

FONCTIONS LOGARITHMES-FONCTIONS EXPONENTIELLES

(TSE-STI: GC-GM-GMI-GELN-GEL-GEN)

Exercice 1 :

I) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1) $\ln(2x - 3) + 2 \ln(x + 1) = \ln(6x - 3)$ | 4) $\ln(x - 1) + \ln\left(\frac{2}{x}\right) = 0$ |
| 2) $\ln(x + 2) + \ln(x + 4) < \ln(x + 8)$ | 5) $\ln x + \ln(3 - x) \geq \ln 2$ |
| 3) $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln x$ | 6) $(\ln x)^2 - 6 \ln x + 5 \geq 0$ |

II) Soit P la fonction polynôme définie par : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

1) Calcule $P(1)$. Détermine les réels a, b et c tels que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$: a) $P(x) = 0$ b) $P(x) < 0$.

3) En déduis la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations ou inéquations :

- | | |
|---|--|
| a) $2(\ln x)^2 + \ln x = \frac{5 \ln x - 2}{\ln x}$ | d) $2(\log_3 x)^3 + (\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 2 = 0$ |
| b) $2[(\ln x)^3 + 1] < 5 \ln x - (\ln x)^2$ | e) $2e^{2x} + e^x - 5 + 2e^{-x} = 0$ |
| c) $\ln(x + 3) + \ln(2x^2 - 5x + 2) = \ln(4 - 8x)$ | f) $2 \times 7^{3x} + 7^{2x} - 5 \times 7^x + 2 = 0$ |

III) Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\begin{cases} -2 \ln x + \ln y = 3 \\ 4 \ln x - 3 \ln y = -7 \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} (e^{x-2})^2 = e^3 \times e^y \\ \ln(x - 1) + \ln 3 = \ln(1 - 2y) + \ln 2 \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} xy = e^2 \\ 3 \log_x y + 3 \log_y x = -10 \end{cases}$ | |

IV) Détermine l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- | | | | |
|--|--|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{(1 - 2x)^2}$ | 2) $g(x) = \ln \left \frac{x-3}{1-x^2} \right $ | 3) $h(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{2-x}}$ | 4) $f(x) = x \ln(1 - \frac{1}{x})$ |
|--|--|--------------------------------------|------------------------------------|

Exercice 2 :

1) On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

- a) Dresse le tableau de variation de g .
- b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1; +\infty[$ et que $1 \leq \alpha \leq 2$. Trouve un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- c) En déduis le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

- a) Dresse le tableau de variation de f .
- b) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-3} .
- c) Construis la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal en prenant 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 20 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

Exercice 3 :

A) On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

- 1) Dresse le tableau de variation de g .
- 2) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$ et que $1 \leq \alpha \leq 2$. Trouve un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- 3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

B) On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$

1) Etudie les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interprète graphiquement ces limites.

2) a) Montre que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$.

b) En déduis le sens de variation de f .

c) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$. Dresse le tableau de variation de f .

3) Construis la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal en prenant 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 5 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

Exercice 4 :

A) Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$

1) Dresse le tableau de variation de g .

2) Montre l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1; +\infty[$ et que $1,9 < \alpha < 2$.

3) Précise le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

B) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Etudie la dérivabilité de f en 0.

2) Détermine la limite de f en $+\infty$.

3) On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

a) Montre que pour tout x de $]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) En-déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

c) Trace la courbe de f et sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$

1) Détermine l'ensemble de définition de f .

2) Etudie les variations de f .

3) Soit (C) la courbe représentative de f d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

Montre que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation puis précise la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique.

4) Montre que le point $I(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ est centre de symétrie pour (C) .

5) Donne une équation de la tangente en I à (C) .

6) Construis (C) .

Exercice 6 :

I) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln|x|$

1) Détermine l'ensemble de définition de g .

2) Etudie les variations de g .

3) Calcule $g(-1)$ et $g(1)$. En déduis le signe de g suivant les valeurs de x .

II) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - 2 - \frac{\ln|x|}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1) Détermine l'ensemble de définition de f et calcule les limites aux bornes de D_f .

