

EXERCICE :01

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 &1^\circ) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 5} ; 2^\circ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 3} ; 3^\circ) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{-3x^2 + 7x + 1} ; 4^\circ) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 7}{x^4 + 3x - 2} ; \\
 &5^\circ) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{|-2x + 6|} ; 6^\circ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{|-3x + 6|} ; 7^\circ) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) ; 8^\circ) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + x) ; \\
 &9^\circ) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + x) ; 10^\circ) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} ; 11^\circ) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{2x^2 - 3x - 2} ; \\
 &12^\circ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} ; 13^\circ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 1} ; 14^\circ) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 5x - 12}{(x - 2)(x + 3)} ; 15^\circ) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{|x^2 - 4|} \\
 &16^\circ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{|x^2 - 1|} ; 17^\circ) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x + 3} ; 17^\circ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} ; 19^\circ) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} ; \\
 &20^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} - 1} ; 21^\circ) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x} - 8}{4 - x} ; 22^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x} ; 23^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

EXERCICE :02

Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas suivants

$$\begin{aligned}
 &a) f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{3x - 1} ; b) f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1} ; c) f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + 5x}{3x - 1} \\
 &d) f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} ; e) f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 3}} ; f) f(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 3x + 1})}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}
 \end{aligned}$$

EXERCICE :03

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 &1^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) ; 2^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x}{1 - \cos x} \right) ; 3^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^3 x}{x^2} \right) ; 4^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x + \tan x}{x} \right) ; \\
 &5^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right) ; 6^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) ; 7^\circ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \cos x}{3 + \cos x} \right) ; 8^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x}{1 - \cos x} \right) ; \\
 &9^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos x} ; 10^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} ; 11^\circ) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - 2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x \cos(2x)} \right) ; 12^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \right) \\
 &12^\circ) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} \right) ; 13^\circ) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right) ; 14^\circ) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} .
 \end{aligned}$$

EXERCICE :04

Pour chacune des fonctions suivantes donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

$$1^\circ) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} ; \quad 2^\circ) f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 1} ; \quad 3^\circ) f(x) = \frac{4 - 5x}{x^2 + 2x - 3}$$

$$4^\circ) f(x) = \frac{1}{(x - 3)^2} ; \quad 5^\circ) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}} ; \quad 6^\circ) f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x + 2}$$

$$7^\circ) f(x) = \frac{6x - 2}{-2x + 8} ; \quad 8^\circ) f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x^2 - x + 2} ; \quad 9^\circ) f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 7x + 1$$

EXERCICE : 05

A-/ Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$; où a ; b et c sont des réels.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer les réels a , b , c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$.

3°) Étudier la fonction f . Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-1 ; 0]$; une solution unique β dans $[0 ; 1]$; une solution unique λ dans $[2 ; 3]$.

4°) Tracer la courbe (C_f) de f .

B-/ Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 5$

1°) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

2°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [4, 5]$

3°) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

EXERCICE : 06

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = -(x - 1)^2(x + 2)$.

1°) Etudier les variations de f ;

2°) Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera.

On déterminera les intersections de la courbe $(\mathcal{C})$ de f avec les axes de coordonnées.

3°) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 07

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$		-1	-5	

Diagram illustrating the variation of the function $f(x)$. The horizontal axis represents x with values $-\infty$, -2 , 0 , and $+\infty$. The vertical axis represents $f(x)$ with values $-\infty$, -1 , -5 , and $+\infty$. The derivative $f'(x)$ is zero at $x = -2$ and $x = 0$. The function $f(x)$ has a local maximum at $(-2, -1)$ and a local minimum at $(0, -5)$. Arrows indicate the increasing and decreasing intervals of the function.

La fonction f a pour formule explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2°) Calculer $f'(x)$.

3°) Déterminer les réels a ; b ; et c en utilisant les données du tableau de f .

4°) Montrer que la restriction g de f à $[0 ; +\infty[$ est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5°) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

Montrer que α est compris entre 1 et 2. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près (on précisera la méthode).

6°) Donner une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.

