

Exercices Fonctions Logarithmes Népériens

Fonctions Exponentielles :

Exercice 1 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x - 2) - \ln(3x - 5) = \ln(x + 1)$; $\ln(3x - 5) = 0$

b) $\ln(x + 2) = 1 + \ln(x - 3)$; $\ln(2x - 3) + 2\ln(x + 1) = \ln(6x - 3)$

c) $2\ln(x - 2) + \ln(3x + 1) = 2\ln 2$; $\ln(x + 2) + \ln(x + 4) = \ln(x + 8)$

d) $\ln|x + 1| + \ln|x - 5| = \ln 16$; $\ln|3 - x| = 1$

e) $\ln(-1 - x) = \ln\left(\frac{-x-10}{x+2}\right)$; $\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{15}{4}$

f) $(\ln x)^2 - 6\ln x + 5 = 0$; $(\ln x)^3 - 7\ln x - 6 = 0$

g) $2\ln(3x - 2) - \ln(4x - 3x^2) = \ln\left(\frac{4x-3}{x}\right)$; $\ln(2x + 3) + 2 = \ln(2x - 2) + \ln 3$

h) $\log x + \log(3 - x) = \log 5$; $\log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2} + \log_9^{(4x+15)} = 0$

i) $e^{5x+1} = e^{3x+2}$; $e^{3x+2} = e$; $e^x + 1 = 0$; $e^{x^2+2} = e^{3x}$

j) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$; $e^{x^2} = 4$; $e^{x+2} \times e^{x-3} = e^4$; $\frac{e^x}{e^3} = e^5$

k) $e^x - 10e^{-x} = 3$; $e^{2x} - 9 = 0$; $\ln(e^x - 3) = 0$; $e^{1-2\ln x} = 1$

l) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$; $e^{2x} + e^x - 6 = 0$; $e^{3x+2} + \frac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$

m) $\frac{e^{2x}-6}{2-2e^x} = 1$; $-4e^{3x} + 17e^{2x} + 16e^x - 5 = 0$; $3^{2x+2} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$

n) $3e^{3x} - 4e^{2x} - 13e^x + 14 = 0$; $2e^{2x-4} + 5e^{x-2} - 3 = 0$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x + 2) + \ln(x + 4) < \ln(x + 8)$; $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) \leq 0$

b) $\ln x + \ln(2 - x) + \ln(x + 4) \geq \ln(5x)$; $\ln^2 x + 2\ln x - 15 < 0$

c) $\ln(x^2 - 10x + 9) \leq \ln(3x - 27)$; $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$

$$d) \ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{8}{3} \quad ; \quad (1 - \ln x)(3 + \ln x) \geq 0$$

$$e) 2e^{2x} - 11e^x + 15 > 0 \quad ; \quad e^{2x} - e^x - 12 > 0 \quad ; \quad 3e^{2x} + e^x - 10 \geq 0$$

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} -2 \ln x + \ln y = 3 \\ 4 \ln x - 3 \ln y = -7 \end{cases} \quad ; \quad b) \begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = 6 \ln 2 \end{cases} \quad ; \quad c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ \ln x + \ln y = \ln 63 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = 9 \\ \ln x + 5 \ln y = -2 \end{cases} \quad ; \quad e) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 2 + \ln 3 \end{cases} \quad ; \quad f) \begin{cases} x - y = 2 - e \\ \ln(x + y) = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \ln(x^3 y^4) = 6 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y^5}\right) = 5 \end{cases} \quad ; \quad h) \begin{cases} \ln x^3 + \ln y^2 = 3 \\ \ln y^2 - \ln x^2 = -2 \end{cases} \quad ; \quad i) \begin{cases} x + y = 7 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} xy = 243 \\ \log_x y + \log_y x = \frac{17}{4} \end{cases} \quad ; \quad k) \begin{cases} \ln(x - 2) + 3 \ln(y - 1) = 0 \\ 2 \ln(x - 2) - \ln(y - 1) = 4 \end{cases} \quad ; \quad m) \begin{cases} \ln y = \ln x + 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^x - e^y = 3 \end{cases} \quad ; \quad p) \begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad ; \quad q) \begin{cases} 3e^x - 4e^y = -6 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases} \quad ;$$

$$r) \begin{cases} e^x + 2e^y = 1 \\ -3e^x + e^y = 4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases}$$

$$s) \begin{cases} \ln(y + 1) - \ln(x + 4) = -\ln 8 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases} \quad ; \quad t) \begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2 \ln 6 \\ e^x = \frac{1}{e^{1+y}} \end{cases} \quad ;$$

