

Toutes fonctions ci-dessous sont définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chacune de fonctions ci-dessus :

- $f(x) = x^3 + 3x^2$; $g(x) = \cos 2x$; $h(x) = \sin \frac{x}{2}$
- $f(x) = 3 \sin 2x$; $g(x) = \cos^2 x - \sin x + 2$; $h(x) = 2$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $g(x) = \frac{2}{x^2-1} + \frac{x+3}{x^2+2x}$; $h(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x+3}}$
- $f(x) = \frac{2x}{|x^2-7x|}$; $g(x) = \frac{x^2+2}{|3x+2|-|x|}$; $h(x) = \frac{|x|+3|x+1|}{2+|4x-1|}$
- $f(x) = \frac{4 \sin(2x+1)}{\cos x}$; $g(x) = \frac{2}{\cos^2 x - 4}$; $h(x) = \frac{2 \sin 2x}{\sin x - \cos x}$
- $f(x) = \tan x$; $h(x) = \cotan 2x$; $g(x) = \tan(3x + \frac{\pi}{4})$
- $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x - 1}$; $g(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x^2+7x+3}}$
- $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x}}$; $g(x) = \frac{\sqrt{3x+4}-5x+1}{x-1}$; $h(x) = \frac{\sqrt{4x+2}}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{4x+3}}$
- $f(x) = \sqrt{2 \cos x + 1}$; $g(x) = \sqrt{4 \sin^2 x - 2 \sin x - 2}$
- $f(x) = \sqrt{\tan x}$; $g(x) = \sqrt{\cos x - \sin x}$; $h(x) = \sqrt{\cos x + \cos 5x}$
- $f(x) = \sqrt{(m-1)x^2 + mx}$; $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m + 2}}$

Limites et Fonction Polynôme-Rationnelle

1 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 + 7x - 1$; $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+5}{2x-1}$; $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x+3\sqrt{2}}{3x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} 146$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 3x + 4$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 + x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^5 + x^3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 + x^2 + 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^7 + x^4$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^4 + 9$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{5x^3}{x^2+5x+1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3+5x^2+4}{-3x^4+2x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^5-x^3+x-1}{3x^5+2x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{5}{x^3+2x^2-x+1}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+3x+2}{-2x^2+3}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4+2x^2+1}{x^4+1}$

2 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+3x+1}{x+1}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2} \right)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{4x^2-3x-1}{4x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3-8}$; $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+2\sqrt{2}x+2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3-5x^2+3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{-2x^2+7x-5}$; $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-125}{x^2-25}$; $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+6x^2+12x+4}{x^3+8}$
- $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{2}{1+\frac{3}{\sqrt{2}x+2}}$; $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{4}} \frac{4x+3}{16x^2-9}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2-\frac{1}{1-x}}$

3 Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f dans chaque cas :

- $f(x) = -5x^4 + 3x + 1$; $f(x) = -2x^5 + 3x^3 + x - 1$
- $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2+1}$; $f(x) = \frac{x^3+2x+1}{x^2+x+3}$; $f(x) = \frac{-2x+1}{(x^2-1)^2}$
- $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-5x+4}$; $f(x) = \frac{x+2}{x^2-5x+6}$; $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x}-3x}{x^2-1}$

Limites et Fonction Irrationnelle

1 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2x+1}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+2x+1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2-x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2-2x+4}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2-2x+4}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-4x+3} - x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-4x+3} - x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-4x+3} + x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-4x+3} + x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+11x+3} - 2x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2+11x+3} - 2x$

2 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2x}{1-x}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2-x}}{x-1}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}+x-2}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{3-\sqrt{2x+2}}$; $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{\sqrt{4x+5}-x}$; $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x+\sqrt{6}+x}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x}{x^2+2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x}{x^2+2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+4x^2+3}{\sqrt{x^2-3x+5}+x}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{4x^2-1}}{2x-\sqrt{2-4x^2}}$; $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{6x-2}}$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{-x}-\sqrt{2x+3}}$

Limite à gauche-Limite à droite

1 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{x-2}$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-7}{x^2+2x+1}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x^3-3x^2+3x-1}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-7)}{8x^3-27}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}+3}{x-2}$; $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{3-\sqrt{2x^2+3x-1}}{2x+1}$; $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+3-\sqrt{x+8})}{(x+4)^2}$; $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x^2+2x+2}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x - 2}{2 \cos x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{2\pi}{3}}{4 \sin^2 x - 2 \sin x - 2}$; $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{x - 5\pi}{1 - \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x-1}$

2 Soient les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-x}{3x-6} & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} & \text{si } x > 2 \end{cases}; g(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{\sqrt{x+5}-3} & \text{si } x < 4 \\ \frac{2x+3}{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)$.
- f et g admettent-elles respectivement une limite en 2 et en 4 ?

