

Exercice 1

Trouve le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$
2. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{ x^2+x-2 }}$
3. $h(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$
4. $k(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1}$
5. $m(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-5}$ | 6. $n(x) = \frac{1}{2 \cos x - 1}$
7. $p(x) = \sqrt{\cos x + \sin x}$
8. $t(x) = \frac{x+1}{E(x)}$
<i>E étant la fonction partie entière</i>
9. $v(x) = \frac{2x}{E(x) - x}$
10. $i(x) = \frac{x+1}{ x +2}$ | 11. $r(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2+3}}{x - \sqrt{x^2+x-3}} \right)$
13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}-x}{3x}$
14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})$ |
|---|--|---|

Exercice 2

Calcule les limites suivantes :

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + 3x^2 - 7x + 4$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 7x^2 + 3}{12x^2 - 3x + 5}$
3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{3x^2 - 5x + 2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1-\sqrt{3x+1}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2x+4}-2}{x+3-\sqrt{2x^2-3x+9}}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$
8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x - 1$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 4x}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$
12. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2}$
14. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cotan x}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \tan x}$
16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{x^2 - 1}$ |
|--|---|--|

Exercice 3

1. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\tan x - 1}$. Si $x \in [0; 2\pi]$, détermine l'ensemble de définition de f puis étudie les limites de f en $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$
2. On considère la fonction f de variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{2 - \sqrt{1-x}}{x^2 + x - 6}$.
- (a) f est-elle continue au point $x = -3$?
- (b) Trouve un prolongement par continuité de f au point $x_0 = -3$

Exercice 4

1. Soit $\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$
 Étudie la continuité de f en $x_0 = 2$
2. Soit $\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{2 \cos x} - 1}{2 \cos 2x + 1} & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \\ g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$
 Étudie la continuité de g en $x_0 = \frac{\pi}{3}$
3. On donne $h(x) = |x-1| + \frac{1}{x}$, h est-elle continue en $x_0 = 1$?

Exercice 5

Soit la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{|x - 1| + m}; m \in \mathbb{R}.$$

1. Donne le domaine de définition D_m de f_m suivant les valeurs de m .
2. Calcule suivant les valeurs de m les limites de f_m aux bornes de D_m .
3. Étudie la continuité et la dérivabilité de f_2 sur D_2 .
4. Calcule $f'_2(x)$ et donne le signe de f'_2 .

Exercice 6

Soit g la fonction de variable réelle x définie par :

$$g(x) = \frac{3}{4} \sqrt{|x^2 - 4x - 12|}$$

1. Donne le domaine de définition D_g de g et justifie que g est continue sur D_g .
2. Étudie la dérivabilité de g en -2 et en 6 puis interprète les résultats obtenus.
3. Calcule $g'(x)$ sur l'ensemble de dérivabilité de g et étudie les branches infinies de (C_g) .

Exercice 7

1. Vérifie que : $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de $g : x \mapsto x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$

- (a) Étudie la continuité et la dérivabilité de la fonction en 0 puis calcule $f'(x)$ après avoir donné une interprétation graphique des résultats obtenus. On donne $f(0) = 0$.
- (b) Précise les branches infinies de (C_f) .

3. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^4 \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Détermine le domaine de définition de f .
 - (b) Étudie la dérivabilité de f en 0 .
 - (c) Calcule la dérivée première de f puis précise les branches infinies de (C_f) .
4. Détermine l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes et calcule leur dérivée première :

- (a) $f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3}$

- (b) $g(x) = \frac{\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2+3}}{|2x-1|}$

Exercice 8

I/ On considère la fonction numérique f variable réelle x dont les variations sont données dans le tableau ci-dessous

x	$-\infty$	2	4	7	$+\infty$
$f(x)$	1	0	-1	0	$+\infty$

Pour chacune des fonctions g , h et k ci-dessous définies, précise l'ensemble de définition : on donne $g(x) = [f(x)]^2$, $h(x) = \sqrt{f(x)}$ et $k(x) = \frac{1}{f(x)}$

II/ Soit la fonction numérique variable réelle x définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x - 1|} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Étudie la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 1.

Exercice 9

1. Dans chacun des cas suivants, détermine α ($\alpha \in \mathbb{R}$) pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$

$$(a) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = \alpha \end{cases} \quad (b) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \alpha \end{cases}$$

2. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}{x - 1}$, détermine une fonction g , prolongement par continuité de f en $x_0 = 1$

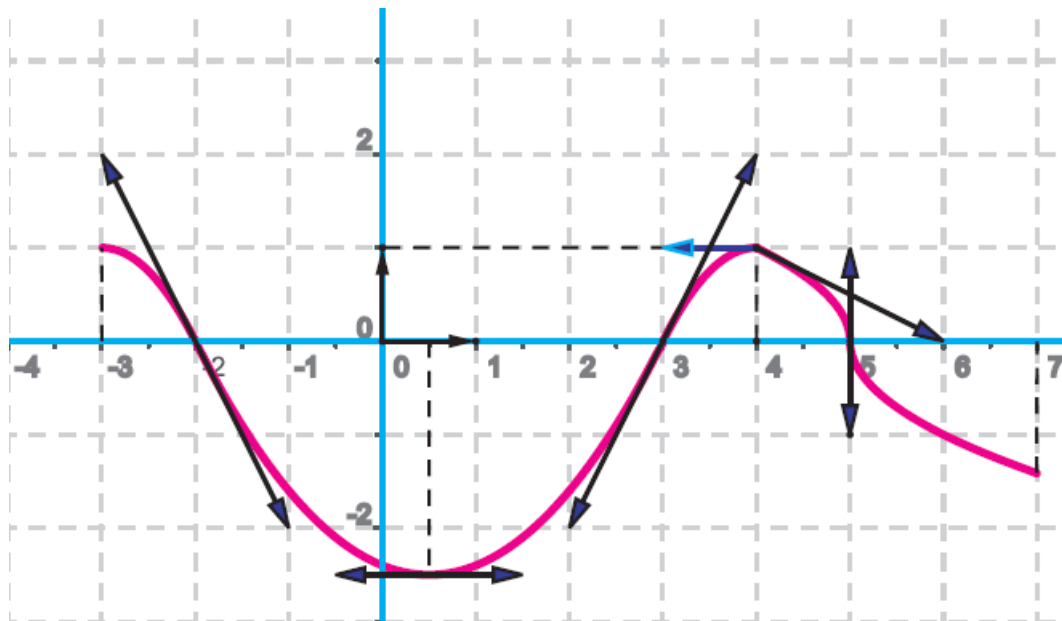
Exercice 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + |x - 2|}{|x + 1|}$ et (C) sa courbe représentative.

- Étudie la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 2.
- Étudie les variations de f et trace (C) .

Exercice 11

La représentation graphique suivante est celle d'une fonction f définie sur $[-3, 7]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$



- Utilise cette représentation pour déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.
- Justifie l'égalité $f'(-2) = -2$
 - Donne l'équation de la tangente à (C_f) au point $A(-2, 0)$
 - Détermine $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'(3)$
 - f est-elle dérivable en 4?
- Quel est le domaine de continuité de f ?
 - Quel est le domaine de dérivabilité de f ?

Exercice 1

I Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x^2 - x\sqrt{x} - 2$

1. Détermine le domaine de définition de f et calcule la limite de f en $+\infty$.

2. (a) Étudie la dérivabilité de f droite en 0. Interprète graphiquement ce résultat.

(b) Détermine l'intervalle de dérivabilité de f et montre que : $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(4\sqrt{x} - 3)}{2}$

(c) En déduire les variations de f et dresse le tableau de variation de f

3. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique β

4. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

II/ 1. Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$.

