

Exercices d'entraînement

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe : TSE

2025 - 2026

Fonctions logarithmes et exponentielles de Neper
John Napier (1550 ; 1617) est un mathématicien écossais

Exercice 1 : Simplifie les expressions suivantes

$$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}) ; \quad B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3 ; \quad C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}$$

$$D = \ln 2 \sqrt{2} + \ln 2^2 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad E = -2 \ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln(\ln e) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^2}{2} \right)$$

$$G = e^{\ln 3} - e^{-\ln 2} + e^{\frac{1}{2} \ln 8} - 2e^{-\ln \frac{1}{4}}$$

Exercice 2 : Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \ln x^3 ; \quad g(x) = \ln x^4 ; \quad h(x) = \ln|x| ; \quad P(x) = \ln \left| \frac{x-3}{1-x^2} \right| ; \quad Q(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{2-x}} ;$$

$$T(x) = \frac{1 - \ln x}{(1-2x)^2} ; \quad k(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

Exercice 3

A. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$a) 2 \ln x = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln \left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) + \ln \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) ;$$

$$b) \ln(x^2 - 4x + 5) = 0 ; \quad c) \frac{1}{3} \ln(x-3) + \frac{1}{3} \ln(x-1) = \ln 2 ;$$

$$d) \ln(2x-3) + 2 \ln(x+1) = \ln(6x-3) ; \quad e) \ln(x-1) + \ln \left(\frac{2}{x} \right) = 0$$

$$f) \frac{1}{3} \ln|x-3| + \frac{1}{3} \ln|x-1| = \ln 2 ; \quad g) \ln(\sin x) + \ln(\tan x) = \ln(\cos x) ;$$

$$h) \ln(4-2x) \leq 0 ; \quad i) \ln(x+2) \leq \ln(x^2-4) ; \quad j) \ln(x+2) + \ln(x+4) < \ln(x+8)$$

$$k) \ln x + \ln(3-x) \geq \ln 2 ; \quad l) \ln \sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x ; \quad m) (\ln x)^2 - 6 \ln x + 5 \geq 0.$$

B. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$a) 3e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 2} ; \quad b) e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0 ; \quad c) 3^{2x+2} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

$$d) 4^{-x} = 3 ; \quad e) 3^x > 6 ; \quad f) 2^{-x} \geq 3 ; \quad g) 3^{-x} \leq 3^{2x}$$

Exercice 4

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Vérifie que $P(x) = (x-1)(2x-1)(x+3)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

3) Déduis en les solutions des équations suivantes :

$$a) \ln 2x - \ln 3 = \ln(1+x^2) - \ln(4-x^2)$$

$$b) 2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 = 0.$$

$$c) 2e^{3x} + 3e^{2x} - 8e^x + 3 = 0.$$

Exercice 5

Soit P la fonction polynôme définie par : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

1) Calcule $P(1)$. Détermine les réels a, b et c tels que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$: a) $P(x) = 0$ b) $P(x) < 0$.

3) En déduis la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations ou inéquations :

a) $2(\ln x)^2 + \ln x = \frac{5 \ln x - 2}{\ln x}$

d) $2(\log_3 x)^3 + (\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 2 = 0$

b) $2[(\ln x)^3 + 1] < 5 \ln x - (\ln x)^2$

e) $2e^{2x} + e^x - 5 + 2e^{-x} = 0$

c) $\ln(x + 3) + \ln(2x^2 - 5x + 2) = \ln(4 - 8x)$ f) $2 \times 7^{3x} + 7^{2x} - 5 \times 7^x + 2 = 0$

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivantes :

a) $\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = 9 \\ \ln x + 5 \ln y = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$; d) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2e^x + 3e^y = 5 \\ e^x - e^y = -7 \end{cases}$; g) $\begin{cases} 4^x \cdot (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \cdot 8^y = 4^{y-1} \end{cases}$;

h) $\begin{cases} e^{x+\ln 2} - e^{y+\ln 3} = 1 \\ e^{x+\ln 3} - e^{y+\ln 2} = 4 \end{cases}$; i) $\begin{cases} xy = e^2 \\ 3 \log_x y + 3 \log_y x = -10 \end{cases}$; k) $\begin{cases} xy = 243 \\ \log_x y + \log_y x = \frac{17}{4} \end{cases}$

Exercice 7

A. Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes

$$f(x) = \ln(x^3 + 5x^2) ; g(x) = \ln\left(\frac{x^3}{x^2 + 1}\right) ; h(x) = e^{1-3x} ; p(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} ; q(x) = \frac{e^{x+2}}{1 - 3e^x}$$

B. Trouve une primitive de chacune des fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{1}{x+1} ; g(x) = \frac{x}{1-x^2} ; h(x) = e^{2x+1} ; P(x) = xe^{x^2+1} ; q(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

C. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x(e^x - 3)dx ; I_2 = \int_0^1 e^{2x-1} dx ; I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx ; I_4 = \int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x}{e^x + 2} dx ;$$

$$I_5 = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx ; I_7 = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx ; I_8 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx ; I_9 = \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x \ln x} dx$$

D. Calculer à l'aide de la technique d'intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^e \ln x dx ; J = \int_{-1}^0 \ln(x+2) dx ; K = \int_e^{2e} x \ln x^2 dx ; L = \int_0^1 (x+2)e^x dx ;$$

Exercice 8

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$.

1) Trouver les réels a et b tels que : $\forall x \neq -1 ; f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

2) En déduire la valeur de $I = \int_0^3 f(x) dx$.

Exercice 9

On donne les fonctions $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.

a) Montrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$.

b) En déduire le calcul de l'intégrale $K = \int_1^2 \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$.