EXERCICE : 08

A-/ 1°) aux trois réels a ; b ; c on associe la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1°) Déterminer les constantes a ; b ; c pour que $(\mathcal{C})$ passe par les points

$A(1 ; 8)$; $B(-4 ; -2)$; et admette au point E d'abscisse -2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2°) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x}$.

a) Etudier f et construire sa courbe $(\mathcal{C})$. Montrer que $(\mathcal{C})$ admet un centre de symétrie dont on précisera.

b) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation : $x^2 + (3 - m)x + 4 = 0$

EXERCICE : 09

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x+1}$ où α et β sont des réels.

1°) Déterminez l'ensemble de définition D_f de f

2°) Déterminez les réels α et β sachant que $f(0) = 4$ et $f'(0) = -3$.

3°) Déterminez les limites de f aux bornes de D_f

4°) Déterminez les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

5°) Montrez que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet une droite asymptote oblique $(\mathcal{D})$.

6°) Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptote oblique $(\mathcal{D})$.

7°) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dressez le tableau de variation de f .

8°) Étudier le signe $f(x)$ suivant les valeurs de x .

9°) Déterminez une équation de la tangente (T_0) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x=0$

10°) Montrez que le point $I(-1 ; -1)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

11°) Calculez $f(3)$; $f(-3)$; $(f^{-1})'(4)$.

12°) Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite $(\mathcal{D})$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé

13°) Calculez l'aire A du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$.

EXERCICE : 10

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

La fonction f est de la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

1°) calculer $f'(x)$.

Trouver les coefficients a ; b et c en utilisant les données du tableau.

2°) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une droite asymptote oblique $(\mathcal{D})$.

Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

3°) Donner le signe de $f(x)$ pour x élément du domaine de définition de f .

4°) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 11

Soit $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-1}$. Déterminer les réels a ; b ; c sachant que la courbe $(\mathcal{C}_h)$ de la fonction h passe par les points $A(0 ; 2)$; $B(2 ; -2)$ et la dérivée de h s'annule pour $x = 2$.

A) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{x-1}$

1°) Déterminer les réels a ; b ; c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

2°) Etudier la fonction f ;

3°) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation: $y = -x + 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$.

4°) Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

5°) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

6°) Montrer que le point $I(1 ; 0)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

7°) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 12

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x-3}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ puis les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2°) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une droite (Δ) asymptote oblique aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

3°) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) .

4°) Etudier le sens de variation de f et construire $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé.

5°) Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet un centre de symétrie que l'on déterminera.

6°) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point E d'abscisse 1.

Existe-t-il un autre point de $(\mathcal{C})$ en lequel la tangente à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (T) ?

si oui, déterminer les coordonnées de ce point et une équation de cette tangente (T') .

7°) résoudre et discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation : $x^2 - (m+1)x + 3m - 5 = 0$.

EXERCICE : 13

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x+1}$.

- 1-/ Trouver a , b , et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
- 2-/ Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ de f
- 3-/ Etudier les variations de f .
- 4-/ Etudier les positions de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) .
- 5-/ Montrer que la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; -3]$ est une bijection g de $]-\infty ; -3]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 6-/ Calculer $g(-5)$; $g(-4)$; $(g^{-1})'(-7)$.
- 7-/ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f ainsi que $(\mathcal{C}')$ de g^{-1} dans le même repère.
- 8-/ Démontrer que pour tout x de $[1 ; 3]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.
- 9-/ Résoudre et discuter graphiquement suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $x^2 - mx + 3 - m = 0$.

EXERCICE : 14

Soit la fonction f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x}$. Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

- 1-/ Déterminer l'ensemble de définition de $\mathcal{D}_f$ de f .
- 2-/ Trouver les réels a ; b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$.
- 3-/ Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ que l'on précisera.
- 4-/ Déterminer les limites de f ; calculer sa dérivée $f'(x)$ puis dresser son tableau de variation.
- 5-/ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
- 6-/ Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à son asymptote oblique $(\mathcal{D})$.
- 7-/ Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x = -1$.
- 8-/ Calculer $f(1)$; $f(2)$; puis $(f^{-1})'(2)$.
- 9-/ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