2. Étudie les limites de la fonction $h(x) = \frac{x+1}{2-\cos x}$

Exercice 2

I. Soit la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1. Calcule $f'(x)$ et en déduis que pour tout x de $[0; 1]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. Montre que pour tout x de $[0; 1]$ on a :

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - 1|$$

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4}$

1. Démontre que pour tout x de $[4; 6]$ on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{8}$.

2. Montre que pour tout x de $[4; 6]$ on a : $\left|f(x) - \frac{11}{2}\right| \leq \frac{3}{8}|x - 6|$

Exercice 3

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\cos x \cdot \sin x}{(1 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

1. (a) Détermine D le domaine de définition de f .

(b) Étudie la parité et la périodicité de f .

2. (a) Montre que f est dérivable sur D .

(b) Calcule $f'(x)$.

(c) Exprime $f'(x)$ en fonction de $\cos x$.

3. Soit g la restriction de f sur $[0; \pi]$.

(a) Étudie les variations de g .

(b) Trace la courbe de g .

Exercice 4

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{m + \cos 2x}{-m + 2 \cos 2x} \end{aligned}$$

On désigne par (C_m) la courbe de f_m dans un repère orthonormé.

1. Caractérise f_0 et représente (C_0) sur $[-\pi; \pi]$.
2. Montre que toutes les (C_m) avec $m \neq 0$ passent par des points fixes que l'on déterminera.
3. Détermine la valeur de m pour que (C_m) passe $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
4. On prend $m = 1$. On définit ainsi la fonction $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos 2x - 1}$
 - (a) Étudie la partie et la périodicité de f .
 - (b) Détermine I le domaine d'étude de f .
 - (c) Détermine les variations de f .
 - (d) Trace (C) la courbe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
5. Soit $g(x) = \frac{1 + \sin 2x}{2 \sin 2x - 1}$ et (C') sa courbe.
 - (a) Montre que (C') se déduit de (C) par translation de vecteur $\frac{\pi}{4}\vec{i}$.
 - (b) Déduis les variations de g sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \cap D_g$.

Exercice 5

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + \sqrt{|4x^2 - 1|} \end{aligned}$$

et (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; I, J)$ tel que l'unité graphique sur (O, I) soit 4 cm et sur (O, J) , 2 cm.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. f est-elle dérivable :
 - a. au point $-\frac{1}{2}$?
 - b. au point $\frac{1}{2}$?
3. Calculer le nombre dérivé de f .
 - a. En un point x tel que $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
 - b. En un point x tel que $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.
4.
 - a. Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0$ est l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$.
 - b. Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{1 - 4x^2} - 4x > 0$ est l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right]$.
 - c. En déduire le signe de $f'(x)$:
 - pour $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$,
 - pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.
5.
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et donner le tableau des variations de f .
 - b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$.
En déduire de (C) admet deux asymptotes d'équations respectives : $y = -x$; $y = 3x$.
 - c. Tracer la courbe (C) .
6. Soit h la restriction de f à l'intervalle : $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.
 - a. Montrer que h est une bijection de $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h . Calculer $h^{-1}(0)$ puis trouver une équation de la tangente T à la courbe (Γ) , représentant les variations de h^{-1} , au point de coordonnées $(0, h^{-1}(0))$.

c. Construire T et (Γ) sur le même graphique que (C) .

Exercice 6

Soit la fonction f , définie par :

$$x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3},$$

où x est la variable et m un paramètre; à chaque valeur de m correspond une courbe représentative (C_m) .

1. Montrer que les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer m pour que le point P d'intersection de (C_m) et de l'asymptote parallèle à $(x'x)$ ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.
3. Construire la courbe (C_0) .
4. Discuter le nombre des points d'intersection de (C_0) et de la droite (T) d'équation $y = tx$.
5. Calculer la fonction dérivée seconde de f_0 et rechercher les valeurs de x qui l'annulent. Montrer que les points correspondants de (C_0) sont alignés.
6. Dans le cas où (T) coupe (C_0) en deux points A et B distincts de O , déterminer l'ensemble des points I , I étant le milieu de $[A, B]$.

Exercice 7

Déterminer les nombres réels a, b, c pour que la courbe représentative de la fonction f , définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + 2x + c}{2x^2 + bx - 1}$$

passse par l'origine des coordonnées et admette les droites $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = 0$ pour asymptotes.

Exercice 8

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = 2 \cos x - \cos 2x$.
Étudier les variations de la fonction f et représenter le graphe de f dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Soit F la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.
 - a. Déterminer l'image par F de $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, notée E .
 - b. Démontrer que, pour tout λ de E , l'équation $F(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.

1. Démontrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0; \pi]$.
2. a. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
b. Représenter graphiquement la fonction F , restriction de f à $[-\pi; \pi]$. On note (C) la courbe ainsi obtenue.
3. Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points.
4. En utilisant la courbe (C) résoudre, dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$, l'équation d'inconnue x et de paramètre réel m : $\sin^2 x + \cos x - m = 0$.

Exercice 10

Soit

$$g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de g ?
2. Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall x \in Dg \quad g(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.
3. Étudier les variations de g et les limites aux bornes de Dg .

4. Montrer que I d'abscisse 0 est un centre de symétrie à la courbe de g .
5. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe (C_g) de g au point I .
6. Étudier la position de (C_g) par rapport à (Δ) .
7. Soit $h : x \mapsto \frac{3x^2 + 4|x| - 3}{x^2 - 1}$
 - (a) Étudier la parité de h
 - (b) Tracer la courbe de h partir de celle de g .

Exercice 11

Analyser puis interpréter chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

1. les domaines de définition.
2. les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.
3. Donner l'allure de la courbe (C_f) dans chaque cas.

(a) f est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$			1	$-\infty$

De plus : La courbe (C_f) admet l'axe $(y'oy)$ comme branche parabolique.

(b) h est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$h'(x)$	+		+	0	-		-
$h(x)$	-1	$+\infty$		0		$+\infty$	3

4. Dresse le tableau de variation de la fonction numérique donnée partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

(a) Pour f :

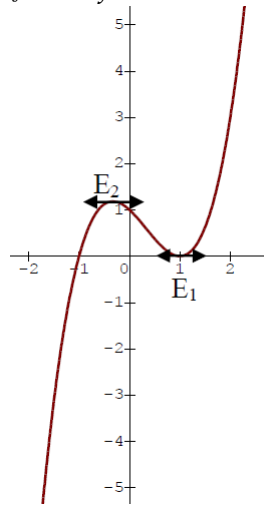
- i. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$
- ii. f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $E_1(\frac{3}{2}; 4)$ et $(-1; -\frac{5}{2})$ sont ses extremums.
- iii. les droites $x = 2$ et $x = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

(b) Pour h :

- i. h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0; 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
- ii. le point de coordonnées $(0, 3; 0, 4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (Ch) et h est croissante sur $[0; 0, 3] \cup [2; +\infty[$
- iii. les droites d'équations $y = -1$ et $y = -2x + 1$ sont asymptotes de (Ch) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$
- iv. les points de coordonnées $(0; 0)$; $(1; 0)$ et $(2; -2)$; appartiennent à (Ch)

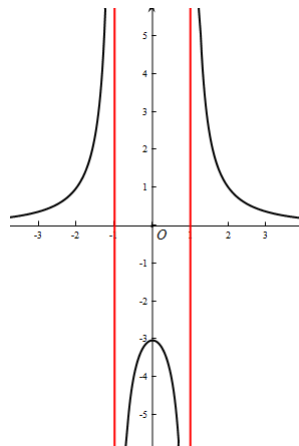
5. (a) Analyser chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.
- (b) Déterminer les réels a ; b ; c ... en utilisant le graphique.

i. f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



De plus : $E_1(1; 0)$ et $E_2(-\frac{1}{3}; \frac{32}{27})$ sont les sommets de la courbe (C_f) .

ii. La fonction donnée est g telle que : $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$



Exercice 12

La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation.

