  $2\pi$  périodique.
- 3) Compare  $f(\pi - x)$  et  $f(x)$ . Interprète graphiquement ce résultat.
- 5) Montrer que l'on peut restreindre l'étude de  $f$  à  $I = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ .
- 4) Dresse le tableau de variation de  $f$  sur  $I$ .
- 5) Tracer la courbe représentative de  $f$  sur  $x \in \left[-\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

### Exercice 50\*\*

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$  et (C) sa courbe.

1. Détermine l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
2. Etudie la parité et la périodicité de  $f$ . En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction  $f$  sur un nouvel ensemble d'étude  $D_E$ .
3. Montre que  $\forall x \in D_f$  on a :  $f'(x) = \frac{3(1 - 2 \cos x) \sin x}{\cos^4 x}$
4. Etudie le signe de  $(1 - 2 \cos x)$  sur  $D_E$  puis en déduire les variations de  $f$  sur  $D_E$ .
5. Trace la courbe (C).

### Exercice 51\*\*

Soit  $f$  la fonction numérique à variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \sin^2 x$

1. Détermine l'ensemble de définition de  $f$ . Etudie la parité de  $f$ .
2. Montre que  $f$  est périodique de période  $\pi$ .
3. Dresse le tableau de variation de  $f$  sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ .

4. a) Montre que  $f$  est une bijection de  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.

b) Exprime la dérivée  $f'$  de  $h$  en fonction de  $f$ .

c) Détermine l'ensemble sur lequel la bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  est dérivable.

Puis déduis-en que  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

### Exercice 52\*\*

Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = \frac{1}{\cos x}$

1) Détermine le domaine de définition de  $g$ .

2) Dresse le tableau de variation de  $g$  sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .

3) Montre que  $g$  est une bijection de  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.

4) Exprime la dérivée  $g'$  de  $g$  en fonction de  $g$ . Déduis – en  $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ .

### Exercice 53\*\*

Soit  $h$  la fonction de  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}$  définie par :  $h(x) = \tan x + 1$

1) Détermine le domaine de définition de  $h$ .

2) Dresse le tableau de variation de  $h$  sur  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ .

3) Montre que  $h$  est une bijection de  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.

4) Exprime la dérivée  $h'$  de  $h$  en fonction de  $h$ . Déduis – en la dérivée de la bijection réciproque  $h^{-1}$  de  $h$ .