Limites & Fonctions trigonométriques

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 2x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \times \sin 5x}{3x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 2x)}{4x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos 2x-1)}{\cos 3x-1}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{11x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{1-\cos 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cos 2x - \sin 3x}{5x^3}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \tan 2x}{3x^3}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 3x}{\sin 2x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x - \sin^2 x}{x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 5x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 2x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x}{\sin 3x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{\tan 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + \cos 2x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 - 2x^2 + \cos(2x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+E(x-1)}{x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2}{x^3+2x \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sin(2x^2+1)+2}{x^3+2x \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+2x \cos x}{x^2+2}$

Limites et Composée ou Variable auxiliaire

Calculer les limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{1-\cos 2x}{(3x-\pi)^2}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{6}} \frac{\sqrt{3+2 \cos x}}{2 \sin x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x+\sin 2x}{1+\sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}} \sin \left(\frac{x^2-\pi}{x-\sqrt{\pi}} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-2 \cos(2x^2-4)}{2x^2-4}$; $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} E \left(\frac{1-2 \cos x}{2 \sin x + \sqrt{3}} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}+x-2}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{1-\cos(3x-1)}{9x^2-6x+1}$; $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(\pi x - 3)}{3 - \pi x}$

Continuité en un point

1 Etudier la continuité de f au point d'abscisse x_0 dans le cas suivants :

- $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$; $x_0 = -2$
- $f(x) = \frac{2x+4}{5x-2}$; $x_0 = \frac{5}{2}$
- $f(x) = \frac{2x+5}{5x-2}$; $x_0 = \frac{2}{5}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-3} & \text{si } x \in]-\infty; 3[\\ 2x-4 & \text{si } x \in [3; +\infty[\end{cases}$; $x_0 = 3$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{si } x \in]-\infty; 1[\\ 9x+1 & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$; $x_0 = 1$

2 Soient m et n deux paramètres réels et f une fonction numérique de variable réelle.

- Déterminer m pour que f soit continue en $x_0 = 1$
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3m + 4 & \text{si } x \neq 1 \\ 2m - 9 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
- Déterminer m et n pour que f soit continue en -1 et 2 :
 $f(x) = \begin{cases} \frac{2mx^2+3nx-1}{2x+3} & \text{si } x \in \{-1; 2\} \\ \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2} & \text{si } x \neq -1 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$
- Déterminer les paramètres réels m et n pour que f soit continue en 1 et 3 sachant que :
 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{(x-3)\sqrt{x^2+3x-2}} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{1; 3\} \\ f(1) = 2m + n \\ f(3) = m + 2n \end{cases}$
- Déterminer les paramètres réels m et n pour que f soit continue en 2 sachant que :
 $f(x) = \begin{cases} mx^2 - 3nx + 2 & \text{si } x \in]-\infty; 2[\\ mx + 2n & \text{si } x \in [2; +\infty[\\ -3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Prolongement par continuité en un point

- La fonction f est-elle prolongeable par continuité en x dans les cas suivants ?
 - $f(x) = 4x^3 - \frac{5}{7x+3}$ et $x_0 = -\frac{7}{3}$
 - $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{2x+3}$ et $x_0 = -\frac{3}{2}$
 - $f(x) = \frac{\sqrt{-4x-3}+x}{4\sin x \cos x - 2\sin x}$ et $x_0 = -3$
 - $f(x) = \frac{x^3}{x^3-27}$ et $x_0 = 0$
 - $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+x+3}}{x-5}$; $x_0 = 5$
 - $f(x) = \frac{x^3-27}{(2x-6)^5}$; $x_0 = 3$
 - $f(x) = \frac{(2x-6)^3}{x^3-27}$; $x_0 = 3$
- Si oui, donner le prolongement dans chaque cas

Asymptotes et Branches infinies

1 Déterminer les éventuelles asymptotes ou branches infinies de la courbe de

- $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 1$

$$b) f(x) = 2x + 1 + \frac{4x+1}{x^2-1} ; f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

$$c) f(x) = \sqrt{x+2} \quad d) f(x) = x - \sqrt{x+2}$$

$$e) f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} \quad f(x) = x - \sqrt{x^2-x+4}$$

$$f) f(x) = x + \sin(x^2+1) ; f(x) = x^2 + x + \cos x$$

2 Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{2x^4+x^3+x^2-7x+5}{x^3-1}$

- Montrer que la droite $(D): y = 2x + 1$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
- Etudier la position relative de (C_f) et la droite (D)
- Etudier la position relative (C_f) et (C_g) sachant que g est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{2x^4+x^3-1}{x^3-1}$

Limites et Graphes

Soit la fonction f définie par sa courbe représentative. Répondre aux questions ci-dessous pour chacune des figures

- Déterminer D_f sous forme d'intervalle.
- Calculer les limites aux bornes de D_f .
- En déduire les équations des éventuelles asymptotes.
- Si elle admet une asymptote oblique, étudier sa position relative par rapport elle.