On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de f .

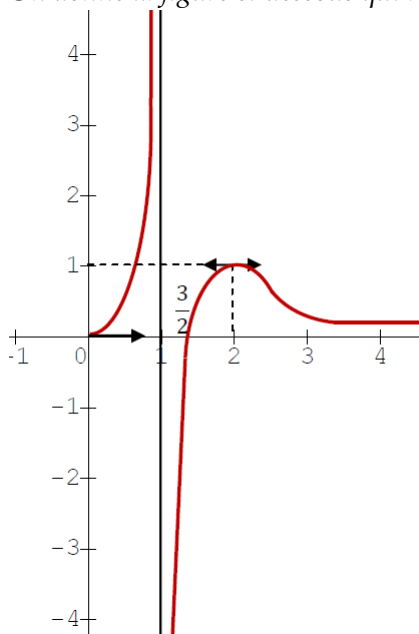
x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	-	-
$f(x)$		1	$+\infty$	3

- Tracer la courbe (C) de f .
- Compléter le tableau de variation de f .
- On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$
 - Déterminer les réels $a; b; c; \beta$ et α .
 - Montrer que la restriction g de f à $I =]2; 4]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
 - Donner l'équation de la tangente à la courbe (C') de g^{-1} au point d'abscisse 1.
 - Tracer (C') .
 - Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre m , du nombre et des signes des solutions de l'équation

$$(3 - m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$$

Exercice 13

On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction g .



1. Compléter la courbe de la fonction f sachant que f est impaire.
2. Donner les équations des asymptotes à (Cf) .
3. Quel est le domaine de définition de f sous forme de réunion d'intervalles.
4. Donner les limites de f aux bornes de ce domaine.
5. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 14

1. Aux trois réels $a; b; c$ on associe la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Déterminer les constantes $a; b; c$ pour que (C) passe par les points $A\left(\frac{1}{8}\right); B\left(\frac{-4}{-2}\right)$; et admette au point E d'abscisse -2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x}$
 - (a) Étudier les variations de la fonction f .
 - (b) Montrer que le point d'intersection I des asymptotes est centre de symétrie de la courbe (C) .
 - (c) Étudier la position de (C) par rapport à son asymptote oblique (Δ) .
 - (d) Construire la droite (Δ) et la courbe (C) .
 - (e) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation : $x^2 + (3 - m)x + 4 = 0$.
 - (f) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) \leq 8; f(x) \geq 8; f(x) \geq 0; f(x) \leq 0$.

Exercice 15

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

1. Démontre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; 2[$.
2. Dessine une représentation graphique de f et trouve un centre de symétrie pour cette courbe.
3. Détermine $f^{-1}(x)$ et donne une représentation graphique de f^{-1} , dans le même repère orthonormé que pour f .

Exercice 16

Étudie les variations de $g : x \mapsto 2x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.

Trouve les asymptotes, construis la courbe et les tangentes aux points particuliers.

Exercice 17

Une rectangle de côtés variables est inscrit dans un cercle donné de rayon R .

Démontre que le rectangle d'aire maximum est le carré.

Quelle est son aire ?

Exercice 1

1. Primitive simple

Détermine les primitives des fonctions suivantes

(a) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 10x - 4;$

(b) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 + 5x;$

(c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x + 1;$

(d) $f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5x + 7;$

(e) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x}};$

(f) $f(x) = 4x + \frac{1}{\sqrt{x}};$

(g) $f(x) = \sin 3x;$

(h) $f(x) = 4 \cos 2x;$

(i) $f(x) = \sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right);$

(j) $f(x) = \cos (6x + 2).$

2. Forme $u'u^n$

Détermine les primitives des fonctions suivantes

(a) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 4)^3;$

(b) $f(x) = (-3x + 2)^4;$

(c) $f(x) = (5 - 2x)^6;$

(d) $f(x) = (5x + 1)^7;$

(e) $f(x) = (x - 4)^3;$

(f) $f(x) = (6x + 3)(x^2 + x + 1)^4;$

(g) $f(x) = 5x(x^2 + 1)^6;$

(h) $f(x) = \frac{6}{x^2} \left(\frac{x-1}{x} \right)^2;$

(i) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right) (x^2 - x)^4;$

(j) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}};$

(k) $f(x) = 7x^2(x^3 + 5)^3;$

(l) $f(x) = 3x^2(x^3 + 1)^5;$

(m) $f(x) = x(x^2 - 4)^2;$

(n) $f(x) = (x^3 - 7x + 1)^5(3x^2 - 7);$

(o) $f(x) = \sin x \cos^3 x;$

(p) $f(x) = \cos x \sin^4 x;$

(q) $f(x) = \tan^3 x + \tan^5 x.$

3. Forme $\frac{u'}{u^n}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes

(a) $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x - 3)^3};$

(b) $f(x) = 5 + x + \frac{4}{(x + 1)^2};$

(c) $f(x) = \frac{3x}{(x^2 + 2)^3}$

(d) $f(x) = -x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{(x + 3)^2};$

(e) $f(x) = \frac{-x}{(x^2 - 9)^5};$

(f) $f(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 3x^2 + 2}{x^2};$

(g) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^4 x};$

(h) $f(x) = \frac{3}{(5x - 1)^2};$

(i) $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^4};$

(j) $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 2)^3};$

(k) $f(x) = \frac{3x + 6}{(x^2 + 4x + 3)^4};$

(l) $f(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)^2;$

(m) $f(x) = \frac{1}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)};$

(n) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2};$

(o) $f(x) = \frac{1}{\tan^3 x} + \frac{1}{\tan x};$

(p) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$

4. Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes

$$(a) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}};$$

$$(b) f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 - x}};$$

$$(c) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}};$$

$$(d) f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 4}};$$

$$(e) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5 + x^3}};$$

$$(f) f(x) = \frac{4x - 2}{x^2 - x + 1};$$

$$(g) f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}};$$

$$(h) f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}};$$

$$(i) f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 - 1}};$$

$$(j) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5. **Forme** $u' \sqrt{u}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes

$$(a) f(x) = 3x\sqrt{x^2 + 1};$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x + 5};$$

$$(c) f(x) = \sqrt{4x + 9};$$

$$(d) f(x) = x\sqrt{9 + x^2};$$

$$(e) f(x) = x^2\sqrt{1 + x^3};$$

$$(f) f(x) = (-2x + 1)\sqrt{5x^2 - 5x + 4};$$

$$(g) f(x) = \cos x \sqrt{1 + \sin x};$$

$$(h) f(x) = \frac{1}{3}(6x^2 - 8x)\sqrt{x^3 - 2x^2 + 3}$$

6. **Forme** $v'(x) \times u' \circ v(x)$

Détermine les primitives des fonctions suivantes

$$(a) f(x) = \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x});$$

$$(c) f(x) = \frac{\cos \sqrt{2x + 1}}{\sqrt{2x + 1}};$$

$$(d) f(x) = 2x \sin(x^2);$$

$$(e) f(x) = (x + 1)^3 \sin[(x + 1)^4];$$

$$(f) f(x) = (x + 1) \cos(x^2 + 2x);$$

$$(g) f(x) = (2x + 1) \sin(x^2 + x + 1);$$

7. **Forme** $u' \times v + v' \times u$ ou $\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$

Détermine les primitives des fonctions suivantes

$$(a) f(x) = x \cos x + \sin x;$$

$$(b) f(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x};$$

$$(c) f(x) = x(2 \cos x - x \sin x);$$

$$(d) f(x) = \sqrt{x} \cos x + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}};$$

$$(e) f(x) = x^2 + 2x \tan x + x^2 \tan^2 x;$$

$$(f) f(x) = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2};$$

$$(g) f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2};$$

$$(h) f(x) = \frac{x \cos x - \sin x + \cos x}{(x + 1)^2};$$

$$(i) f(x) = \sqrt{1 + x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$(j) f(x) = \frac{2x \cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}}.$$