EXERCICE : 15

A/ Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1-/ Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation ;
- 2-/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que
$$2,19 < \alpha < 2,20.$$
- 3-/ En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

- 1-/ Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2-/ Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ on a : $f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 - 1)^2}$
- 3-/ Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation f .
- 4-/ Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f au voisinage de $+\infty$.
- 5-/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et (D).
- 6-/ Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D).
- 7-/ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 16

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ;
- 2°) Montrer que f est impaire. En déduire la symétrie correspondante.
- 3°) Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude ;
- 4°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe ;
- 5°) Dresser le tableau de variation de f ;
- 6°) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
- 7°) Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
- 8°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses.
- 9°) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]1; +\infty[$ est une bijection sur un intervalle J à préciser.
- 10°) Calculer : $g(3)$; $(g^{-1})'(0)$.
- 11°) Tracer $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

EXERCICE : 17

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1}$. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 2cm.

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ;
- 2°) Trouver les réels a ; b et c tels que pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

- 3°) Étudier les limites de f puis son sens de variation.
- 4°) Montrer que le point I de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse $x = 0$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
- 5°) Écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point I.
- 6°) Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T).
- 7°) Calculer $f(0,5)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$ puis tracer $(\mathcal{C}_f)$.

EXERCICE : 18

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 84x + 46}{x^2 - 6x + 9}$

- 1) Trouver les réels a ; b ; c ; d tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f on ait : $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{(x-3)^2}$
- 2) Étudier les variations de f .
- 3) Montrer que la parabole (P) d'équation : $y = x^2 - 6x + 5$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .
- 4) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (P) ;
- 5) Tracer (P) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm.
- 6) Trouver une primitive F de f sur $\mathcal{D}_f$.
- 7) Calculer en cm^2 l'aire A de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$, la parabole (P) et les droites d'équations : $x = 4$ et $x = 5$.

EXERCICE : 19

A]- Soit la famille de fonctions f_m définie par : $f_m(x) = \frac{mx^2 - 2x + 1}{x^2 - 2mx + 1}$

où m est un paramètre réel.

1°) Montrer que toutes les courbes (C_m) de f_m passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.

2°) Déterminer m pour que, quel que soit le réel $x \neq \{0; -2; 2\}$, L'entier naturel $[f_m(x)]^2$ soit au plus égal à 1.

3°) Représenter graphiquement la fonction pour $m = 0$.

B]- Soit la fonction f_m définie par : $f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m+1)x + 3}$; où x est la variable et m un paramètre ; à chaque valeur de m correspond une courbe (C_m) .

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées indépendamment de m .

2) Déterminer m pour que le point d'intersection P de (C_m) et de l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.

3) Construire la courbe (C_0) .

EXERCICE : 20 Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

Partie A :

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$.

Déterminer les réels a ; b ; c ; d sachant que la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ donné :

- admet la droite d'équation : $x = 2$ pour asymptote ;
- n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ;
- passe par le point A de coordonnées $(1 ; -2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur (-5) .

Partie B :

Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{x + 4}{x + 1}$.

1°) Étudier les variations de la fonction g .

2°) Montrer que g est une bijection de $] -1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°) Calculer $(g^{-1})(5)$.

4°) Montrer que pour tout réel x de $[1 ; 3]$ on a : $-\frac{3}{4} \leq g'(x) \leq -\frac{3}{16}$.

En déduire que pour tout réel α de $]1 ; 3[$ on a : $\frac{13 - 3\alpha}{4} \leq g(\alpha) \leq \frac{43 - 3\alpha}{16}$.

EXERCICE : 21

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x+1}$.

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- 2°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 3°) a) La fonction f est-elle continue au point 1 ?
b) La fonction f est-elle dérivable au point 1 ?.
Interpréter graphiquement votre réponse.
- 4°) Dresser le tableau de variation de f puis tracer sa courbe.

EXERCICE : 22

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \sin x$.

- a) Montrer que f admet un centre de symétrie
- b) Étudier et représenter sa courbe. (on étudiera les points d'inflexion, les positions de la courbe par rapport à la direction asymptotique).

