

## EXERCICES SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

## Exercice 1 :

1)  $f$  est la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & \text{pour } x > 0 \\ f(x) = x^2 + ax + 2b & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

Détermine les réels  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue et dérivable en 0.

2) Soit la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = \frac{1-\sqrt{2x+5}}{x-2}$ .

Peut-on prolonger  $f$  par continuité en 2 ? Si oui, précise son prolongement.

## Exercice 2 :

Soit la fonction  $g$  définie par  $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$  ; où  $a, b$  et  $c$  sont des réels.

- 1) Détermine les réels  $a, b, c$  sachant que  $g$  admet 1 pour extremum en  $x = 0$  et  $-3$  pour extremum en  $x = 2$ .
- 2) Étudie les variations de la fonction  $g$ .
- 3) Montre que l'équation  $g(x) = 0$  admet trois solutions réelles puis détermine un encadrement de chacune d'elles à  $10^{-1}$  près.

## Exercice 3 :

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- 1) a) Calcule les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$ .  
b) Étudie la parité de  $f$ .
- 2) Étudie le sens de variation de  $f$  puis dresse son tableau de variations sur  $D_f$ .
- 3) a) Démontre que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in [-2; -1]$  puis détermine un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.  
b) Détermine le signe de  $f(x)$  sur  $D_f$ .
- 4) Détermine l'équation de la tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $x_0 = 3$ .
- 5) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]-\infty; 0]$ .  
a) Montre que  $g$  réalise une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.  
b) Calcule  $g(-3)$  puis  $(g^{-1})'(16)$ .  
c) Montre que  $(g^{-1})'(0) = \frac{-1}{a^2-2a}$ .
- 6) a) Trace  $(C_f)$  dans le repère (on étudiera les branches infinies).  
b) Détermine graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel  $m$  le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$ .  
c) Démontre que le point  $I(1; -\frac{4}{3})$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$ .

## Exercice 4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction rationnelle  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{ax+b}{c+x}$  où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels. On désigne par  $(C_f)$  sa représentation graphique.

- 1) Détermine les nombres réels  $a, b$  et  $c$  pour que :  
-  $(C_f)$  admette les asymptotes d'équations respectives  $x = -2$  et  $y = 1$ .  
- la tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $-1$  soit parallèle à la droite d'équation  $y = -x$ .
- 2) Construis  $(C_f)$ .

**Exercice 5:**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $]3; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 3}$ .

- Montre que  $\forall x \in ]3; +\infty[, g'(x) = 1 + \frac{4}{(x-3)^2}$ .
- Montre que  $\forall x \in [4; 7], \frac{5}{4} \leq g'(x) \leq 5$ .
- Démontre en utilisant les inégalités des accroissements finis que :  

$$\forall x \in [4; 7], 5x - 30 \leq g(x) \leq \frac{5}{4}x - \frac{15}{4}$$

**Exercice 6:**

On considère la fonction  $f: x \mapsto ax + b + \frac{c}{x+1}$  où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels. Le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

|         |           |           |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$      | $-1$      | $1$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0         | -         | 0         | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

- Détermine les réels  $a, b$  et  $c$  en utilisant les données du tableau de variation.
- Montre que la courbe  $(C)$  de  $f$  admet une droite asymptote oblique  $(D)$ . Étudie la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .
- Donne une équation de la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse 0.
- Démontre que le point  $I\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  est un centre de symétrie de  $(C)$ .
- Trace la courbe  $(C)$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.

**Exercice 7:**

- On considère la fonction polynôme  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ .
  - Étudie les variations de  $g$ .
  - Démontre que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution réelle et une seule  $\alpha$ , et que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]1,6; 1,7[$ .
- On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$ .  
 On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé (on prendra comme unité 2cm).  
 Étudie les variations de  $f$  puis construis  $(C)$  (on utilisera les résultats de 1).

**Exercice 8:**

- A. Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 + x^2 + 6$ .
- Étudie les variations de  $g$ .
  - Déduis-en que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dont on déterminera un encadrement à  $10^{-1}$  près.
  - Détermine le signe de  $g(x)$ .
- B. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3}$ .
- Démontre que  $f'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{x^4}$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
  - Étudie les variations de  $f$ .
  - Trace la courbe de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.

**Exercice 9:**

- Démontre que l'équation :  $x^3 + 3x^2 + 10x + 5 = 0$  a une unique solution réelle  $x_0$ . Vérifie que  $] -0,59; -0,58[$  est un encadrement de  $x_0$ .
- On considère la fonction numérique  $f$  à variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x+1)^2}$ .
  - Quel est son ensemble de définition ?