8. **Forme trigonométrique**

Détermine les primitives des fonctions suivantes

$$(a) f(x) = \sin 3x;$$

$$(b) f(x) = 4 \cos 2x;$$

$$(c) f(x) = \sin(4x + 3);$$

$$(d) f(x) = \cos 3x + 6 \sin 3x - \sin x \cos 3x;$$

$$(e) f(x) = 10 \sin 5x + 12 \cos 4x - 3 \sin\left(6x - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$(f) f(x) = \cos 2x \times \cos 3x;$$

$$(g) f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin 2x};$$

$$(h) f(x) = \cos^5 x;$$

$$(i) f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$(j) f(x) = \cos^5 x;$$

$$(k) f(x) = \sin^4 x;$$

$$(l) f(x) = \cos^2 x \times \sin^3 x;$$

$$(m) f(x) = \cos^3 x \times \sin^3 x;$$

$$(n) f(x) = \sin x \times \cos 2x;$$

$$(o) f(x) = \sin 3x \times \cos 4x;$$

$$(p) f(x) = \sin x \times \cos 3x;$$

$$(q) f(x) = \cos^5\left(\frac{3}{2}x\right);$$

$$(r) f(x) = (\sin x + \cos x)^2.$$

9. **Formes pièges**

Détermine les primitives des fonctions suivantes

- (a) $f(x) = \tan^2 x$;
 (b) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3(x+1)^2}$;
 (c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$;
 (d) $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$;
 (e) $f(x) = x\sqrt{x+1}$;
 (f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$;
 (g) $f(x) = \frac{3x^3 + 5x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$;

10. Primitive vérifiant une condition

Détermine les primitives des fonctions suivantes

- (a) $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et $F(0) = 7$;
 (b) $f(x) = \frac{2}{(3-x)^3}$ et $F(0) = 0$;
 (c) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$ et $F(0) = \sqrt{5}$;
 (d) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x}$ et $F(\pi) = 1$;
 (e) $f(x) = (x-3)^6$ et $F(3) = 0$;
 (f) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$;
 (g) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ et $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$;
 (h) $f(x) = \sin x \cdot \cos^4 x$ et $F(\pi) = 0$.

Exercice 2

1. On désigne par f la fonction numérique de la variable réelle x ainsi définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

- (a) Démontre qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on ait :

$$f(x) = b \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + a$$

- (b) Détermine la primitive de f qui s'annule en 0.

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2}$$

- (a) Prouver que pour tout $x \neq 1$, f peut s'écrire $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ où a , b et c sont des réels que l'on déterminera.

- (b) Trouve une primitive de f sur son domaine de définition

3. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{12x^2 - 37x + 13}{(5x-2)(2x-1)^2}$$

- (a) Précise l'ensemble de définition D_f de f

- (b) Détermine les nombres réels a , b tels que pour tout nombre réel x :

$$f(x) = \frac{a}{5x-2} + \frac{b}{(2x-1)^2}$$

- (c) Donne une primitive à f sur $\left]-\infty; \frac{2}{5}\right[$

4. Soit les fonctions f et F définies par

$$f(x) = x\sqrt{3-2x} \quad \text{et} \quad F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$$

- (a) Déterminer les réels a ; b et c tel que $\forall x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$

- (b) Donne une primitive à f sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition et la dérivée de $f(x)$ dans cas suivants :

- | | |
|---|---|
| 1. $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x};$ | 9. $f(x) = x - 1 + xe^{\frac{1}{x}};$ |
| 2. $f(x) = \ln(1 - 2x^2);$ | 10. $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x};$ |
| 3. $f(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{1-x}\right);$ | 11. $f(x) = \frac{\ln x}{x-2};$ |
| 4. $f(x) = x^2 \ln(-x^2 + 6x - 5);$ | 12. $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x};$ |
| 5. $f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right);$ | 13. $f(x) = x^2 - 3 + \ln 3x - 9 ;$ |
| 6. $f(x) = \ln(x+3) + \ln(3-x);$ | 14. $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right);$ |
| 7. $f(x) = \ln -x^2 - 3x + 4 ;$ | 15. $f(x) = 3x + 2 - \ln(\sqrt{-x^2 + 3x - 2});$ |
| 8. $f(x) = -3x + 1 + \ln\left \frac{x+3}{-x+5}\right ;$ | 16. $f(x) = \sqrt{3 - \ln x}.$ |

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes

$A = \ln e + \ln(e^2) + \ln(e^3);$	$H = \frac{\ln(\sqrt{19} - \sqrt{3}) + \ln(\sqrt{19} + \sqrt{3})}{4 \ln 2};$
$B = \ln e - \ln \frac{1}{e};$	$I = \ln(a^7) - 12 \ln \sqrt{a} + \ln\left(\frac{2}{a}\right);$
$C = \ln e \sqrt{e};$	$J = 6 \ln\left(a^{-\frac{3}{2}} \times b^{\frac{7}{2}}\right) + 4 \ln\left(\frac{a^3}{b^6}\right)^{\frac{5}{6}};$
$D = \ln(e^{-2}) + \ln(e^{-1});$	$K = \frac{e^{3+\ln x^2}}{x \ln 3^x} e^{\ln(\ln 3) + \ln x - 3}.$
$E = \ln 2 + \ln(16e) - \ln(4e^4);$	
$F = 2 \ln(2 + \sqrt{5}) + \ln(9 - 4\sqrt{5});$	
$G = \ln \frac{1}{3} + \ln \frac{3}{5} + \ln \frac{5}{7} + \ln \frac{7}{9};$	

Exercice 3

1. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- | | |
|---|--|
| (a) $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5);$ | (j) $\ln x-1 + \ln x+2 = \ln 4x^2 + 3x - 7 ;$ |
| (b) $2 \ln(x-2) + \ln(3x+1) = 2 \ln 2;$ | (k) $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln 5 + 2 \ln 3;$ |
| (c) $\ln x+1 + \ln x-5 = \ln 16;$ | (l) $\ln 6-x = 1;$ |
| (d) $\ln(-x-1) = \ln\left(\frac{-x-10}{x+2}\right);$ | (m) $\ln x - \frac{1}{\ln x} = \frac{15}{4};$ |
| (e) $6 \ln^2 x + 7 \ln x - 3 = 0;$ | (n) $\ln^3 x - 2 \ln^2 x - \ln x + 2 = 0;$ |
| (f) $\ln^2 x - 7 \ln x + 6 = 0;$ | (o) $\ln(x+2) + 1 = \ln(x-1) + \ln 2$ |
| (g) $\ln(3x-5) = 0;$ | (p) $\log x + \log(3-x) = \log 5$ |
| (h) $2 \ln(2x-1) - \ln(3x-2x^2) = \ln\left(\frac{4x-3}{x}\right)$ | (q) $\log_3^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + \log_9^{(2x+\frac{5}{3})} = 0;$ |
| (i) $\ln 24 + \ln(3-x) = \ln(x+1) + \ln(25x-49);$ | |

2. Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- | | |
|---|--|
| (a) $\ln(x^2 - 10x + 9) \leq \ln(3x - 27);$ | (f) $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{8}{3};$ |
| (b) $\ln(x(3-x)) \leq \ln 2;$ | (g) $2(\ln 2x)^2 - 5 \ln 2x - 3 \leq 0;$ |
| (c) $\ln(5x^2 + 6x + 1) > 0;$ | (h) $\ln(x+5) + \ln(x+4) \leq \ln(x+13);$ |
| (d) $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) \leq 0;$ | (i) $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln 3x;$ |
| (e) $\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) \geq \ln(5x);$ | (j) $\ln^2 x + 2 \ln x - 15 < 0.$ |