Exercice 10

Soit φ la fonction définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ et $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x) dx$

- 1) Étudie les variations de φ puis détermine l'image par φ de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
- 2) a) Détermine les nombres réels a et b tels que pour tout x de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ on ait :

$$\frac{1}{1-x} = a + x + \frac{bx^2}{1-x}.$$

b) Déduis en que $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \varphi(x) dx$

c) Calcule au moyen d'une intégration par parties le réel $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx$.

d) Démontre que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \varphi(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

e) Déduis en une valeur décimale approchée de I .

Exercice 11

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

- 1) Calculer I_0 .
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}$, en utilisant une intégration par parties, trouver I_{n+1} en fonction de I_n .
- 3) En déduire I_1, I_2, I_3 puis I_4 .

Exercice 12

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x dx$.

1. Calcule $I + J$.
2. Soit $f(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x)$.
 - a) Détermine $f'(x)$.
 - b) En déduis $I - J$.
3. Calcule I et J .

Exercice 13

Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

1. Calcule $I + J$ et $I - J$.
2. En déduis les valeurs de I et J .

Exercice 14 : Soit $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$; $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$ et $K = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx$

1. A l'aide de 2 intégrations par parties, prouve que $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$.
2. a) Calcule $I + J$.
b) Montre que $K = I - J$.
c) En déduis les valeurs de I et J .

Exercice 15 : Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

Calcule la dérivée de f . En déduis la valeur de I .

- 2) a) Sans calculer explicitement J et K , vérifie que : $J + 2I = K$.

- b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K , démontre que : $K = \sqrt{3} - J$.
c) En déduis les valeurs de J et de K .

Exercice 16 : Extrait du concours d'entrée à l'ENI 2015

On pose $I_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$ où n et p sont deux entiers naturels.

1. Calcule $I_{p,0}$ et $I_{p,1}$.
2. Calcule $I_{0,n}$ et déduis – en $I_{1,n}$.
3. Montre que $I_{p,n} = I_{n,p}$ en faisant un changement de variable affine.
4. Etablis pour $n \geq 1$, la relation : $I_{p,n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}$.

Problème 01

A) On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ) .
- 3) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (Δ) . Donner une équation de cette tangente.
- 4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1]$; puis une solution unique $\beta \in [3 ; 4]$. Donner un encadrement de chacune des solutions à 0,1 près.
- 5) Tracer (Cf) et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
- 6) Déterminer l'aire A de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Problème 2

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $g(x) = x + \frac{1}{2} - x \ln x$.

1. Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -\ln x$.
b) En déduis le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
3. a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $3,1 < \alpha < 3,2$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$, par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x(1 - x \ln x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J) . (Unité graphique : 2 cm)

1. a) Montre que f est continue en 0.
b) Etudie la dérivabilité de f en 0.

- c) Calcule la limite de f en $+\infty$.
- d) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète graphiquement le résultat.
2. On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 - a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
 - b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3. Montre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + \alpha}{4}$.
4. Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Détermine une équation de (T) .
5. Trace (C) et (T) . (On prendra $\alpha \approx 3,2$ et $f(\alpha) \approx 3,3$).

Partie C: Calcul d'aire

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $h(x) = \frac{1}{9}x^3(-1 + 3\ln x)$.

1. Détermine la dérivée de h .
2. En déduis la primitive F de f sur $]0; +\infty[$ telle que $F(1) = e$.
3. Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Problème 3

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $g(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 - 2\ln x$.

1. Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1,2 < \alpha < 1,3$.
- b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{3}x$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2 cm)

1. a) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- b) Interprète graphiquement le résultat en 0.
2. a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
- b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
3. a) Montre que la droite $(\Delta) : y = -\frac{1}{3}x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.
- b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ) .
4. Montre que $f(\alpha) = \frac{1-\alpha^3}{2\alpha^2}$.
5. a) Détermine le point A de (C) en lequel la tangente (T) a pour coefficient directeur $-\frac{1}{3}$.
- b) Détermine l'équation réduite de cette tangente (T) .
6. Construis (C) , (Δ) et (T) .

PARTIE C : Calcul d'aire

1. Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$.

En utilisant une intégration par partie, calcule l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la région limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$.

2) Détermine $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Problème 4

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie par: $g(x) = x + 1 + \ln(-x)$.

1. Justifie que l'ensemble de définition de g est $D_g =]-\infty; 0[$.
2. Calcule les limites de g en $-\infty$ et 0 .
3. a) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
b) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction numérique définie sur $] -\infty ; 0]$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2 cm)

1. a) Montre que f est continue en 0 .
b) Etudie la dérivabilité de f en 0 .
2. a) Calcule la limite de f en $-\infty$.
b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement ce résultat.
3. a) Montre que $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = 2g(x)$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4. Ecris l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 .
5. Trace (C) et (T).

PARTIE C : Calcul d'aire

On donne $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 \ln(-x) - \frac{1}{2}x^2$ pour $x < 0$.

1. Justifie que F est une primitive de f .
2. Soit α un réel tel que $-1 < \alpha < 0$.

Calcule l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$$x = -1 \text{ et } x = \alpha.$$

3) En déduis la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 .

Problème 05

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = -x + e + \frac{\ln|x|}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

A. On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 - x^2 - \ln|x|$

1. Dresser le tableau de variation de g .
2. Calcule $g(1)$ et $g(-1)$. Déduis-en le signe de $g(x)$ sur D_g .

B. Etude de f :

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + e$ est asymptote à (C) puis étudie la position relative de (C) par rapport à (D). On précisera les points d'intersection de (C) et (D).