EXERCICE : 23

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

- 1) Étudier la fonction f . Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet un point d'inflexion dont on précisera.
- 2) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ de f au point $x_0 = 0$.
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $\alpha \in [1 ; 2]$.
- 4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 5) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormé.
- 6) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée de la bijection réciproque f^{-1} de f . Définir f^{-1} en exprimant $f^{-1}(x)$.
- 7) Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de f^{-1} dans le même repère.

EXERCICE : 24

Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x+5}$ et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .

- 1) Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point $x_0 = -2$.
- 2) Existe-t-il un point de $(\mathcal{C})$ où la tangente à $(\mathcal{C})$ a pour pente -5 ?
- 3) Déterminer les points de $(\mathcal{C})$ en lesquels la tangente à $(\mathcal{C})$ est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 4$. Vérifier que ces points sont symétriques par rapport au point $S(\frac{-5}{2}; \frac{1}{2})$. Donner les équations des tangentes à $(\mathcal{C})$ en ces points.

Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{2}$.

EXERCICE : 25

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x$.

- 1) Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.
- 2) a-/ Montrer que $f'(x) = \cos x \cos 2x$.
b-/ Donner pour $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ les signes de $\cos x$ et de $\cos 2x$. Déduisez en le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variation de f .
- 3) Tracer la courbe représentative de f lorsque $x \in [-\pi ; \pi]$.

EXERCICE : 26

Soit la fonction f définie sur $[0 ; \pi]$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + 2 \cos x - \frac{5}{2}$

- 1) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f .
b) Etudier les variations de f' sur $[0 ; \pi]$.
c) Déduisez de cette étude que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $]0 ; \pi[$ une solution unique notée α .
d) Déterminer le signe de f' sur $[0 ; \pi]$.
- 2) a) Donner le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$.
b) Déduisez-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE : 27

I-/ Soit la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

- 1) Calculer $f'(x)$ et en déduire que pour tout x de $[0 ; 1]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$
- 2) Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$ on a :

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |x - 1|$$

II-/ Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4}$

- 1) Démontrer que pour tout x de $[4 ; 6]$ on a :

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{8}$$

- 2) Montrer que pour tout x de $[4 ; 6]$ on a :

$$\left| f(x) - \frac{11}{2} \right| \leq \frac{3}{8} |x - 6|$$

EXERCICE : 28

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Écrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
- 3) Étudier la continuité de f en $x_0 = -1$ puis en $x_0 = 3$.
- 4) La fonction f est-elle dérivable en $x_0 = -1$? puis en $x_0 = 3$?.
Interpréter graphiquement ces résultats.
- 5) Étudier la fonction f puis dresser son tableau de variation.
- 6) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet une droite $(\mathcal{D}_1)$ asymptote au voisinage de $-\infty$ et une droite $(\mathcal{D}_2)$ asymptote au voisinage de $+\infty$.
- 7) Tracer $(\mathcal{D}_1)$; $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 29

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{3|x-1|+1}{2|x-1|-1}$$

- 1°) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue.
- 2°) Étudier la fonction f et construire sa courbe $(\mathcal{C}_f)$.
- 3°) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un axe de symétrie que l'on déterminera.
- 4°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$; m étant un paramètre réel.
Indiquer le signe des solutions lorsqu'elles existent.

EXERCICE : 30

A] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.

1°) Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 1 , donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

2°) Étudier le sens de variation de f .

3°) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet deux droites asymptotes que l'on précisera.

4°) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

B] Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x - \sqrt{|x^2 - 1|}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_g)$ la courbe de g dans le plan muni d'un repère orthogonal

1°) x étant un nombre réel, on considère les points $M(x; f(x))$ et $N(-x; g(-x))$.

Déterminer le milieu du segment $[MN]$. Donner une interprétation géométrique et une illustration de ce résultat.

2°) En tenant compte de la question 1°) donner une méthode de construction de $(\mathcal{C}_g)$. Construire $(\mathcal{C}_g)$.

EXERCICE : 31

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2}$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe

représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) .

1°) Étudier les variations de f ; et en déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $(\mathcal{C})$.