Exercice 4

Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = 6 \ln 2 \end{cases} ;$
2. $\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = 9 \\ \ln x + 5 \ln y = -2 \end{cases} ;$
3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 2 + \ln 3 \end{cases} ;$
4. $\begin{cases} \ln(x^3 y^4) = 6 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y^5}\right) = 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} \ln y = \ln x + 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \ln x^3 + \ln y^2 = 3 \\ \ln y^2 - \ln x^2 = -2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} \ln x^3 - \ln y^2 = -4 \\ \ln x + \ln y^4 - 1 = 0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} \ln(x-2) + 3 \ln(y-1) = 0 \\ 2 \ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x + y = 7 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x + y = 29 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x + y = 4e \\ \log x + \log y = 2 + \ln 3 \end{cases}$
12. $\begin{cases} xy = 243 \\ \log_x^y + \log_y^x = \frac{17}{4} \end{cases}$
13. $\begin{cases} xy = 256 \\ \log_y^x + \log_x^y = \frac{50}{7} \end{cases}$
14. $\begin{cases} 5 \log_2 x + 2 \log_2 y = 8 \\ 4 \log_2 x - 3 \log_2 y = 11 \end{cases}$
15. $\begin{cases} 7(\log_y x + \log_x y) = 50 \\ xy = 256 \end{cases}$

Exercice 5

1. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- (a) $e^{5x+1} = e^{3x+2};$
- (b) $e^{x^2+2} = e^{3x};$
- (c) $e^{x^2} = 4;$
- (d) $e^{x+3} \times e^{x-2} = e^3;$
- (e) $\frac{e^x}{e^3} = e^5;$
- (f) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0;$
- (g) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0;$
- (h) $e^x - 10e^{-x} = 3;$
- (i) $e^{3x} - 19e^x + 30 = 0;$
- (j) $e^{2(x+1)} - 8e^{x+2} - 9e^2 = 0;$
- (k) $3^{2x+2} + 26 \times 3^x - 3 = 0;$
- (l) $e^{3x+2} + \frac{e}{e^{3x+2}} = e + 1;$
- (m) $\frac{e^{2x} - 6}{2 - 2e^x} = 1;$
- (n) $-4e^{3x} + 17e^{2x} + 16e^x - 5 = 0;$
- (o) $3e^{3x} - 4e^{2x} - 13e^x + 14 = 0;$
- (p) $2e^{2x-4} + 5e^{x-2} - 3 = 0;$
- (q) $2e^{3x-3} + 3e^{2x-2} - 8e^{x-1} + 3 = 0.$

2. Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- (a) $e^{2x} - e^x - 12 > 0;$
- (b) $3e^{2x} + e^x - 10 \geq 0;$
- (c) $2e^{2x} - 11e^x + 15 > 0;$
- (d) $e^{2x+2} - \frac{1}{2}e^{x+2} - \frac{3}{2}e^2 \geq 0$

3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Déduis en la résolution des équations suivantes

- (a) $9^x - 3^{x+1} - 10 = 0;$
- (b) $4^x - 3 \times 2^x - 10 = 0;$
- (c) $(\log x)^2 - 3(\log x) - 10 = 0$

4. Soit le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

- (a) Calcule $P(1)$.
- (b) Écris $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
- (c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
- (d) Déduis en la résolution dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations
 - i. $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 4(\ln x) + 4 = 0;$
 - ii. $e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 = 0.$

iii. $27^x - 9^x - 4 \times 3^x + 4 = 0$

5. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations :

(a) $3^{3x} = 2^{3x}$

(b) $6^{2\sqrt{x}} + 5 \times 6^{1+\sqrt{x}} - 6^3 = 0$

6. Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} 3e^x - 4e^y = -6 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2 \ln 6 \\ e^x = \frac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} e^x + 2e^y = 1 \\ -3e^x + e^y = 4 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \ln(y+1) - \ln(x+4) = -\ln 8 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \ln x - 2 \ln y = \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^{2-y}} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} e^{2x} - 4e^x + 3 > 0 \\ 2e^{2x} - 11e^x + 5 \leq 0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 4^x \times (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \times 8^y = 4^{y-1} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \ln(3x+4y) - \ln 7 = \ln(2-5x) + \ln 5 \\ e^{x-2} \times e^{y+3} = 1 \end{cases}$

Exercice 6

A/ 1. Résous dans $\mathbb{R}$:

(a) l'équation : $x^2 - 3x - 4 = 0$

(b) l'inéquation $x^2 - 3x - 4 < 0$

2. Déduis de 1.) les solutions dans $\mathbb{R}$:

(a) l'équation $(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 = 0$

(b) l'inéquation $(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 < 0$

B/ On considère la fonction polynôme définie par :

$$P(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$$

1. (a) Calcule $P(2)$

(b) Déduis que $P(x)$ peut se mettre sous la forme : $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c désignent trois nombre réels que l'on déterminera.

(c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

.

2. Déduis de 1-) les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations

(a) $3(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - \ln x + 10 = 0$

(b) $3(\ln x)^2 - 8(\ln x) = \frac{(\ln x) - 10}{\ln x}$.

Exercice 7

On pose $p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

1. Calcule $p(-1)$, déduis - en une factorisation de p .

2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $p(x) = 0$.

3. Étudie le signe $p(x)$ suivant les valeurs de x .

4. Déduis en la résolution dans $\mathbb{R}$ de :

(a) $2x^6 + 7x^4 + 2x^2 - 3 = 0$;

(b) $2 \ln^3 x + 7 \ln^2 x + 2 \ln x - 3 = 0$

(c) $\ln(2x+3) + \ln(x^2+2x+2) = \ln(8x+9)$

(d) $2e^{3x} + 7e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

(e) $2 \times 27^x + 7 \times 9^x + 2 \times 3^x - 3 = 0$

(f) $2 \log_2^3(x) + 7 \log_2^2(x) + 2 \log_2(x) - 3 = 0$

5. Déduis en la résolution dans $\mathbb{R}$ de :

(a) $2x^6 + 7x^4 + 2x^2 - 3 > 0$;

(b) $2 \ln^3 x + 7 \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \leq 0$

- (c) $\ln(2x+3) + \ln(x^2+2x+2) < \ln(8x+9)$
 (d) $2e^{3x} + 7e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$
 (e) $2 \times 27^x + 7 \times 9^x + 2 \times 3^x - 3 > 0$
 (f) $2 \log_2^3(x) + 7 \log_2^2(x) + 2 \log_2(x) - 3 < 0$

Exercice 8

A/ Étudie et représente les fonctions suivantes :

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. $f(x) = 5 + \ln(12 - 3x)$; | 4. $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x - 2)$ |
| 2. $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x - 1)$; | 5. $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$; |
| 3. $f(x) = 2x^2 - \ln x$ | 6. $f(x) = \ln(x+3) + \ln(3-x)$; |

B/ Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives de la fonction f sur l'intervalle i .

- | | |
|--|---|
| 1. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $I = \mathbb{R}$; | 6. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ et $I =]0; +\infty[$; |
| 2. $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ et $I =]-2; 2[$; | 7. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ et $I =]0; \frac{\pi}{2}[$; |
| 3. $f(x) = 2 + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$ et $I =]-\infty; -2[$; | 8. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ et $I =]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$; |
| 4. $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1}$ et $I =]-\infty; -1[$; | 9. $f(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}$ et $I =]0; \frac{\pi}{2}[$. |
| 5. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $I =]0; +\infty[$; | |

10. Dans chacun des cas suivants, détermine deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = a + \frac{b}{x-2}$$

Déduis en une primitive de f sur $]2; +\infty[$

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| (a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$; | (c) $f(x) = \frac{1-2x}{x-2}$; |
| (b) $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$; | (d) $f(x) = \frac{-3x}{x-2}$; |

11. Soit la fonction $f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1}$.

(a) Détermine trois nombres réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}, f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}$$

(b) Déduis en les primitives de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

12. Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$ et $g(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$.