3. Trace (C) dans le repère.
4. Détermine l'aire A , en cm^2 de la région du plan limitée par (C); l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Problème 06

- A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + (x + 3)e^x$
- 1) Dresser le tableau de variation de g (le calcul des limites n'est pas demandé)
 - 2) Préciser l'extremum de g sur $\mathbb{R}$.
 - 3) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
- B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x + 2)e^x$.
On désigne par (c_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
- 1) Etudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - 2) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (c_f) .
b) Etudier la position de (c_f) par rapport (D).
 - 3) a) Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
 - 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α Dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.
justifier que $-0,29 \leq \alpha \leq -0,28$.
 - 5) a) Montrer que f admet une réciproque. On notera f^{-1} cette réciproque.
b) Montrer que $(f^{-1})'(0) = -\frac{\alpha+2}{\alpha^2+\alpha-5}$.
 - 6) Tracer la courbe (c_f) et la droite (D) dans le repère.
 - 7) On désigne par A_m l'aire de la partie du plan limitée par (c_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = m$ et $x = 0$ avec $m < 0$.
a) Calculer A_m .
b) Calculer la limite de A_m lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 7

Partie A :

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$.

1. Détermine les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Démontre que, $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x - 2)e^{1-x}$.
b) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
b) Justifie que : $0,4 < \alpha < 0,5$.
4. En déduis que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B :

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

(Unité : 2 cm)

1. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Démontre que f est une primitive de g .
b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

3. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (D) et (C).
4. Démontre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
5. Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
6. Démontre que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$.
7. Justifie que, pour tout nombre réel x , $f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$.
8. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

On appelle β l'une de ces solutions. Démontre que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

9) Trace (D), (T) et (C). On prendra $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$.

Partie C:

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Calcule $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Problème 8

Partie A

On considère la fonction g définie sur $] -\infty; 0]$ par : $g(x) = \frac{1}{2} + (x - 1)e^x$.

1. a) Calcule la limite de g en $-\infty$ et en 0.
b) Justifie que $\forall x \in] -\infty; 0], g'(x) = xe^x$.
c) Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.
2. a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $] -\infty; 0]$.
b) Justifie que $\begin{cases} \forall x \in] -\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; 0], g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B

le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; I; J)$. Unité graphique : 2 cm.

f est la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + (x - 2)e^x; & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln x; & \text{si } x > 0 \end{cases}$, On note (C) sa courbe représentative.

1. a) Détermine l'ensemble de définition de f .
b) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) Etudie la continuité de f en 0.
d) Etudie la dérivabilité de f en 0. Donne une équation des demi-tangentes au point d'abscisse 0.
2. On suppose que f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
a) Montre que : $\begin{cases} \forall x \in] -\infty; 0[, f'(x) = g(x) \\ \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 1 + \ln x \end{cases}$
b) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
c) Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
d) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ) sur $] -\infty; 0]$.
e) Justifie que l'axe des ordonnées est une branche parabolique à la courbe (C) en $+\infty$.

3. a) Justifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\alpha + 3 + \frac{1}{\alpha-1} \right)$.

b) Construis la courbe (C) et la droite (Δ). On prendra $\alpha = -2$.

Partie C

On désigne par (D_λ) la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = -2$.

1. En utilisant une intégration par parties, justifie que l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ de (D_λ) est égale à : $(20e^{-2} + 4(\lambda - 3)e^\lambda) \text{cm}^2$.
2. Calcule la limite de $\mathcal{A}_\lambda$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

Problème 09

PARTIE A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1)$$

1°) a) Etudie les variations de f .

b) Montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 + x]$

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ? Tracer cette courbe.

(Unité : 2cm).

c) Montre que f réalise une bijection de $] -\infty ; +\infty[$ sur $] -\infty ; 0[$.

2°) Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1)$.

a) Démontre que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montre que quel que soit le réel x , $g'(x) = e^{-x} f(x)$.

c) Montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

d) Etudie les variations de g et trace sa courbe représentative dans le repère précédent.

3°) a) Montre que $\frac{1}{e^{x+1}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

b) A tout réel λ , on associe le réel $I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x) dx$. Justifie l'existence de $I(\lambda)$.

Calcule $I(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c) Calcule $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

PARTIE B

1°) Montre que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

2°) a) Calcule $g(0)$.

b) Montre que g^{-1} est dérivable en $\ln 2$.

c) Détermine l'équation de la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point d'abscisse $\ln 2$.

Problème 10

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définie par $f_m(x) = e^{x-1} - mx$ où m est un paramètre réel. On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité **2cm**).

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

2) Montrer que la droite Δ_m d'équation : $y = -mx$ est une asymptote à la courbe (C_m) et

déterminer la position de cette droite par rapport à (C_m) .

3) Etudier la fonction f_1 et tracer avec soin la courbe (C_1) dans le repère.

4) Soit g_1 la restriction de f_1 à $[1; +\infty[$. Montrer que g_1 admet une réciproque $(g_1)^{-1}$.

Représenter la courbe (C_1') de $(g_1)^{-1}$.

5) Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par (C_1) , la droite $\Delta_1: y = -x$, et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \alpha$, $(\alpha < 1)$.

Problème 11

Pour un entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$ et on note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1) Détermine la dérivée f_n' de f_n et donne l'expression de f_n' en fonction de f_{n+1} et f_n

2) Etudie les variations de f_n , et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 ; $+\infty$. On distinguera les cas n pair et n impair.

3) Montre que toutes les courbes (C_n) passent par un même point que l'on déterminera.

4) Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Trace, sur deux figures distinctes, les courbes (C_1) et (C_2) .

Problème 12

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$

1) Détermine l'ensemble de définition de f .

2) Etudie les variations de f .

3) Soit (C) la courbe représentative de f d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2 cm)

Montre que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation puis précise la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique.

4) Montre que le point $I(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ est centre de symétrie pour (C) .

5) Donne une équation de la tangente en I à (C) .

6) Construis (C) .

Problème 13 : Bac TSE 2001

A

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^{2x} - 2e^x$$

1. Vérifier que le tableau de variation de f est bien le suivant :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	0	-1	0	$+\infty$

2. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\ln 2$.

3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

a. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout réel x .

