Problème 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{2\cos x - 1}$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Étudie la parité et la périodicité de f. En déduire un domaine d'étude $D_E = [0; \pi] \cap D_f$.
3. Calcule les limites de f aux bornes de D_E. Interprète graphiquement les résultats (asymptotes).
4. Montre que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{4\sin x}{(2\cos x - 1)^2}$.
5. Étudie le signe de $f'(x)$ sur D_E et dresse le tableau de variations complet de f sur cet intervalle.

6. Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère sur $[-\pi; \pi]$.
7. Trace les asymptotes puis la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Problème 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1 + \cos x}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f.
2. Montre que la fonction f est impaire et 2π-périodique.
3. Simplifie l'expression de $f(x)$ en utilisant les formules de duplication pour tout $x \in D_f$.
4. Calcule $f'(x)$ et étudie son signe sur l'intervalle $[0; \pi[$.

5. Dresse le tableau de variations de f sur $[0; \pi[$.
6. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{2}$.
7. Trace la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Problème 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$.

1. Détermine le domaine de définition D_f.
2. Montre que pour tout $x \in D_f$, $f(\pi - x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f) ?
3. Montre que $f'(x) = \frac{-2\cos x}{(1 + \sin x)^2}$.
4. Étudie les variations de f sur l'intervalle $I = [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.
5. Calcule les limites aux bornes des intervalles de définition inclus dans I

intervalles de définition inclus dans I.

6. Résous l'équation $f(x) = \frac{1}{3}$ sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
7. Trace la courbe (C_f) sur deux périodes.

Problème 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin x}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
2. Étudie la parité de la fonction f.
3. Montre que $f'(x) = \frac{-\cos x(1 + 2\sin^2 x)}{\sin^2 x}$.
4. Étudie le signe de $f'(x)$ et dresse le tableau de variations sur $]0; \pi[$.
5. Montre que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C_f).
6. Détermine les points où la tangente à la

courbe est horizontale.

7. Trace la courbe (C_f) sur $[-\pi; \pi]$.

Problème 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos(2x)}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f sur $[0; \pi]$.
2. Justifie que l'on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0; \pi]$ puis compléter par symétrie.
3. Calcule la dérivée $f'(x)$ et montre qu'elle s'annule en $x = 0$ et $x = \pi$.
4. Étudie les variations de f sur $[0; \pi]$.
5. Détermine les équations des asymptotes verticales.
6. Étudie la position relative de la courbe (C_f) par rapport à l'axe des abscisses sur $[0; \pi]$.
7. Trace la courbe (C_f) sur $[-\pi; \pi]$.

Problème 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f. (Attention aux conditions d'existence de $\tan x$).
2. Montre que f est π-périodique.
3. En utilisant les formules d'addition, montre que $f(x) = \tan(x + \dfrac{\pi}{4})$.
4. Retrouve le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}[$ en utilisant la question précédente.
5. Détermine les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
6. Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées.
7. Trace la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Problème 7

Soit la fonction f définie sur $[-\pi; \pi]$ par

$$f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}.$$

1. Détermine l'ensemble de définition D_f.
2. Montre que $f'(x) = \dfrac{-2}{(\cos x + \sin x)^2}$ pour tout $x \in D_f$.
3. Déduis-en le sens de variation de f sur chaque intervalle de D_f.
4. Calcule les limites de f aux bornes des intervalles de définition.
5. Résous l'équation $f(x) = 0$.
6. Détermine l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.
7. Trace la courbe (C_f) sur $[-\pi; \pi]$ en précisant les asymptotes.

Problème 8

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{}$ et (C_f) sa

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{}{1-\cos x}$ et (C_f) sa courbe.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f.
2. Étudie la parité de la fonction f.
3. Montre que $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x - 1}$.
4. Dresse le tableau de variations de f sur $]0;\pi]$.
5. Montre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ est infinie et interprète le résultat.
6. Calcule $f(\frac{\pi}{2})$ et $f(\frac{2\pi}{3})$.
7. Trace la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Problème 9

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2\cos(2x) - 1}{2\cos(2x) + 1}.$$

1. Détermine l'ensemble de définition D_f sur l'intervalle $[0;\pi]$.

2. Montre que la fonction est paire et π -périodique.
3. Calcule $f'(x)$ et étudie son signe sur $[0;\pi]$.
4. Dresse le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
5. Détermine les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
6. Détermine l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{4}$.
7. Trace la courbe (C_f) sur $[-\pi;\pi]$.

Problème 10

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin(2x)}.$$

1. Détermine l'ensemble de définition D_f.
2. Montre que $f(x) = \frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{2\cos x}$.
3. Montre que $f'(x) = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{2\sin^2 x \cos^2 x}$.

4. Étudie le signe de $(\sin x - \cos x)$ sur $[0; \pi]$ et déduis-en les variations de f.
5. Dresse le tableau de variations complet sur $]0; \pi[$.
6. Montre que la courbe admet une symétrie centrale que l'on précisera.
7. Trace la courbe (C_f) sur $[-\pi; \pi]$ avec ses asymptotes.

Problème 11

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\cos(3x)}{\cos x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f.
2. En utilisant la formule $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$, simplifie l'expression de $f(x)$ pour $x \in D_f$.
3. Étudie la parité et la périodicité de la fonction simplifiée.
4. Étudie les variations de la fonction sur $[0; \pi]$.

5. Détermine les coordonnées des extremums locaux.
6. Existe-t-il une limite finie de $f(x)$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$? Si oui, laquelle ?
7. Trace la courbe (C_f) sur $[-\pi; \pi]$. (Indiquez clairement les "trous" si la fonction n'est pas définie en certains points).

Problème 12

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos(2x)}.$$

1. Détermine l'ensemble de définition D_f.
2. Simplifie le dénominateur et montre que $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2\cos^2 x}$.
3. Montre que $f'(x) = \frac{(1 + \sin x)^2}{2\cos^3 x}$.
4. Étudie le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

5. Calcule les limites de f aux bornes de cet intervalle.
6. Détermine l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.
7. Trace la courbe (C_f) sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$.

Problème 13

Soit la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{1-2\cos x}{\sin x-\sqrt{3}\cos x}.$$

1. Transforme le dénominateur sous la forme $R\sin(x-\varphi)$.
2. Détermine l'ensemble de définition D_f.
3. Montre que f est 2π-périodique.
4. Calcule la dérivée $f'(x)$.
5. Étudie les variations de f sur l'intervalle $[0;2\pi]$.
6. Détermine les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses.

7. Trace la courbe (C_f) sur une période.

Problème 14

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f.
2. Montre que f est π-périodique et paire.
3. Montre que $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{(1 + \sin^2 x)^2}$.
4. Étudie les variations de f sur $[0; \dfrac{\pi}{2}]$.
5. Détermine l'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par f (l'ensemble des valeurs prises par f).
6. Détermine les points d'inflexion de la courbe sur $[0; \pi]$.
7. Trace la courbe (C_f) sur $[-\pi; \pi]$.

Problème 15

Soit la fonction f définie par

$f(x) = \dfrac{1 - \cos(3x)}{\sin^2 x}$ pour $x \neq 0$ (modulo π).

1. Détermine l'ensemble de définition D_f.

2. Montre que la fonction est paire.
3. Calcule la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0. (On pourra utiliser $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$).
4. On prolonge f par continuité en 0. Quelle est la valeur de $f(0)$?
5. Calcule $f'(x)$ pour $x \in D_f$.
6. Étudie les variations de f sur $]0; \pi[$.
7. Trace l'allure de la courbe (C_f) au voisinage de 0 et sur l'intervalle complet.