2) Calcule $f'(x)$ et montre que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

3) Dresse le tableau de variation de f .

4) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\alpha \in]0; 1[$ et $\beta \in]1; +\infty[$. Trouve un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α et β .

4) a) Montre que la droite $(D): y = x - 2$ est asymptote à (C) .

b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D) .

c) Détermine les coordonnées des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite $(D): y = x - 2$

- d) Détermine une équation de chacune de ces tangentes que l'on notera (T_1) et (T_2) .
- 5) Trace (C) , (D) , (T_1) et (T_2) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-1; 0[$
- a) Montre que h est une bijection de $[-1; 0[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
- b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h . Construis la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C) .
- c) Calcule $h\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $(h^{-1})'\left(-\frac{5}{2} - 2 \ln 2\right)$.

Exercice 7 :

I) On considère la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de h .
- b) Etudie la parité de h .
- 2) a) Dresse le tableau de variation de h .
- b) Montre que h est une bijection de D_h vers un intervalle J que l'on précisera. Explicite sa bijection réciproque.

II) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f .
- b) Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- 2) a) Dresse le tableau de variation de f .
- b) Précise les équations des asymptotes à la courbe (C) de f .
- c) Montre que l'origine du repère $O(0)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C) de f .
- 3) Construis (C) et ses asymptotes.

Exercice 8 :

Soit f fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + e^{-2x} + xe^{-2x}$.

- 1) a) Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$ puis dresse le tableau de variation de f .
- b) En déduis le signe de $f'(x)$ dans $[0; +\infty[$
- 2) Dresse le tableau de variation de f .
- 3) Montre que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique (D) que l'on précisera. En déduis la position relative de (C_f) par rapport à (D) .
- 4) Détermine l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$.
- 5) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$ et que $1 \leq \alpha \leq 2$. Trouve un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
- 6) Représente la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$, (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1$

- 1) Etudie les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Calcule la dérivée $g'(x)$ de $g(x)$ puis dresse le tableau de variation de g .
- 3) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution nulle et une autre solution α dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.
- 4) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction f

- 1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- 2) Calcule la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ puis dresse le tableau de variation de f . (On pourra se servir de la question 4) de la partie A).
- 3) Démontre que la droite $(D): y = x$ est asymptote à la courbe (C) .
- 4) Montre que la droite (D) et la courbe (C) se coupent en deux points A et B dont les coordonnées sont à déterminer. En déduis la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite (D) .
- 5) Construis la droite (D) et la courbe (C) .
- 6) Soit la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.
 - a) Détermine les réels a, b , et c pour que H soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par : $h(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$.
 - b) En déduis une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

Exercice 10 :

- A)** Soit g fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.
- 1) Détermine la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.
 - 2) Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.
 - 3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
 - a) Vérifie que 0 en est une.
 - b) L'autre solution est appelé α . Montre que $-1,6 < \alpha < -1,5$.
 - 4) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .
- B)** Soit f fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.
- 1) Détermine la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur pour calculer la limite en $+\infty$).
 - 2) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe (g étant la fonction définie dans la partie A)). Etudie le sens de variation de f .
 - 3) Montre que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2 + 2\alpha)}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie A). En déduis un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 < \alpha < -1,5$)
 - 4) Etablis le tableau de variation de f .
 - 5) Trace la courbe (C) représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

EXERCICE 11 :

- A)** Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = e^x + \ln x$
- 1) Dresse le tableau de variation de g .
 - 2) a) Démontre qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
 - b) Détermine l'entier n tel que : $\frac{n}{100} < \alpha < \frac{n+1}{100}$.
 - b) En déduis le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
- B)** On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} f(x) = e^x + x(-1 + \ln x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).
- 1) a) Donne l'ensemble de définition de f .
 - b) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprète ce résultat.
 - c) Détermine la limite de f en $+\infty$.
 - 2) Dresse le tableau de variation de f .
 - 3) Montre que $f(\alpha) = -\alpha + (\alpha - 1) \ln \alpha$. En utilisant la question A) 2) b) Trouve un encadrement d'amplitude 10^{-1} de $f(\alpha)$.
 - 4) Construis la courbe (C) .