- b. Du signe de $g''(x)$, déduire celui de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$.
- c. Etudier la position de (C) par rapport à (T).
4. Tracer (T) et (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

B

Pour tout entier naturel n , on note f_n la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$ et (C_n) la courbe représentative. Prouver que toutes courbes (C_n) passent par un même point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

C

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = \frac{1}{e-1} e^x - x - \frac{1}{e-1}$$

On désigne par (H) la représentation graphique de h dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O,i,j) d'unité graphique 2 cm.

1. a) Calculer $h(0)$; $h(1)$, $h(2)$
 b) Dresser le tableau de variation de h
 c) Prouver que la courbe (H) admet une asymptote dont on précisera l'équation.
 d) Utiliser les variations de h pour déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x .
2. Tracer la courbe (H).
3. On considère la fonction numérique φ de la variable réelle x définie par :

$$\varphi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$$

On note (Γ) sa courbe représentative de φ dans le repère précédent.

- a. Étudier le sens de variation de φ en précisant ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.
- b. Prouver que la courbe (Γ) admet une asymptote que l'on précisera.
- c. Etudier les positions relatives des courbes (H) et (Γ) .
- d. Tracer la courbe (Γ) sur le même graphique que la courbe (H).
4. a) Etablir que, pour tout réel x : $\varphi(x) = \int_x^{x+1} h(t) dt$
 b) Donner une interprétation géométrique de $\varphi(0)$.

Problème 14 : Bac TSE 2003 Mali

I-/ Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$. Soit (C_k) la courbe représentant les variations de f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unités (5cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées).

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x$.

1-/ Etudier le sens de variation de g . (0,5pt)

2-/ En déduire que pour tout réel α positif ou nul, $\ln(1+\alpha) \leq \alpha$. (0,5pt)

II-/ 1-/ Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1 . (1pt)

2-/ Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$.

En déduire la limite de f_1 en $+\infty$. (0,5pt)

3-/ Dresser le tableau de variation de f_1 . (0,5pt)

III-/

1-/ Calculer $f'_k(x)$ pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k . (1pt)

2-/ Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1 + \frac{kx}{e^x}\right)$.

En déduire la limite de f_k en $+\infty$. (1pt)

3-/ a-/ Dresser la tableau de variation de f_k . (0,5pt)

b-/ Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$, on a $f_k(x) \leq \frac{k}{2}$ (0,5pt)

4-/ Déterminer une équation de la tangente T_k à (C_k) au point d'abscisse 0.

5-/ Soit p et m deux réel strictement positifs tels que $p < m$. Etudier la position relative de (C_p) et (C_m) . (0,5pt)

6-/ Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en 0 dans le repère orthogonal du plan. (1,5pt)

IV-/ Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe (C_k) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

1-/ Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que $A(\lambda) \leq \int_0^\lambda k x e^{-x} dx$

(on pourra utiliser les résultats de la question préliminaire I-/). (0,5pt)

2-/ Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale : $\int_0^\lambda k x e^{-x} dx$. (0,5pt)

3-/ On admet que $A(\lambda)$ a une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) \leq k$.

Interpréter graphiquement ce résultat. (0,5pt)

Problème 15

A./ Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1°/ Déterminer la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$. (0,5pt)

2°/ Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation. (1pt)

3°/ On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 en est une. (0,5pt)

b) L'autre solution est appelé α . Montrer que $-1,6 < \alpha < -1,5$ (0,5pt)

4°/ Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réels x . (1pt)

B./ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

1°/ Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur pour calculer la limite en $+\infty$) (0,5pt)

2°/ Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe (g étant la fonction définie dans la partie A./) Etudier le sens de variation de f . (1pt)

3°/ Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie 1. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 < \alpha < -1,5$ (1,5pt)

4°/ Etablir le tableau de variation de f . (0,5pt)

5°/ Tracer la courbe (C) représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm). (1pt)

C./ Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx) dx$

1°/ Montrer que pour tout entier naturel n , $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$. (0,5pt)

2°/ À l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi-1}}{1+n^2}$. (1pt)

3°/ Montrer que, pour tout entier naturel n , $|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,5pt). $|I_n|$ désigne la valeur absolue de I_n .

NB : La partie C.// est indépendante des parties A.// et B.//

Problème 16 : Extrait de compos de Bamako Rive droite

I. Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

1) Précise l'ensemble de définition de g .

2) Etudie la continuité de g en 0.

3) a) Etudie les variations de g .

b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -2 ; -1[$. Détermine un encadrement de α à 10^{-2} près.

c) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

II. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x+\ln|x|}{x-1}$. on désigne par (C) la courbe de f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Etudie les limites de f aux bornes de son ensemble de définition I.

Précise les éventuelles asymptotes de (C).

2) a) Montre que pour tout réel x de I, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$.

b) Dresse le tableau de variations de f .

c) Montre que $f(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha}$. Détermine un encadrement de $f(\alpha)$.

d) Montre que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point B dont l'abscisse λ appartient à l'intervalle $]0 ; 1[$. Vérifie que $0,56 \leq \lambda \leq 0,57$.

3) Trace (C) et ses asymptotes dans le repère.

4) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

Détermine une valeur approchée par excès de A par la méthode des rectangles.

(On partagera l'intervalle $[2 ; 3]$ en 5 intervalles de même amplitude).

III. on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel supérieur ou égal 2 par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

1) quel est le signe de u_n ? donner une interprétation graphique de u_n .

2) Montrer que $\forall n \geq 2$, on a : $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

3) Etudier la convergence de la suite (u_n) , préciser sa limite.

Problème 17

A) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln|x|$

1) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de g .

- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
- 3) Donner un encadrement de α par deux nombres rationnels de la forme $\frac{n}{10}$ et $\frac{n+1}{10}$ avec n entier naturel.
- 4) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
- B) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$. Soit (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o; i; j)$.
- 1) Calculer $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variation de f .
 - 2) Démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$.
 - 3) En utilisant l'encadrement de α trouvé au A) 3°) montrer que :
 $1,6 < f(\alpha) < 2,1$.
- C) Soient les points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ dans le repère $(o; i; j)$ où M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.
- 1) Déterminer x' et y' en fonction de x et y .
 - 2) Démontrer qu'une équation de la courbe (Γ) à laquelle appartient M' lorsque M décrit la courbe (Cf) est la suivante : $y = -2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$.
 - 3) Étudier la position relative de (Γ) par rapport à (Cf) .
- D) On considère un réel m supérieur à 1.
- Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.
- 1) Démontrer que H définie sur $[1; +\infty[$ par $H(x) = -\frac{1+\ln x}{x}$ est une primitive de h .
 - 2) On désigne par $A(m)$ l'intégrale $\int_1^m [2x - f(x)] dx$. Calculer $A(m)$.
 - 3) Déterminer si elle existe la limite de $A(m)$ quand m tend vers $+\infty$.

Problème 18

Pour tout entier naturel n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées)

A. Etude de f_1

- 1) Détermine $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour (C_1) ?
- 2) Etudie le sens de variation de f_1 et donne le tableau de variation de f_1
- 3) Donne une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à (C_1)
- 4) Détermine $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduire pour (C_2) ?
- 5) Etudie le sens de variation de f_2 et donne le tableau de variation de f_2

B. Etudie le signe de $f_1(x) - f_2(x)$. Déduis-en la position relative de (C_1) et (C_2)

- 2) Trace (C_1) et (C_2) dans le même repère orthogonal

C. n étant un entier naturel non nul et on pose $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$

- 1) Soit $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calcule $F'(x)$ et déduis-en I_1
- 2) Montre que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$

3) Calcule I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre (C_1) et (C_2) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$

4) Montre par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

1) En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1; e]$ montre que $0 \leq I_n \leq 1$.

2) Dédus-en $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$.

Problème 19 : Extrait de compos de Bamako Rive Droite

Pour chaque entier naturel n , on définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x.$$

Partie A : étude du cas particulier $n = 0$.

f_0 est donc sur $]0; +\infty[$ par $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1) Justifie que, pour tout réel u , l'inégalité $e^u \geq u + 1$. Dédus en que pour tout réel x , $e^{-x} + x - 1 \geq 0$, puis que, pour tout réel x , $1 + (x - 1)e^x \geq 0$.

2) Détermine les limites de f_0 en 0 et en $+\infty$.

3) Montre que, pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, la dérivée de f_0 est donné par $f'_0(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$. Dédus en le sens de variation de f_0 .

4) Représente la courbe C_0 de f_0 dans un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

Partie B : étude de la famille de fonctions f_n pour $n \geq 1$.

On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans le repère précédent.

1) Détermine les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.

Dédus en que C_n possède une asymptote que l'on précisera.

2) Détermine le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3) Montre que toutes les courbes C_n passent par un même point B dont on précisera.

4) Etudie les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1} .

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; montre qu'il existe un unique réel a_n appartenant à $]0; 1[$ tel que $f_n(a_n) = 0$

6) Montre que, pour tout entier naturel non nul n , $f_{n+1}(a_n) = \ln(a_n)$.

Dédus en que $a_n \leq a_{n+1}$, puis que la suite (a_n) est convergente.

7) a) En utilisant la partie A, montrer que pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$,

$$\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1.$$

b) Dédus en que, pour tout entier naturel non nul n , $\ln(a_n) \geq \frac{1-e}{n}$ et que $a_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

c) Dédus en la limite de la suite (a_n) .

8) Construis sur le graphique précédent les courbes C_1 et C_2 .

9) Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x) dx$.

a) Donne une interprétation graphique de cette intégrale.

b) Etudie le sens de variation de la suite (a_n) .

c) Démontre que l'aire comprise entre les courbes C_{n+1} et C_n et les droites d'équation

$$x = 1 \text{ et } x = \frac{3}{2} \text{ est constante.}$$

Problème 20 : Extrait de compos de Bamako Rive Gauche

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$$

a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n .

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$.

On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1; e]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$. On note (C) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien $(\ln x)$.

a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point $A(0; 1)$ et le point $B_n(n; 0)$.

b. Faire un croquis représentant la courbe (C) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 .

c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (C) avec Δ_n .

d. Précisez la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n) .
(on pourra Utiliser le croquis et la question 2.c.)

3. a. Exprimer $\ln \alpha_n$ en fonction de n et de α_n .

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. Dédire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n) .

d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note λ sa limite. Etablir que $\ln \lambda = 1$ et en déduire la valeur de λ .

4. On désigne par D_n le domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = e$.

Calculer l'aire du domaine D_n en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\frac{\alpha_n^2}{n}$.

Problème 21

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^x - n$. On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

A] Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

1) Déterminer la dérivée de g_n . Faire le tableau des variations de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.

2) Montrer que g_n s'annule pour une valeur α_n , et que α_n est positif ou nul.

3) Montrer que : $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1+\alpha_n}\right)$ avec $0 \leq \alpha_n \leq \ln(n)$

4) a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln x \leq x - 1$. (1)

b) Dédire de (1) le signe de $g_n(\ln \sqrt{n})$

c) Justifier que : $\frac{1}{2} \ln n \leq \alpha_n$

Quelles sont les limites des suites de termes généraux α_n et $\frac{\alpha_n}{n}$?

B] 1) a) Déterminer la dérivée de f_n . En déduire les variations de f_n .

b) Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

c) Montrer que $f_n(\alpha_n) = \frac{-n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$.

2) Montrer que (C_n) admet une asymptote (D_n) que l'on déterminera.

3) Déterminer les points d'intersection de (C_n) avec l'axe des abscisses, et préciser la position de par rapport à cet axe.