Détermine successivement les primitives sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ de chacune des fonctions $f+g$, $f-g$, f et g .

Exercice 9

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions, puis les limites aux bornes de l'ensemble de définition :

1. $f(x) = x^2 \ln(-x^2 + 6x - 5);$
2. $f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{1-x} \right);$
3. $f(x) = |\ln(x+3)|;$
4. $f(x) = \ln |-x^2 - 3x + 4|;$
5. $f(x) = -3x + 1 + \ln \left| \frac{x+3}{-x+5} \right|;$
6. $f(x) = x^2 - 3 + \ln |3x - 9|;$
7. $f(x) = x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|;$
8. $f(x) = 3x + 2 - \ln \left(\sqrt{-x^2 + 3x - 2} \right);$
9. $f(x) = \sqrt{3 - \ln x};$
10. $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2};$
11. $f(x) = \frac{5}{e^x - 1};$
12. $f(x) = \frac{3x}{e^x + 1};$
13. $f(x) = \ln(e^x - 2);$
14. $f(x) = 1 + xe^{\frac{1}{x}};$
15. $f(x) = \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right);$
16. $f(x) = \ln(e^{x+1} + 2);$
17. $f(x) = \sqrt{e^x - 3};$
18. $f(x) = x + e^{\ln \left(\frac{3}{x^2 - 4} \right)};$
19. $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1};$
20. $f(x) = x + 4 - \frac{4}{e^x + 1};$
21. $f(x) = e^x(e^x - 2).$

Exercice 10

Étudier et représenter les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\ln x}{x};$
2. $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x;$
3. $f(x) = (x - 1)e^{-x};$
4. $f(x) = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right);$
5. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
6. $f(x) = f(x) = e^x - e^{\frac{x}{2}};$
7. $f(x) = e^{2x} + e^x - 2;$
8. $f(x) = |1 - x|e^x$

Exercice 11

Soit $g(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$

1. Étudie les variations de g et le signe de $g(x)$. Trace la courbe de g .
2. Démontre que l'équation $x \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1; e]$.

Exercice 12

Étudie les variations et le signe de $g(x) = (1+x)(\ln(1+x))^2 - x^2$ et en déduis les variations de f telle que $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}.$

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$$

1. Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Détermine le sens de variation de f .
En déduis le nombre de solutions de l'équation $3^x + 4^x = 5^x$.

Exercice 14

A/ On désigne par g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1.$

1. Détermine la limite de g en 0.
2. Détermine la limite de g en $+\infty$.
3. Étudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.
4. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .
5. Justifie que $\alpha \in]1, 23; 1, 24[$ (*).

6. Donne le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
 B/ On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - \ln x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On désigne par C la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montre que f est continue en 0.
2. Étudie la dérivabilité de f en 0.
3. Détermine la limite de f en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat.
4. Montre que $f'(x)$ est de même signe que $g(x)$.
 En déduis les variations de f puis dresse son tableau de variation.
5. Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{e^\alpha - \frac{1}{\alpha}}$.

- C/ 1. Étudie le sens de variation de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{e^x - \frac{1}{x}}$.
2. En utilisant l'encadrement $(*)$ du réel α , détermine un encadrement de $f(\alpha)$.
 En déduis que 0,38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} .
 3. Trace la courbe C et précise ses tangentes au points d'abscisses 0 et α .

Exercice 15

.....
 f est la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x) - \ln(x+1)$. (C) est sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Étudie la limite de f en 0. Quelle conséquence peut-on en déduire pour (C) ?
2. Vérifie que pour tout réel $x > 0$ on a $f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.
 Déduis en la limite de f en $+\infty$. Quelle conséquence peut-on en déduire pour (C) ?
3. Calcule la dérivée de f et montre que $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.
4. Construis la tableau de variation de f
5. Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Trace la courbe (C) .

Exercice 16

.....
 On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = x \ln\left(\frac{2x-1}{x}\right)$$

on note (C_f) la courbe représentative de f dans un système d'axes orthonormés (unité 2 cm sur chaque axe).

1. (a) Étudie le domaine de définition D_f de f .
 (b) Calcule les limites de f aux bornes de D_f . Pour étudier la limite de f lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives on pourra poser $-u = x$
2. Étudie les variations de la fonction dérivée f' de f . Déduis en le signe de f' .
3. (a) Démontre que la droite d'équation $y = x \ln 2 - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C_f) . Pour le calcul de $\left[x \ln\left(\frac{2x-1}{x}\right) - \left(x \ln 2 - \frac{1}{2}\right) \right]$ on pourra poser $\frac{2x-1}{2x} = 1 + v$

- (b) On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \ln x - x + 1$. Étudie les variations de g et déduis que pour $x > 0$ on a $\ln x \leq x - 1$. Utilise ce résultat pour établir que : $x \ln \left(\frac{2x-1}{x} \right) + \frac{1}{2} \geq 0$ pour $x > \frac{1}{2}$ et $x \ln \left(\frac{2x-1}{x} \right) + \frac{1}{2} \leq 0$ pour $x < 0$. Déduis en la position de la courbe de f par rapport à l'asymptote.

4. Donne le tableau de variation de f et trace (C_f) . Calcule, par parties, une primitive de f

Exercice 17

Partie A

Soit la fonction φ définie dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Étudie le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montre que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a : $-1,28 < \alpha < -1,27$.
3. Déduis en le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité graphique : 4 cm).

1. Montre que : $f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$. Déduis en le sens de variation de f .
2. Montre que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et déduis en un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donne une équation de T et étudie la position relative de (C) par rapport à T .
4. Cherche les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Démontre que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et étudie la position de (C) par rapport à D (On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$).
5. Faites le tableau de variation de f .
6. Trace sur un même dessin (C) , T et D . La figure demandée fera apparaître les points de (C) dont les abscisses appartiennent à $[-2; 4]$.

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - x^2$

1. (a) Déterminer la fonction f' de f .
(b) Étudier les variations de f' .
(c) En déduire le signe de f'
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
3. Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

Exercice 19

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x \ln |x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1. Justifier que f est continue en 0
2. Démontrer que f est impaire
3. Étudier f et tracer sa courbe représentative

Exercice 20

On considère la fonction f de $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$$

et (C) sa courbe représentative

1. Démontrer que la droite d'équation $x = \ln 2$ est une asymptote verticale à la courbe (C)

- (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$
 (b) Démontrer que la droite $(\mathbb{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathbb{C})$ de f en $-\infty$
2. (a) Démontrer que pour tout x distinct de $\ln 2$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$$

- (b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et justifier que la droite $(\mathbb{E})$ d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathbb{C})$ de f en $+\infty$
 (c) Démontrer que pour tout x distinct de $\ln 2$

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}$$

3. En déduire les variations de f
4. (a) Représenter graphiquement la courbe $(\mathbb{C})$
 (b) Étudier graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , l'intersection de $(\mathbb{C})$ avec la droite d'équation $y = x + m$
 (c) Retrouver algébriquement ces solutions

Exercice 21

1. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$
 (a) Étudier les variations de g . Préciser la limite en 0 et $+\infty$
 (b) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x (on calculera $g(1)$)
2. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$
 (a) Étudier la fonction f (dérivée, limites en 0 et $+\infty$, tableau de variations)
 (b) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles α et β ($\alpha < \beta$).
 Indiquer chacune d'elles, par une valeur approchée à 10^{-1} près
 (c) On désigne par (D) la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormal (O, I, J) (unité graphique : 4 cm)
 Étudier le signe de $d(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ et en déduire la position de (C) par rapport à (D)
 (d) Démontrer que (D) est une asymptote à la courbe (C) . Tracer (D) et (C)