- b) Etudie les variations de  $f$ , puis dresse son tableau de variation.
- c) Détermine les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que pour tout  $x$  élément de son ensemble de définition,  $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$ . Dédus-en que la courbe représentative  $(C)$  de  $f$  admet une asymptote oblique  $\Delta$  dont on précisera une équation.
- 3) a) Etudie la position relative de  $(C)$  et  $\Delta$ .  
b) Trace la courbe  $(C)$  et ses asymptotes dans le plan muni d'un repère orthonormé et donne une équation de la tangente à  $(C)$  en son point d'abscisse  $x_1 = -2$ .
- 4) a) Montre que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $I = [1; +\infty[$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser.  
b) Trace la courbe de la bijection réciproque  $g^{-1}$  dans le même repère.  
c) Calcule  $g(3)$  et déduis-en le coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $g^{-1}$  au point d'abscisse  $\frac{89}{16}$ .

**Exercice 10 :**

Soit la fonction  $f: x \mapsto |x^2 - 1| + 2|x| - 3$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative.

- 1) Etudie la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $-1$ ;  $0$  et  $1$ .
- 2) Etudie les variations de  $f$  et trace  $(C_f)$ .

**Exercice 11 :**

I. Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 3x - \sqrt{x^2 + 4}$

1. Montre que  $\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) = \frac{-4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$ .
2. Dresse le tableau de variation de  $g'$  et déduis-en le signe de  $g'$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Etudie les variations de la fonction  $g$ .
4. Montre que  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  que l'on déterminera.
5. Dédus-en le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
6. a) Démontre que  $\forall x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]; \frac{12}{5} \leq g'(x) \leq 3$ .  
b) Démontre en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que :  
 $\forall x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]; 3x - \frac{5}{2} \leq g(x) \leq \frac{12}{5}x - \frac{8}{5}$ .

II. Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3\sqrt{x^2 + 4} - x$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a) Calcule les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
b) Détermine les équations des asymptotes à  $(C_f)$ .  
c) Etudie la position de  $(C_f)$  par rapport à chacune de ses asymptotes.
2. Montre que  $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+4}}$ .
3. Dédus-en le tableau de variation de  $f$ .
4. a) Démontre que la restriction  $h$  de  $f$  à l'intervalle  $I = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$  est une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  que l'on déterminera.  
b) Calcule  $(h^{-1})'(6)$ .
5. Trace la courbe  $(C_f)$  puis déduis-en la courbe  $(C')$  de  $h^{-1}$ .

**Exercice 12 :**

Soit la fonction  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$  et  $(C)$  sa courbe représentative.

- 1) Exprime  $f(x)$  sans le symbole « valeur absolue ».
- 2) Etudie la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur son ensemble de définition ;  $(C)$  admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?
- 3) Etudie les variations de  $f$ .
- 4) Démontre que les droites d'équations  $y = x - 3$  et  $y = -x + 3$  sont asymptotes à  $(C)$ .
- 5) Trace  $(C)$  et démontre qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera l'équation.
- 6) Démontre que, pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1; 5]$ , le point  $M\left(\frac{x}{f(x)}\right)$  est à une distance constante du point  $\Omega\left(\frac{3}{0}\right)$ . Déduis-en la nature de  $(C)$  sur l'intervalle  $[1; 5]$ .

**Exercice 13 :**

Le plan est muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ .  $m$  étant un paramètre, on considère la fonction  $f_m$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f_m(x) = \frac{x^2 - (m+2)x + 2m+2}{x-1}$  de représentation graphique  $(C_m)$ .

- 1) Démontre que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par un point  $A$  dont les coordonnées ne dépendent pas de  $m$ .
- 2) Etudie la fonction  $f_0$ .
- 3) On suppose que  $m$  est différent de 0.  
Etudie les variations de  $f_m$  suivant les valeurs de  $m$ .
- 4) Détermine en fonction de  $m$  les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $f_m(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$  et déduis-en une équation de l'asymptote à  $(C_m)$  à l'infini.
- 5) Démontre que  $B(1; -m-1)$  est un centre de symétrie de  $(C_m)$ .
- 6) Construis les courbes  $(C_4)$  et  $(C_{-4})$ .