Exercice 12 :

Pour un entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $IR - \{-1\}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$ et on note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

- 1) Détermine la dérivée f_n' de f_n et donne l'expression de f_n' en fonction de f_{n+1} et f_n
- 2) Etudie les variations de f_n , et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 ; $+\infty$. On distinguera les cas n pair et n impair.
- 3) Montre que toutes les courbes (C_n) passent par un même point que l'on déterminera.
- 4) Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Trace, sur deux figures distinctes, les courbes (C_1) et (C_2) .

Exercice 13 :

Pour n un entier naturel non nul, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $] -\infty; -2[\cup] -2; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ et on note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

- 1) a) Etudie les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$. (Pour la limite en $+\infty$, on posera : $X = x + 2$)
- b) Etudie suivant la parité de n , la limite de f_n en -2 .
- 2) a) Calcule $f_n'(x)$, puis étudie son signe suivant la parité de n .
- b) Dresse le tableau de variation de f_n . On distinguera les cas n pair et n impair.
- 3) a) Montre que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A que l'on déterminera.
- b) Détermine une équation de la tangente (T_n) à (C_n) en A .
- 4) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$, puis interprète graphiquement ce résultat.
- b) Démontre que pour tout entier naturel n , et pour tout nombre réel $x \neq -2$ on a : $f_n'(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$.
- c) En déduis les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2) .
- 5) Trace les courbes (C_1) et (C_2) .

Problème 1 :**Partie A :**

On considère la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} g(x) = 1 - x(\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) a) Justifie que g est continue à droite en 0.
- b) Calcule les limites en $+\infty$ de g et de $\frac{g(x)}{x}$. Interprète graphiquement ces résultats.
- 2) Etudie la dérivabilité de g à droite en 0 et donne une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
- 3) a) Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = (-\ln x)(2 + \ln x)$.
- b) Etudie avec soin le signe de $g'(x)$ et dresse le tableau de variation de g .
- 4) a) Démontre que sur $[0; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2 \leq \alpha \leq 2,1$.
- b) Déduis-en le signe de $g(x)$.
- c) Prouve que $\ln \alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x \ln x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité graphique 4cm.

- 1) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis précise les éventuelles asymptotes à (C_f) .

- 2) a) Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x \ln x)^2}$.
- b) Etudie le sens variation de f et dresse son tableau de variation.
- c) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$ et donne un encadrement de $f(\alpha)$.
- 3) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I du repère.
- 4) Construire (T) et (C_f) en prenant $f(\alpha) = 0,29$.

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; \alpha]$.

- 1) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1} puis donne l'ensemble de définition de h^{-1} .
- 2) a) Prouve que h^{-1} n'est pas dérivable en $\frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$.
- b) Démontre que la tangente (D) à la courbe (Γ) de h^{-1} au point J est parallèle à la droite (T).
- 3) a) Précise l'asymptote à la courbe (Γ) de h^{-1} .
- b) Trace la droite (D), la demi-tangente à (Γ) de h^{-1} au point d'abscisse $\frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$ et la courbe (Γ) de h^{-1} .

Problème 2 :

A) L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} g(t) = \frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) a) Etablis que g est continue en 0.
- b) Détermine $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$.
- 2) a) Calcule $g'(t)$ pour $t > 0$.
- b) Prouve que pour tout $t \geq 0$; $1 + t \leq e^t$.
- c) En déduis le signe de g' et le sens de variation de g . (On ne construira pas la courbe de g).
- 3) On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0. A cet effet, on considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$
- a) Calcule $h'(t)$ et $h''(t)$ ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.
- b) Montre que : $\forall t \geq 0; 0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$.
- c) En déduis un encadrement de $\frac{1-e^{-t}-t}{t^2}$. Prouve finalement que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

B) On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) a) Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Prouve que $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-2x} [2x + 1 - e^x(x + 1)]$
- c) Utilise le résultat établi au A) 2) b) pour montrer que $\forall x > 0, f'(x) \leq 0$.
- 2) Vérifie que : $\forall x \geq 0, f(x) = 2g(2x) - g(x)$ où g est la fonction étudiée dans la partie A). En déduis que f est dérivable en 0 et calcule $f'(0)$. Détermine l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse 0.
- 3) Construis (C_f) et (T) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 3cm)