- 4) Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) .
- 5) a) Montrer que : $0,35 \leq \alpha_2 \leq 0,40$. Déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près, par défaut et par excès de α_2 . En déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.
- b) Tracer (C_1) et (C_2) sur le même graphique d'unité 10cm, en mettant en évidence les résultats précédents. Préciser les tangentes en O à (C_1) et (C_2) .

Problème 22

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité graphique : 2 cm).

- 1) a) Prouve que pour tout réel $t \geq 0$ on a : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.
- b) Déduis-en que $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. (1)
- 2) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$
- a) Calcule $g'(x)$
- b) Prouve que pour tout nombre réel $x \geq 0$: $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$.
- c) Déduis-en que pour tout nombre réel $x \geq 0$: $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$. (2)
- 3) Etude des variations de f .
- a) Calcule $f'(x)$ pour $x > 0$.
- b) Etablis que pour $x \geq 0$ on a : $g(x) \leq \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.
- Grâce à (2) établir le sens de variation de f .
- 4) a) Détermine la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- b) A l'aide de (2) montre que pour $x \geq 0$ on a :
- $$x - \frac{x^3}{12} - \frac{2x}{2+x} \leq x - \ln(1+x) \leq x - \frac{2x}{2+x} \text{ puis } \frac{1}{2+x} - \frac{x}{12} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{x+2}.$$
- c) Montre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ et déduis-en que $f'(0) = \frac{-1}{2}$.
- d) Soit (T) la tangente à (C_f) en $x_0 = 0$.
- En utilisant (1) montre que (C_f) est au-dessus de (T) pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- 5) Dresse le tableau de variation de f .
- 6) Trace (C_f) et (T) dans le même repère.

Problème 23

L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On note (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 4\text{cm}$. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$

- 1) Détermine D_g et calcule les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Etudie les variations de g , on ne demande pas de calculer les limites en -1 et en 0 .
- 3) Calcule $g(-\frac{1}{2})$. Démontre que l'on a :

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; 0[\quad g(x) < 0$$

$$\forall x \in]-1; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[\quad g(x) > 0$$

Partie B : Etude de la limite de f à l'infini

- 1) Après une brève étude sur $[0; +\infty[$ des fonctions $h : t \mapsto \ln(1+t) - (t - \frac{t^2}{2})$ et $k : t \mapsto \ln(1+t) - (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3})$. Démontre que : $\forall t \geq 0 \quad t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$. 2)
- En déduis que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$.

- 3) En utilisant les résultats précédents, démontre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. On admettra que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

4) Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Partie C : Etude de la fonction f

- 1) Détermine D_f et calcule la limite de f en -1 . 2) Etudie la continuité de f en 0 .
- 3) Démontre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.
- 4) Calcule la dérivée de f et démontre que $f'(x) = xg(x)$.
- 5) Dresse le tableau de variation de f .
- 6) a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse en 0 .
b) Précise les équations des asymptotes à la courbe (C_f) .
- c) Montre que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$.
- 7) a) Trace (C_f) et (T).
b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
- 8) Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = x + x^2 \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$
- a) Dire comment peut-on obtenir la courbe (Γ) de la fonction φ à partir de la courbe (C_f) de la fonction f .
- b) Construis la courbe (Γ) dans le même repère que (C_f) .

Problème 24

A) L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(t) = \frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) a) Etablis que g est continue en 0 .
b) Détermine $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$.
- 2) a) Calcule $g'(t)$ pour $t > 0$.
b) Prouve que pour tout $t \geq 0$; $1+t \leq e^t$.
c) En déduis le signe de g' et le sens de variation de g . (On ne construira pas la courbe de g).

3) On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0. A cet effet, on considère la fonction h

définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$

a) Calcule $h'(t)$ et $h''(t)$ ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.

b) Montre que : $\forall t \geq 0; 0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$.

c) En déduis un encadrement de $\frac{1-e^{-t}-t}{t^2}$. Prouve finalement que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

B) On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) a) Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Prouve que $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-2x}[2x + 1 - e^x(x + 1)]$

c) Utilise le résultat établi au A) 2) b) pour montrer que $\forall x > 0, f'(x) \leq 0$.

2) Vérifie que : $\forall x \geq 0, f(x) = 2g(2x) - g(x)$ où g est la fonction étudiée dans la partie A). En déduis que f est dérivable en 0 et calcule $f'(0)$. Détermine l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse 0.

Problème 25

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est de 10cm

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (e^{-x^2} - 1) \ln x, \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère.

On se propose dans ce problème de trouver un encadrement de $\int_0^1 f(x)dx$

Partie A :

On considère les fonctions h et g dérivables et définies sur $]0, +\infty[$ par :

$h(x) = \ln x + e^x + 1$ et $g(x) = x \ln x + e^x - 1$. On admet qu'il existe un nombre réel $\alpha \in]0, 1[$

tel que $\begin{cases} \forall x \in]0, \alpha[; h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[; h(x) > 0 \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$

1) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$

2) Justifie que : $\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = h(x)$

3) a- Étudie le sens de variations de g sur $]0, +\infty[$

a- Dresse le tableau de variation de g

4) a- Démontre que : $\forall x \in]0, +\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique β et que $\beta \in]0, 3; 0, 4[$

b- Déduis-en que : $\begin{cases} \forall x \in]0, \beta[; g(x) < 0 \\ \forall x \in]\beta, +\infty[; g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B :

1) Démontre que f est continue en 0

2) Justifie que f est dérivable en 0

3) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- c) Donne une interprétation graphique des résultats des limites des questions a) et b)
- 4) On admet que f est dérivable sur $]0, +\infty[$
- a- Démontre que : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{x} g(x^2)$
- b- Détermine le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$
- c- Dresse le tableau de variation de f
- 5) a- Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1
- b- Trace (T) et (C) dans le repère (O, I, J)

Partie C :

- 1) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$
- b) Démontre que $\forall x \in [0; +\infty[, -1 \leq -e^{-x} \leq -1 + x$
- c) Démontre que $\forall x \in [0; +\infty[1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$
- 2) Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$
- On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x \, dx$
- a) A l'aide d'intégration par parties calcule $I_n(t)$.
- b) Démontre que : $\forall t \in]0; 1]; -I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t)$.
- 3) On pose $S = \int_0^1 f(x)dx$
- a) Donne interprétation géométrique de S .
- b) On admet que : $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 f(x)dx = S$.
- Détermine un encadrement de S .