Exercice 22

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 1$

1. (a) Étudier les variations de g
 (b) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 1$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près
2. On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln x$
 (a) Vérifier que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$
 (b) Étudier les variations de f
3. Construire dans un repère orthonormé la courbe représentative de f

Exercice 23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$ et (C) sa courbe représentative

Partie A

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1$

1. Déterminer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$

2. Étude de signe de $g(x)$
 - (a) Calculer les limites de $g(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$
 - (b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x
 - (c) En déduire le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation
 - (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha \in]0, 20; 0, 21[$
 - (e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B

1. Étudier suivants les valeurs de x le signe de $f'(x)$
2. En déduire le sens de variation de f
3. Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha + 2)}$
4. On considère la fonction h définie sur $[0; 1]$ par $h(x) = \frac{-x^3}{2(x + 2)}$
 - (a) Calculer $h'(x)$ pour tout x élément de $[0; 1]$ puis déterminer le sens de variation de h sur $[0; 1]$
 - (b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$
5. (a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe $(x'x)$
(b) Préciser alors la position de la courbe (C) par rapport à l'axe des abscisses
6. Tracer la courbe représentative (C) de f

Exercice 24

1. Soit la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = 3x^3 - x - 2$$

- a. Vérifier que $P(1) = 0$.
Déterminer les nombres réels a , b et c tels que, pour tout x , $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
 - b. Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .
2. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2 \ln x.$$

- a. Déterminer la dérivée g' de g . Utiliser 1.) pour donner le sens de variation de g (on ne calculera pas les limites en 0 et $+\infty$).
 - b. Déduire de a.) le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}.$$

On appelle $\mathbb{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité : 2 cm).

- a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b. Justifier que les droites $\mathbb{D}$ et Δ d'équations respectives $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptote à la courbe $\mathbb{C}$.
- c. Démontrer que la fonction h telle que $h(x) = x + \ln x$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives. En déduire que Δ coupe $\mathbb{C}$ en un point d'abscisse α vérifiant $\alpha + \ln \alpha = 0$.
Démontrer que : $0,56 < \alpha < 0,57$.
- c. Déterminer la position de $\mathbb{C}$ par rapport à Δ .
- e. Étudier le sens de variation de f . En déduire l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$.
Démontrer que : $0,46 < \beta < 0,47$.

f. Construire $\mathbb{C}$ et Δ .

Exercice 25

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

. (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique : 2 cm)

- (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
(b) En déduire des conséquences graphiques pour la courbe (C_f) .
- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- Démontrer que le point d'intersection A de (C_f) et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour (C_f) .
- Donner une équation de la tangente à (C_f) en A .
- Tracer sur un même graphique : (C_f) , sa tangente au point A , et ses droites asymptotes.

Partie B

On considère la fonction f' , dérivée de f . On note (C'_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormal.

- En utilisant le fait que (C_f) admet le point A comme centre de symétrie, justifier que f' est une fonction paire.
- (a) Déterminer les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$.
(b) En déduire les droites asymptotes à la courbe (C'_f) .
- Étudier les variations de f' et dresser son tableau de variations.
- Tracer (C'_f) sur le même graphique que (C_f) .
- Justifier la position de (C'_f) par rapport à (C_f) .

Partie C

- Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$
- Soit F , la primitive de f sur qui s'annule pour $x = 0$, et soit (Γ) sa courbe représentative dans le repère repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(a) Quel est le sens de variation de F ?
(b) Expliciter $F(x)$, pour tout x réel.
(c) Déterminer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire une conséquence pour (Γ) .
(d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x - \ln(1 + e^x)$. En déduire l'équation d'une asymptote oblique à (Γ) .
(e) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations pour la fonction F .
(f) Tracer la courbe (Γ) et ses asymptotes dans le repère.

Exercice 26

Une fonction f est définie sur $\left]-1; \frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$$

avec a, b et c réels.

On suppose que son tableau de variation est le suivant :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	+	0	-		
f		0	0	$\ln\left(\frac{5}{8}\right)$	

1. En utilisant les données numériques du tableau, déterminer a , b et c .
2. Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) = 0$.
3. Vérifier que le sens de variation de la fonction f obtenue est bien celui indiqué dans le tableau.
Donner la valeur exacte du maximum de f .

Exercice 27

On évalue l'acidité ou la basicité d'une solution aqueuse en calculant son pH (potentiel hydrogène) après avoir déterminé sa concentration en ions H_3O^+ (en moles par litre).

Toute solution aqueuse contient des ions H_3O^+ et des ions OH^- . On désigne respectivement par $[H_3O^+]$ et $[OH^-]$ le nombre de moles par litre de H_3O^+ et de OH^- . On vérifié expérimentalement qu'à $25^\circ C$ le produit $[H_3O^+] \times [OH^-]$ est constant et égal à 10^{-14} . De plus, on ne considère que des solutions acides ou basiques, de concentration maximale égale à 1 mole par litre.

Le pH d'une solution est définie par : $pH = -\log[H_3O^+]$.

1. (a) Sachant que dans l'eau pure on a $[H_3O^+] = [OH^-]$, calculer le pH de l'eau pure à $25^\circ C$.
(b) Une solution est dite acide si elle contient plus de moles d'ions H_3O^+ qu de moles d'ions OH^- , basique dans le cas contraire. Déterminer les inégalités vérifiant le pH d'une solution acide et le pH d'une solution basique.
2. Le pH d'une solution d'acide fort est 2.
(a) Quelle est sa concentration en ions H_3O^+ ?
(b) Que devient cette concentration si le pH , après dilution, augmente de 1 ?
(c) Quel volume d'eau pure faut-il ajouter à 10 cm^3 d'une solution acide pour que son pH passe de 3 à 5 ?
3. Quel d'eau pure faut-il ajouter à 10 cm^3 d'une solution de base forte pour que son pH passe de 12 à 9 ?

Exercice 28

Population de grenouilles

Un groupe de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ où t est le temps écoulé en années depuis 2018 :

$$P(t) = \frac{1000}{0,4 + 3,6e^{-0,5t}}$$

1. Étudie les variations de la fonction P sur $[0; +\infty[$.
2. Détermine la limite de la fonction P en $+\infty$.
3. Montre qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0; +\infty[$ telle que $P(t_0) = 2000$. Détermine cette valeur à 10^{-1} près.
4. Selon ce modèle, détermine au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

Exercice 29

Plant de maïs

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$$

où $h(t)$, en mètres, représente la hauteur du plant en fonction du temps t , en jours.

Les constantes a et b sont des réels positifs.

On sait qu' initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1 \text{ m}$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m .