Problème 3 :

L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :
$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
. On note (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 4 \text{ cm}$. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$

- 1) Détermine D_g et calcule les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Etudie les variations de g , on ne demande pas de calculer les limites en -1 et en 0 .
- 3) Calcule $g(-\frac{1}{2})$. Démontre que l'on a :

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; 0[\quad g(x) < 0$$

$$\forall x \in]-1; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[\quad g(x) > 0$$

Partie B : Etude de la limite de f en l'infini

- 1) Après une brève étude sur $[0; +\infty[$ des fonctions $h : t \mapsto \ln(1+t) - (t - \frac{t^2}{2})$ et $k : t \mapsto \ln(1+t) - (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3})$. Démontre que : $\forall t \geq 0 \quad t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$.

En déduis que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$.

- 3) En utilisant les résultats précédents, démontre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. On admettra que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.
- 4) Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Partie C : Etude de la fonction f

- 1) Détermine D_f et calcule la limite de f en -1 .
- 2) Etudie la continuité de f en 0 .
- 3) Démontre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.
- 4) Calcule la dérivée de f et démontre que $f'(x) = xg(x)$.
- 5) Dresse le tableau de variation de f .
- 6) a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse en 0 .
b) Précise les équations des asymptotes à la courbe (C_f) .
c) Montre que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$.
- 7) a) Trace (C_f) et (T).
b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
- 8) Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = x + x^2 \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

- a) Dire comment peut-on obtenir la courbe (Γ) de la fonction φ à partir de la courbe (C_f) de la fonction f .
- b) Construis la courbe (Γ) dans le même repère que (C_f) .

Problème 4 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - \ln(e^x + 2e^{-x})$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm)

- 1) Montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1 + 2e^{-2x}) = 3x - \ln(e^{2x} + 2)$.
- 2) Calcule la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- 3) a) Montre que la droite (D_1) d'équation : $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. Etudie la position relative de (C) par rapport à (D_1) .
 b) Montre que la droite (D_2) d'équation : $y = 3x - \ln 2$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$. Etudie la position relative de (C) par rapport à (D_2) .
 4) a) Etudie le sens de variation de f .
 b) détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
 5) Montre qu'il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$. Détermine un encadrement de α à 10^{-2} près.
 6) Etudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
 7) a) Montre que f admet une fonction réciproque que l'on notera f^{-1} .
 b) Trace les courbes (C) et (C') de f^{-1} dans le repère.
 8) Montre que $(f^{-1})'(0) = \frac{1+2e^{-2\alpha}}{1+6e^{-2\alpha}}$.

Problème 5 :

On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = (x+1)^n e^{-x}$ avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

- A) 1) Calcule la dérivée f'_n de f_n . Exprime f'_n en fonction de f_n et f_{n-1} .
 2) a) Dresse, suivant la parité de n , le tableau de variation de f_n .
 b) Détermine, suivant la parité de n , la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes (C_n) ?
 3) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f_{n+1}(x) = f_n(x)$.
 b) Dédus de ce qui précède que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.
 c) Etudie, suivant la parité de n , les positions relatives des courbes (C_{n+1}) et (C_n) .
 4) Trace (C_2) et (C_3) dans le même repère.
 5) a) Détermine les réels a , b et c pour que la fonction F définie par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de f_2 .
 b) Calcule l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C_2) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. (on donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} près).

B) Dans cette partie on pose $n = 2$

- 1) a) Soit la fonction g définie sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ par : $g(x) = f_2(x) - x$. Montre que g est strictement décroissante sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
 b) Démontre que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
 2) Etudie le sens de variation de f'_2 dans l'intervalle $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ et en déduis pour tout réel $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$ on a : $|f'_2(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 3) On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f_2(U_n)$
 a) Démontre que pour tout entier naturel n , U_n est élément de $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
 b) Démontre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$. En déduis : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
 c) Prouve que (U_n) converge vers α . Pour quelle valeur de n_0 , U_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?