2°) a) Le point $I(-2; 1)$ est-il un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$?

b) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection A de la courbe $(\mathcal{C})$ avec la droite d'équation $y = 1$?

3°) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 . Déterminer la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T) .

4°) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (T) .

5°) Soit l'équation (E) où x désigne une inconnue réelle :

$$(E) : (m-1)x^2 + (4m-1)x + 4m = 0 ; m \text{ étant un paramètre réel.}$$

A l'aide de la courbe $(\mathcal{C})$ déterminer pour quelles valeurs de m , (E) admet :

- a) Zéro solution ;
- b) Deux solutions négatives ;
- c) Une seule solution.

6°) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{|x^2 + x|}{(x+2)^2}$ et soit $(\mathcal{C}')$ sa courbe

représentative dans le repère $(O; i, j)$. Comment $(\mathcal{C}')$ se déduit-elle de $(\mathcal{C})$?

Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

7°) Soit h la fonction définie par :
$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \geq -1 \\ h(x) = 2x + a & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Pour quelle valeur du réel a la fonction h est-elle continue au point -1 ?

Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction h au point -1 .

EXERCICE : 32

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{|x^2 - 3x|}{x+1}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue.
- 3) Trouver les réels a ; b ; c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
- 4) Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$ puis en $x = 3$ et interpréter.
- 5) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
- 6) Soit (C_f) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1cm. Montrer que la droite (D) d'équation: $y = x - 4$ est asymptote à (C_f) .
- 7) Construire la courbe (C_f) .
- 8) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions réelles de l'équation : $|x^2 - 3x| = m(x+1)$. Résoudre l'équation pour $m = 1$.

EXERCICE : 33

A] Soit la fonction f définies sur $[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$.

- a) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

En déduire que f détermine une bijection de $[1 ; +\infty[$ sur $[0 ; +\infty[$.

- b) Résoudre l'équation $f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$. En déduire que l'application

réciproque g de la bijection déterminée par f est définie par $g(x) = (1 + \sqrt{x})^2$.

- c) Construire la courbe (C_f) de f . En déduire (C_g) celle de g .

B] Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x-1}{|x|+1}$

- a) Étudier la continuité de g en $x = 0$
- b) La fonction g est-elle dérivable en $x = 0$?
- c) Étudier et construire la courbe (C_g) de g dans un repère orthonormé.

EXERCICE : 34

Soit la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$.

- 1) Montrer que si $x \in]-1 ; 0]$ alors $f'(x) > 0$.
- 2) Montrer que pour $x \in [0, 1[$ $f'(x) = \frac{1-2x^2}{(\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2}+x)}$.
- 3) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 1]$, puis donner le tableau de variation de f sur $[-1,1]$.
- 4) Donner l'équation de la tangente (Δ) à $(\mathcal{C}_f)$ au point $x = 0$.
- 5) Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) .
- 6) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 35

Soit la fonction f définie par son tableau de variation ci-dessous

x	$-\infty$	-5	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		0			0	
$f(x)$		4	0	$+\infty$	1	7

- 1°) Compléter le tableau de variation de f ci-dessus.
- 2°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- 3°) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 4°) Soient les fonctions h ; g ; k et u définies par :

$$h(x) = \sqrt{f(x)} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{f(x)} \quad ; \quad k(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \quad ; \quad u(x) = |f(x)|.$$

En utilisant le tableau de variation de f ci-dessus donner les ensembles de définitions respectives des fonctions : h ; g ; k et u .

- 5°) Donner les équations des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .
- 6°) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1cm.

EXERCICE : 36

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$. Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1-/ Déterminer a et b pour que la droite d'équation $y = 4x + 3$ soit tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point I (0 ; 3).

2-/ Étudier les variations de f ; puis tracer $(\mathcal{C}_f)$.

3-/ Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{3x^2 + 4|x| + 3}{x^2 + 1}$.

a) Étudier la parité de g ;

b) En déduire, sans nouveaux calculs, la représentation graphique de g .

On tracera la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de g dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.

EXERCICE : 37

I-/ Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f

2°) Trouver les réels a ; b et c tels que $F : x \mapsto F(x) = (ax^2 + bx + c) \sqrt{x^2 + 4}$ soit une primitive de f .