Problème 26

A) Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 5 cm.

- 1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de (C) .
- 2) Etudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ une solution unique, notée α . Déterminer un encadrement de α , d'amplitude 10^{-2} . Donner, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 4) Tracer la courbe (C) .

B) Calcul d'aire

- 1) Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 1.
- 2) a) soit φ la fonction définie pour tout $x > 0$ par : $\varphi(x) = x - x^2 + \ln x$. Calculer $\varphi'(x)$.
- En déduire le sens de variation de φ , puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \frac{\varphi(x)}{x}$
- c) En déduire la position relative de (C) et de (D).
- 3) On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe (C) et la tangente (D).
- a) Hachurer ce domaine.
- b) Soit A son aire, en cm^2 . Ecrire la valeur exacte de A comme expression polynomiale du second degré en α .

C) Etude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{e} ; \alpha \right[$; on note M_0 le point de (C) d'abscisse x_0 .

- 1) a) Donner une équation de la tangente F_0 à C en M_0 , en fonction de x_0 , $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.
- b) Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de F_0 avec des abscisses. Ecrire x_1 en fonction de x_0 , $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

2) On considère la fonction h définie sur $\left] \frac{1}{e} ; \alpha \right[$ par $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (On remarquera que $h(x_0) = x_1$)

- a) Montrer que $h'(x) = \frac{f''(x) \cdot f(x)}{[f'(x)]^2}$
- b) Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left] \frac{1}{e} ; \alpha \right[$.
- c) En déduire que h est strictement croissante sur $\left] \frac{1}{e} ; \alpha \right[$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.
- d) En écrivant $h(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x) - x$ sur $\left] \frac{1}{e} ; \alpha \right[$. En déduire que $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$
- 3) a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $\left] \frac{1}{e} ; \alpha \right[$, $h(x)$ appartient à $\left] \frac{1}{e} ; \alpha \right[$.
- b) On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n . Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

Problème 27

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur

$]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, de déterminer ensuite dans la partie B la position de sa courbe

représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie (C), cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

Partie A :

- 1) Soit g la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1$
- a) Montrer que la fonction g est dérivable et que pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$$

- b) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

2) a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donner le tableau de variations de f .

Partie B :

Γ désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 2 cm.

1) soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de h puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,4; 0,7]$.

b) Montrer que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$.

2) a) Vérifier que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

b) Utiliser les résultats de la question 1.a) pour déterminer les positions relatives de Γ et Δ .

3) Construire Γ et Δ dans le repère ortho normal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4) a) Calculer au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt$.

b) En déduire l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe Γ , la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Problème 28

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -2 \ln x - xe + 1$.

1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Etudier le sens de variation de g .

3) Montrer que dans $[0,5; 1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α . Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.

4) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction f

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Soit f' la fonction dérivée de f . Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$

4) Donner le tableau de variation de f .

5) Construire Γ .

Partie C : Intégrale et suite

Soit $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t) dt$ pour tout entier naturel n .

1) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$

2) a) Montrer que $A_n = I_n + e$.

- b) Calculer I_0 et A_0 .
 c) Donner une interprétation géométrique de A_0 .
 3) Montrer que la suite (A_n) converge vers e .

Problème 29

Partie A :

- 1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$
 3. Dresser le tableau de variation de g .
 4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que
 $1,89 < \alpha < 1,90$.
 5. Dédurre de ce qui précède le signe de $g(x)$.
 2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe
 représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique (2 cm).
 5. Dresser le tableau de variation de f .
 6. Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-3}$.
 7. Tracer (C) dans le repère.

Partie B :

On considère la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

- 1) a) Prouver que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et préciser $F'(x)$.
 b) En déduire le sens de variation de F .
 2) a) Vérifier que $\forall t \geq 1$ on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$
 b) Pour tout $x > 0$ on pose $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$
 i) a l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$
 ii) a l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité :
 $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$ pour $t > 0$, calculer $J(x)$.
 c) Dédurre de ce qui précède que $\forall x > 1$ on a :
 $\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$
 8. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \theta$. Sans calculer θ vérifier que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$

Problème 30

PARTIE A :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3x - 1 - \ln x$. On désigne par C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

- 1) Etudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.
 2) Etudier les branches infinies de la courbe C_g .
 3) Etudier les variations de g .
 4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2; 3]$.
 Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près par dichotomie.

5) Dédurre de ce qui précède le signe de $g(x)$ en fonction de x .

Interpréter graphiquement le résultat.

6) a- Tracer la courbe C_g .

a- Discuter graphiquement suivant les valeurs du périmètre réel m , le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$

PARTIE B :

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x\ln x}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a $x > \ln x$.

b) justifier que la fonction f est bien définie sur $]0; +\infty[$.

2) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?

3) a- Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2-x\ln x)}$

b- Dresser le tableau de variation de f .

c - Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$ puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse 1.

5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis tracer la courbe (C_f) et la tangente (T) dans le même repère.

6) a- Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{x-\ln x}$

b- Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Montrer que $A(\alpha) = 2 \ln(\alpha - 1)$ puis en déduire un encadrement de $A(\alpha)$.