1. Détermine les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.
2. On suppose que la fonction h est croissante sur $[0; +\infty[$.
 - (a) Montre que l'équation $h(t) = 1,5$ admet une unique solution t_0 .
 - (b) A l'aide d'un algorithme, donne, au jour près, le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieur à $1,5$ m

Exercice 30

- I) Soit f la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = -2x + 1 + x \ln x$.
 1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
 2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point 0.
 3. a) Calculer $f'(x)$ si $x \geq 0$.
b) Étudier les variations de f et la limite de f en $+\infty$.
 4. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
 5. Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Déduisez - en le comportement asymptotique de la courbe représentative de f .
- II) A) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = e^x + x - 5$
 1. Étudier le sens de variation de g (on ne demande pas de déterminer les limites de g , ni de construire sa courbe représentative).
 2. Calculer $g(0)$ et $g(2)$. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et une seule.
 3. Justifier l'encadrement $1,30 < \alpha < 1,31$.
- B) Soit la fonction numérique f définie sur $] \infty, 5[$ par $f(x) = \ln(5 - x)$.
 1. Étudier le sens de variation de f .
Préciser les limites de f en $-\infty$ et en 5.
 2. Vérifier l'égalité $f(\alpha) = \alpha$.
 3. Montrer que, pour tout réel x de $[0; 3]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
En déduire que pour tout réel x de $[0; 3]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
 4. a) Montrer que si $0 \leq x \leq 3$ alors $0 \leq f(x) \leq 3$.
b) On considère la suite (U_n) d'éléments de $[0; 3]$ en posant :
 $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout entier naturel n .
Montrer que pour tout entier naturel n on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.
En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$
 - c) Déterminer un entier naturel n_0 tel que : pour $n \geq n_0$ on a $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Exercice 31

On désigne par n l'entier naturel supérieur à 2, on considère les fonctions f_n qui sont définies sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1 + n \ln x}{x^2}$

Partie A

I Étude des fonctions f_n

1. Calcule $f'_n(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n - 2 - 2n \ln x$
2. Résous l'équation $f'_n(x) = 0$. Étudie le signe de $f'_n(x)$
3. Détermine la limite de f_n en $+\infty$.
4. Établis le tableau de variation de la fonction f_n et calcule sa valeur maximale en fonction de n

II Représentation graphique de quels que fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) ; (unit é graphique 5cm).

On note (C_n) la courbe représentative de $f - n$ dans ce repère

1. Trace (C_2) et (C_3)
2. (a) Calcule $f_{n+1}(x) - f_n(x)$
Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?
- (b) Explique comment il est possible de construis point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3) . Tracer (C_4)

Partie B Calculs d'aires

1. Calcule, en intégrant par parties, l'intégrale $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
2. En déduis l'aire, en unité d'aires du domaine plan par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$
3. On note A_n l'aire, en unité d'aires, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et les droites d'équations $y = 0$; $x = 1$ et $x = e$
 - (a) Calcule A_2
 - (b) Déterminer la nature de la suite A_n en précisant l'interprétation graphique de la raison

Partie C Étude sur l'intervalle $]1; +\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 1$

Dans toute la suite, on prend $n \geq 3$

1. (a) Vérifie que, pour tout n ; $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(\frac{n-2}{2n}\right) > 1$
- (b) Vérifie que l'équation $f_n(x) = 1$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]1; e^{\frac{n-2}{2n}}[$
2. On admet que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty\right[$ exactement une solution notée α_n
3. On se propose de détermine la limite de la suite (α_n)
Calcule $f_n(\sqrt{n})$ et montre que, pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$.
En déduire que, pour $n \geq 8$, on a $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n)

Exercice 32

Partie A :

On note f_n la fonction numérique de variable réelle x définie sur $] -\infty; -2[\cup] -2; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$$

pour tout n entier naturel non nul. (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) L'unité graphique : 2 cm

1. Étudie les limites de f_n en $-\infty$ et $+\infty$.
2. (a) Étudie suivant la parité de n , la limite de f_n en -2
- (b) Calcule $f'_n(x)$; puis étudier son signe suivant la parité de n
- (c) Dresse le tableau de variations de f_n
3. Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent un point fixe A
Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) en A
4. (a) calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat
- (b) Démontrer que pour tout entier n non nul, et pour tout nombre réel $x \neq -2$, on a :

$$f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$$

- (c) En déduis les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2) (pour $n = 1$ et $n = 2$)
Représente graphiquement (C_1) et (C_2)

Partie B :

Soit (U_n) définie par : $U_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$

1. Démontre que la suite (U_n) est décroissante et que pour tout n non nul, on a $U_n \geq 0$. Que peut-on en déduire ?
2. Démontre que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a

$$\frac{1 - 2^{-n+1}}{n-1} \leq U_n \leq \left(\frac{1 - 2^{-n+1}}{n-1} \right) e$$

3. (a) En utilisant une intégration par partie, démontre que pour tout entier naturel $n \geq 0$ on a :

$$nU_{n+1} = 1 + U_n - \frac{e}{2^n}$$

- (b) Retrouve ce résultat en utilisant la relation de la question 4-b) de A.

- (c) En déduis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-1}^0 \frac{ne^{1+x}}{(x+1)^{n+1}} = 1$

Partie C

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = f_1(x-1)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O; I; J)$

1. Construis la courbe (Γ) à partir de la courbe (C_1) . Justifie la construction
2. On considère la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(x) = 1 + \ln(1+x)$
 - (a) Démontre que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $I = [2; 3]$
 - (b) Démontre que pour x positif, l'équation $\varphi(x) = x$ est équivalente à $g(x) = e$
 - (c) Démontrer que pour tout x de I ; $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3}$
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \varphi(v_n)$
 - (a) Montre que la suite (v_n) est croissante et majorée par α . Conclure
 - (b) Démontre que $\varphi(I) \subset I$
 - (c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n ; (v_n) appartient à l'intervalle I
4. (a) Démontre pour tout entier naturel n , on a :

$$|v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|v_n - \alpha| \text{ puis que } |\alpha - v_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|(\alpha - v_n)|$$
 - (b) Démontrer que pour tout entier naturel : $|\alpha - v_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et que la suite (v_n) converge vers α
 - (c) Détermine un entier naturel p pour lequel v_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Calcule cette valeur approchée

Exercice 33**Partie I**

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 \ln x$.

1. Étudier le sens de variation de g .
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$$

. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm).

- Déterminer la limite de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.
- (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
(b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C) .
(c) Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0; +\infty[$.
Montrer, en particulier, que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.
- Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer qu'il existe un point B , et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ) . Préciser les coordonnées de B .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α . Justifier l'encadrement : $0,34 < \alpha < 0,35$.
- Tracer la courbe (C) et les droites (Δ) et (C) .

Partie III

On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n .

- (a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
(b) Montrer que (x_n) est une suite croissante.
- Pour tout entier naturel n , on pose : $\alpha_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} (f(x) - \frac{x}{2}) dx$.
(a) Donner une interprétation géométrique de α_n
(b) Montrer que $\alpha_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n .
En déduire que (α_n) est une suite arithmétique.

Exercice 34

A. f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1}.$$

On désignera par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé (unité : 2 cm).

- Déterminer D , ensemble de définition de f .
Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in D$ on ait :

$$f(x) = a + \frac{bx}{x^2 - 1}.$$

- Étudier le sens de variation de f .
- Soit I le point de (C) d'abscisse 0 ; montrer que I est centre de symétrie de (C) .
- Écrire une équation de la tangente T à (C) au point I . Tracer T .
- Étudier la position de (C) par rapport à T sur $] -1; 1[$.
- Calculer $f(\frac{1}{2})$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$. Tracer (C) .
- Soit g la fonction

$$g(x) = \frac{3x^2 + 4|x| - 3}{x^2 - 1}.$$

- Étudier la parité de g .
- En déduire la courbe représentative de g sans nouveaux calcul

- B.** 1. Déterminer la primitive de f sur $I =]1; +\infty[$ qui s'annule en $\sqrt{2}$
2. h est la fonction définie sur I par :

$$h(x) = 3(x - \sqrt{2}) + 2 \ln(x^2 - 1)$$

- a. Étudier les variations de h .
- b. Tracer la courbe $(\mathcal{H})$ de h dans un repère orthonormal différent du premier.
- 3 a. Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
- b. Calculer $h^{-1}(0)$ et $(h^{-1})'(0)$.
- c. Tracer la courbe $(\mathcal{H}')$ de h^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{H})$.

Exercice 35

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x.$$

Soit (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f_1 .
2. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$.
En déduire la limite de f_1 .
3. Dresser le tableau de variation de f_1 .

Partie B

1. Calculer $f'_k(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k .
2. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$
En déduire la limite de f_k en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f_k .
4. Déterminer une équation de la tangente (T_k) à (C_k) au point O .
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de (C_p) et (C_m) .
6. Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives (T_1) et (T_2) en O .