II-/ Déterminer les réels a ; b et c pour que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f définie par

$f(x) = \frac{ax^2 + 2x + c}{2x^2 + bx - 1}$ passe par l'origine O des coordonnées et admette les droites

d'équation $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = 0$ pour asymptotes.

EXERCICE : 38

Partie A : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3(x-1)^2}{3x^2 + 1}$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans repère orthonormé (unité graphique 1cm).

1°) Déterminer les réels a ; b ; c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{3x^2 + 1}$.

2°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f puis les limites de f .

3°) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.

4°) Dresser le tableau de variation de f .

5°) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une droite $(\mathcal{D})$ asymptote que l'on déterminera.

6°) Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à son asymptote $(\mathcal{D})$.

7°) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet un centre de symétrie dont on calculera les coordonnées.

8°) Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x = 0$.

9°) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique ℓ dans $\mathcal{D}_f$.

Donner une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près par excès.

10°) Tracer $(\mathcal{D})$; (T) et la courbe $(\mathcal{C})$ de f .

Partie B

On pourra dans cette partie utiliser certains résultats de la partie A.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3(\sin x - 1)^2}{3\sin^2 x + 1}$.

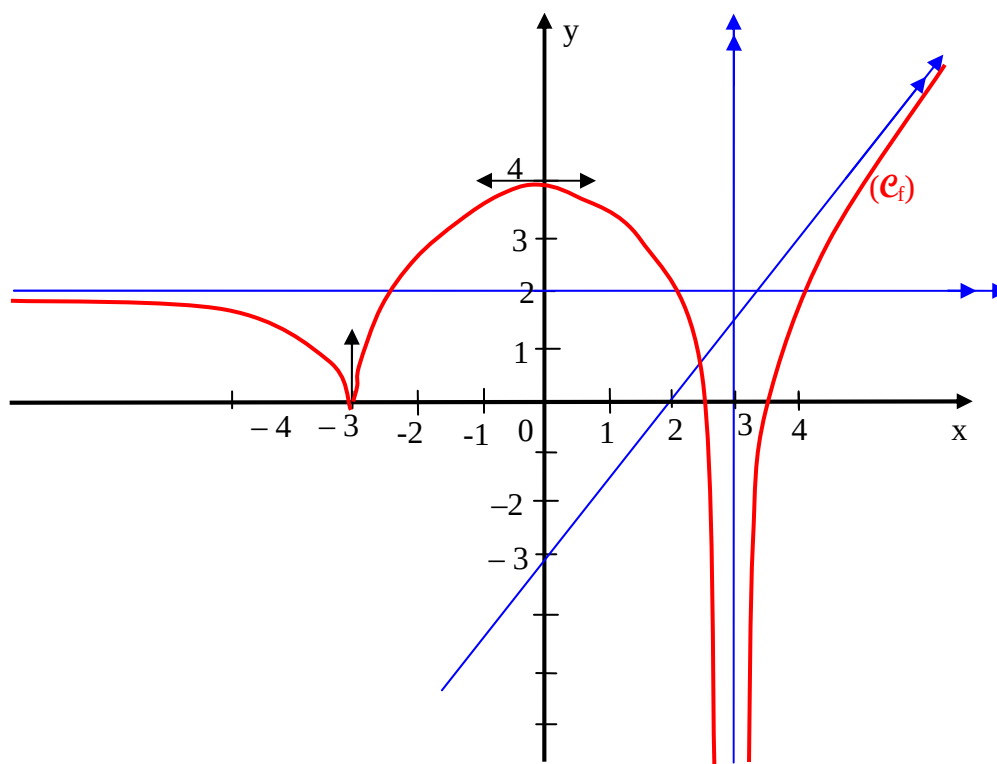
1°) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

2°) Dresser le tableau de variation de g sur $[-\pi; \pi]$.

3°) Tracer sur un nouveau dessin, la courbe représentative de g .

EXERCICE : 39

Soit la fonction f définie par sa représentation graphique ci-dessous



1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

3°) Dresser le tableau de variation de f .