7) Soit n un entier naturel supérieur ou égale à .

a- Calculer $a_n = \int_1^n f(x)dx$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b- Calculer la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE C :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt$. On désigne par (C) la courbe représentative de dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a- Montrer que $h(x) = \ln(e^x - x)$.

b- Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $e^x > x$.

2) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x}$

Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

b- Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $h(x) = x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

3) a- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b- Etudier la position relative de (C) et de (Δ) .

4) Dresser le tableau de variation de puis tracer (C) et (Δ)

Problème 31

PARTIE A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$. On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

- 1) Montrer que f est impaire.
- 2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis montrer que sa dérivée $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Etudier les branches infinies de la courbe (Cf) .
- 5) Trouver une équation cartésienne de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul.
- 6) Préciser la position de (T) et (Cf) .
- 7) Tracer la droite (T) et la courbe (Cf)
- 8) Soit α un réel strictement positif. Calculer en fonction de α , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = \alpha$.

PARTIE B :

- 1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on précisera.
- 2) Construis dans le même repère que (Cf) , la courbe (Cg) de la fonction g .
- 3) Montrer que pour tout $x \in I$, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.
- 4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left] \frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right[$.
- 5) Calculer en fonction de α l'aire du domaine limité par les deux courbes (Cf) et (Cg) et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

Problème 32

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique (4 cm).

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire).

On définit la fonction g sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

- 1) Etudier les variations de g , dresser son tableau de variation. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et que $1,14 < \alpha < 1,15$.
- 2) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : (Etude et tracée de f).

- 1) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[; f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation de f .
- 2) a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[; f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ puis détermine l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$
- 4) Montrer que $f(x) - x = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$. Etudier les variations de la fonction $T(x) = ex - xe^x - 1$. Puis en déduire la position de (C) par rapport à (T) .

5) Tracer (C) et (T).

Partie C :

- 1) Déterminer une primitive F de f en utilisant la question 2) a) de la partie B.
- 2) Calculer en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par (C), la tangente (T) et droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$
 - a) Calculer à 10^{-2} près les valeurs de I_1 ; I_0 ; I_2 .
 - b) Interpréter graphiquement I_n .
- c) Montrer que $\forall n \geq 2$; $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$
En déduire la monotonie de la suite (I_n) à partir de $n = 1$.
- d) Déterminer la limite de la suite (I_n)

Problème 33

A. Le plan P est muni du repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques : **4 cm** sur l'axe des abscisses et **2 cm** sur l'axe des ordonnées. On considère la fonction **f** définie par :

$$f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x}).$$

- 1) Démontrer que, pour tout x réel : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$
 - 2) Déterminer les limites de **f** aux bornes de son ensemble de définition.
 - 3) Démontrer que, pour tout x réel : $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$. En déduire le signe de $f'(x)$.
 - 4) Donner le tableau de variation de **f**.
 - 5) Représenter la fonction **f** dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
- B. On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t , (t positif exprimé en secondes), la concentration **y** de la substance injectée est : $y = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On appelle « *concentration* » le rapport entre la quantité du liquide injecté et la quantité de sang qui le contient.
- 1) En utilisant les résultats de la partie A. , donner le tableau de variation de la concentration en fonction du temps t en secondes.
 - 2) Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ?
 - 3) Calculer au bout de combien de temps la concentration retombe au quart de sa valeur maximale. Vérifier graphiquement en utilisant la question 5) du A.
 - 4) Donner une valeur approchée de $f(9)$. En déduire qu'à l'instant t , $t \geq 9$, la concentration est inférieure à 10^{-3} .

Problème 34

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une Petrie. Le nombre de bactéries en centaines est modélisé par la fonction **f** définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

- 1) a) Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.
 - b) Montrer que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$. En déduire la limite de **f** en $+\infty$.
- On appelle cette valeur la saturation .Que peut-on en conclure pour la courbe (C) de **f** ?
- c) L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifier la réponse.

- 2) Montrer que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t+2)^2}$. En déduire le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- 3) Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C) . Déterminer l'équation de (T) .
- 4) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$								

- 5) Tracer (C) , (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C) .
- 6) Calculer à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à **200**.
- 7) Déterminer graphiquement au bout de combien de temps, la population de cette colonie dépassera **80%** de sa saturation.

Problème 35 : Extrait du Bac 2018 T. S.Exp

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie. Des relevés statistiques ont permis de modéliser le nombre de malades durant l'épidémie par la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 26]$ par : $f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10$ où t représente le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

1. Calcule $f'(t)$.
 2. a. Étudie le signe de $f''(t)$ sur l'intervalle $[1; 26]$.
b. Dresse le tableau de variations de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[1; 26]$.
c. Montre que l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1; 26]$ dont on donnera un encadrement par deux entiers consécutifs.
d. En déduis le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[1; 26]$ puis les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; 26]$.
 3. On admet que $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.
- a. Dans le contexte du problème, donne une interprétation du tableau de variations de la fonction dérivée f' obtenu à la question 2.

En se servant des questions précédentes, détermine le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malade par semaine a commencé à diminuer.

Problème 36 : Extrait du Bac 2012 T. S.Exp (2^{ème} groupe)

Partie A

À l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3 mg d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en mg en fonction du temps t en heures est $f(t)$, où f est définie sur $[0; 12]$ par $f(t) = 3e^{-0,1t}$.

1°/ Déterminez $f'(t)$ et justifiez que pour tout $t \in [0; 12]$, $f'(t) < 0$.

2°/ Dressez le tableau de variation de f sur $[0; 12]$.

3°/ Calculez $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(6)$ et $f(8)$. Que représente chacune de ces valeurs ?

4°/ Tracez la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy)).

Partie B

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à 1,25 ml, ainsi on procède à une seconde injection

1°/ Au bout de combien de temps on procèdera à la seconde injection ?

(On déterminera ce temps graphiquement et par calcul).

2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de 4,5 ml. Le patient court-il un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection ?

ADD