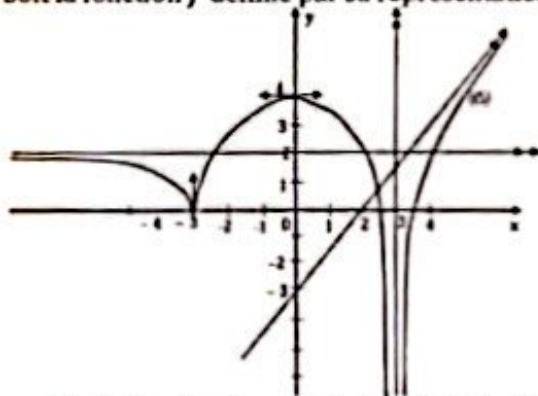
**Exercice 14 :**

Soit  $f$ , la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sin x (\cos x + 1)$ .

1. Justifie que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à  $[0; \pi]$ .
2. Montre que  $f'(x) = (\cos x + 1)(2 \cos x - 1)$ , puis dresse le tableau de variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$  (on justifiera les signes trouvés dans le tableau).
3. Construis la courbe  $(C_f)$  de  $f$  sur l'intervalle  $[-\pi; 3\pi]$ .

**Exercice 15 :**

Soit la fonction  $f$  définie par sa représentation graphique ci-dessous



- 1) Détermine l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Détermine les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
- 3) Détermine une équation de chacune des asymptotes éventuelles à la courbe  $(C_f)$  de  $f$ .
- 4) La fonction  $f$  est-elle continue; dérivable en  $x_0 = -3$  ? Justifie ta réponse.
- 5) Dresse le tableau de variation de  $f$ .
- 6) Donne une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $x_0 = 0$ .

- 7) Montre que la restriction  $g$  de  $f$  à  $[0; 3]$  est une bijection de  $[0; 3]$  sur une partie  $J$  de  $\mathbb{R}$  que l'on précisera.  
 8) Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Détermine graphiquement suivant les valeurs de  $m$  le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$ .

**Exercice 16 :**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et on désigne par } (\mathcal{C}_f) \text{ sa courbe représentative dans le plan}$$

muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) a) Etudie les variations de la fonction numérique  $g$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$ .  
 b) Démontre que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]1; +\infty[$  et vérifie que  $1,2 < \alpha < 1,3$ .  
 c) Détermine le signe de  $g$  sur  $]1; +\infty[$ .
- 2) a) Justifie que l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  est  $[-1; +\infty[$ .  
 b) Etudie la continuité de  $f$  en 1.  
 c) Etudie la dérivabilité de  $f$  en 1 et en  $-1$  puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.  
 d) Détermine l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .
- 3) a) Démontre que 
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} & \text{pour } x \in ]1; +\infty[ \\ f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{pour } x \in ]-1; 1[ \end{cases}$$
  
 b) Etudie le signe de  $f'$  sur  $]-1; 1[$ .
- 4) Justifie que  $f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$ .
- 5) Dresse le tableau de variation de  $f$  sur  $[-1; +\infty[$ .
- 6) Etudie les branches infinies puis donne l'allure de  $(\mathcal{C}_f)$ .

**Exercice 17 :**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = |x+1| + \frac{4}{(x-1)^2}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. a) Détermine l'ensemble de définition de  $f$ .  
 b) Ecris  $f(x)$  sans le symbole de la valeur absolue.
2. a) Etudie la continuité de  $f$  en  $-1$ .  
 b) Etudie la dérivabilité de  $f$  en  $-1$  et interprète géométriquement les résultats obtenus.  
 c) Calcule les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.  
 d) Montre que les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  d'équations respectives  $y = -x - 1$  et  $y = x + 1$  sont asymptotes à  $(C)$  respectivement en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
3. Montre que 
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{-(x+1)(x^2-4x+7)}{(x-1)^3} & \text{pour } x \in ]-\infty; -1[ \\ f'(x) = \frac{(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^3} & \text{pour } x \in ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[ \end{cases}$$
4. Etudie le signe de  $f'(x)$  puis dresse le tableau de variation de  $f$ .
5. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $[3; +\infty[$ .  
 a) Montre que  $g$  est une bijection de  $[3; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.  
 b) La bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$  est-elle dérivable en 5 ? Justifie ta réponse.  
 c) Démontre que l'équation  $g(x) = 6$  admet une solution unique  $\alpha \in [3; +\infty[$  puis donne un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
6. Construis la courbe  $(C)$  de  $f$  puis déduis-en la courbe  $(C')$  de  $g^{-1}$ .