4°) La fonction f est-elle continue ; dérivable en $x = -3$? Justifier votre réponse

5°) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) en $x = 0$.

6°) Montrer que la restriction g de f à $[0; 3[$ est une bijection de $[0; 3[$ sur une partie J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

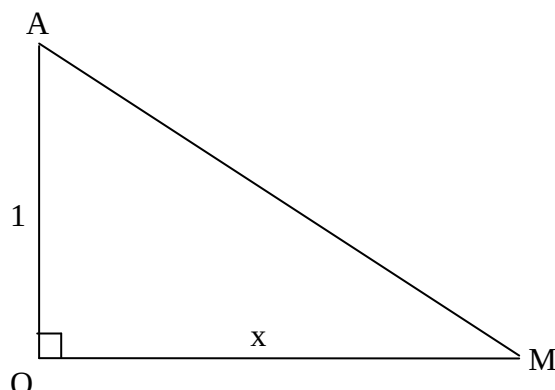
7°) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe (C_f) de f .

8°) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE : 40 Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

Partie A : cette partie est composée de trois exercices indépendants.

1°) Dans la figure ci-dessous, on pose pour $x > 0$ $f(x) = AM$.



- a) Expliciter $f(x)$
- b) Étudier les variations de f et tracer sa courbe.

Partie B :

f_a est la fonction définie par $f_a(x) = \sqrt{ax^2 + (a-2)x + 1}$ où a est un nombre réel.

On note $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de f_a .

- a) Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_a)$ de f_a passent par un point fixe A dont déterminera les coordonnées.
- b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f_a est définie sur $\mathbb{R}$.

Partie C :

g est la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^3 - 3x - 4}$ et h est celle définie par :

$$h(x) = x^3 - 3x - 4.$$

- a) Étudier les variations de h .
- b) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $h(\alpha) = 0$.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .

- c) Étudier le signe de $h(x)$.
- d) Dresser le tableau de variation de g .

EXERCICE : 41

On donne les renseignements suivants sur la fonction f :

- L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}f =]-\infty, 4[\cup]4; +\infty[$;
- $f'(x)$ est positive sur $]-\infty, -1[\cup]4; +\infty[$ et négative sur $]-1, 4[$
- $f(0) = \frac{11}{4}$; $f(-1) = 3$; $f\left(\frac{5}{2}\right) = f(6) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 5] = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 0$.

1°) Dresser le tableau de variation de f ;

2°) Les équations de chacune des asymptotes ;

3°) Tracer soigneusement la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f .

PROBLÈMES ÉCONOMIQUES

EXERCICE : 01

Le coût moyen de production d'une quantité q est donné par : $C_{m_0}(q) = \frac{C(q)}{q}$;

le coût marginal de production d'une quantité q est donné par :

$$C_{m_q}(q) = C(q+1) - C(q).$$

Une entreprise produit des objets en quantité q dans un régime de concurrence parfaite. Le coût de production en milliers de francs de la quantité q est :

$$C(q) = q^2 + 100q + 100.$$

Le prix de vente p par unité lorsque la quantité produite est q est :

$$p(q) = 2q^2 - 4q + 300. \text{ On suppose } q \leq 100.$$

1) Calculer en fonction de q , le coût moyen C_{m_0} de production.

Déterminer la production q_0 qui rend le coût moyen minimum.

2) Calculer le coût marginal à partir de la définition ; puis à partir de la dérivée du coût total. Quelles remarques peut-on faire ?.

Vérifier que pour $q = q_0$ le coût moyen est égal au coût marginal obtenu à partir de la dérivée. Peut-on généraliser ce résultat ?.

3) Calculer, en fonction de q le revenu global puis le bénéfice réalisé.

Déterminer la production q_1 qui rend le revenu maximum.

Déterminer la production q_2 qui rend le bénéfice maximum.

EXERCICE : 02

Partie A : Soit C la fonction définie sur $[0 ; 300]$ par $C(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x$.

1°) a) Calculer $C'(x)$; où C' désigne la dérivée de C .

b) Établir le tableau des variations de C' sur $[0 ; 300]$ et en déduire son signe.

2°) On rapporte le plan d'un repère orthogonal (unités : 1cm pour 50 unités sur l'axe des abscisses et 1cm pour 750 000 unités sur l'axe des ordonnées).

On note $(\mathcal{E})$ représentative de C .

On note A le point de $(\mathcal{E})$ d'abscisse 10.

a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{E})$ au point A .

b) A l'aide des variations de C' , préciser la position de $(\mathcal{E})$ par rapport à (T) .

3°) Représenter graphiquement $(\mathcal{E})$ et (T) .

Partie B

Pour une entreprise E dont la production peut varier de 0 à 300 unités, le coût total de fabrication de x unités est donné par la fonction $C(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x$.

On rappelle que le coût marginal est la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire ; on choisit comme modélisation de ce coût marginal: $C_m(x) = C'(x)$.

On suppose que l'entreprise est en situation de monopole ; ce qui a pour effet que la demande est uniquement fonction du prix. La relation liant prix de vente unitaire p et demande x (en unités) est : $p(x) = -\frac{45}{8}x^2 + 2750$; (autrement dit quand x objets sont vendus, chacun l'est au prix $p(x)$.)

1°) Calculer la recette totale $R(x)$ pour x objets.

2°) On appelle recette marginale l'augmentation de recette procurée par la vente d'un objet supplémentaire ; on modélise cette recette marginale par : $r_m(x) = R'(x)$ où R' désigne la fonction dérivée de R . pour quelle valeur de la recette marginale est-elle égale au coût marginal ?

3°) Montrer que le bénéfice pour la fabrication et la vente de x unités est donné par :

$$B(x) = -\frac{x^3}{30} + \frac{75}{8}x^2 + 250x.$$

4°) a) Calculer $B'(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B .

b) En déduire que le bénéfice est maximum quand la recette marginale est égale au coût marginal. Que vaut alors ce bénéfice maximum ?

EXERCICE : 03

Une entreprise de maroquinerie fabrique des sacs de luxe. Chaque jour, elle produit un nombre x de sacs, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût, exprimé en milliers de francs, de la production journalière de x sacs est donné par : $f(x) = x^3 - 7x^2 + 20x$.

1°) a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f .

b) En déduire le sens de variation de f

2°) Le plan est muni d'un repère orthonormé tel que :

- 1 cm représente 1 sac en abscisse
- 1 cm représente 40 000 Frs en ordonnées.

a) Compléter le tableau des valeurs suivantes :

x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$										

c) Construire la représentation graphique ($\mathcal{C}_f$) de f .

3°) On suppose que toute la production est vendue au prix de 14 000 F l'unité.
La recette journalière, exprimée en milliers de francs est donnée par $g(x) = 14x$.

a) Exprimer le bénéfice journalier total $h(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$.

b) Vérifier que pour tout x de $[0 ; 10]$ $h(x) = -x(x-1)(x-6)$.

4°) a) Construire sur le même dessin, la représentation graphique de la fonction h .

b) Par lecture graphique, déterminer l'intervalle auquel x doit appartenir pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

c) Retrouver le résultat précédent par calcul.

EXERCICE : 04

A-/ soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1200x - 100$.

1°) Déterminer la limite de g en $+\infty$. Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2°) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[20 ; 40]$. Donner en justifiant, une valeur approchée de α à l'unité près.

3°) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B-/ Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}$. On appelle $(\mathcal{C}_f)$

sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. (On prendra 1cm pour 5 unités en abscisse et 1cm pour 20 unités en ordonnées).

1°) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2°) Montrer que pour tout x de $]0 ; +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ où g est la fonction définie dans la partie A-.

3°) Étudier les variations de f .

4°) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 50$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

5°) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{D})$ sur le même graphique.

6°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$. On donnera des valeurs approchées des solutions à l'unité près.

C-/ Le coût de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimé en centaines d'unités est définie sur $]0 ; 100[$ par $C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x^2}$. $C(x)$ étant exprimé en centaines d'euros. Le coût moyen de fabrication par centaines d'objets est donc défini par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1°) Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.

2°) On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 1300 euros. Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.