$$u) \begin{cases} x \cdot y = -15 \\ e^x \cdot e^y = e^{-2} \end{cases} \quad ; \quad v) \begin{cases} e^{2x} - 4e^x + 3 > 0 \\ 2e^{2x} - 11e^x + 5 \leq 0 \end{cases} \quad ;$$

$$w) \begin{cases} \ln(3x + 4y) - \ln 7 = \ln(2 - 5x) + \ln 5 \\ e^{x-2} \cdot e^{y+3} = 1 \end{cases} \quad ; \quad z) \begin{cases} \ln x - 2 \ln y = \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^{2-y}} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble de définitions des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \ln(-x^2 + 6x - 5) \quad ; \quad f_2(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right) \quad ; \quad f_3(x) = |\ln(x + 3)|$$

$$f_4(x) = \ln|-x^2 - 3x + 4| \quad ; \quad f_5(x) = -3x + 1 + \ln\left|\frac{x+3}{-x+5}\right| \quad ; \quad f_6(x) = \sqrt{3 - \ln x}$$

$$f_7(x) = x^2 - 3 + \ln|3x - 9| \quad ; \quad f_8(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad ; \quad f_9(x) = \frac{x-5}{\ln^2 x - 4 \ln x + 3}$$

$$f_{10}(x) = 3x + 2 - \ln(\sqrt{-x^2 + 3x - 2}) ; \begin{cases} g_1(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x} \\ g_1(0) = -1 \end{cases} ;$$

$$g_2(x) = e^x(e^x - 2) ; g_3(x) = \frac{e^x - 2}{e^{x+1}} ; g_4(x) = x + 4 - \frac{4}{e^{x+1}}$$

$$g_5(x) = 1 + xe^{\frac{1}{x}} ; g_6(x) = \ln(e^{x+1} + 2) ; g_7(x) = \sqrt{e^x - 3}$$

$$g_8(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^{x+1}}\right) ; g_9(x) = x + e^{\ln\left(\frac{3}{x^2 - 4}\right)} ; g_{10}(x) = \frac{3x}{e^{x+1}}$$

$$h(x) = \ln(e^x - 2)$$

PROBLÈME 1 :

A) On considère la fonction g définie par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

- 1°) Etudier les variations de g .
- 2°) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par : $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$.

- 1°) Etudier les variations de f .
- 2°) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ) .
- 3°) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (Δ) . Donner une équation de cette tangente.
- 4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; 1]$; puis une solution unique β dans $[3; 4]$.
- 5°) Tracer (Cf) et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1cm.
- 6°) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

PROBLÈME 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$. On désigne par (Cf) la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité 1cm.

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2°) Etudier les variations de f .
- 3°) Montrer que f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
- 4°) Dresser le tableau de variation de f .
- 5°) Trouver l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse nulle.
- 6°) Trouver les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative (Cf) avec les axes de coordonnées.
- 7°) Tracer (Cf) et (T) .
- 8°) Soit F la fonction définie par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b et c sont des réels.
 - a) Déterminer les réels a, b et c pour que F soit une primitive de f .
 - b) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (Cf) , l'axe des abscisses la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

PROBLÈME 3 :

Partie : A

Soit $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1°) Etudier la fonction g .

2°) a) Calculer $g(1)$.

b) En utilisant le tableau de variation de g , déduire que : $g(x) > 0 \quad \forall x \in]0; 1[$

Partie : B

Soit $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{\ln x}{2x}$.

1°) a) Préciser l'ensemble de définition D_f de f .

b) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x de D_f : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

d) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .

2°) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé d'unité graphique 2cm. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation : $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

a) Donner suivant les valeurs de x le signe de $h(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$ et en déduire la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $\mathcal{D}$.

b) Construire $(\mathcal{C})$ et $\mathcal{D}$.

3°) a) Calculer la dérivée de la fonction U définie par : $U(x) = (\ln x)^2$.

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par $(\mathcal{C})$ la droite $\mathcal{D}$ et les droites d'équations : $x = 1$; $x = e^2$.

PROBLÈME 4 :

Soit h la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = e^{-x} \ln x$$

1°) Déterminer la fonction dérivée de h et vérifier que $h'(x)$ a même signe que $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$.

2°) a) Etudier les variations de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2.

b) Quel est le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0; \alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$.

3°) Vérifier que $h(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ un encadrement de $h(\alpha)$.

4°) Achever l'étude de la fonction h et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PROBLÈME 5 :

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2x + 1 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

1°) Etudier les limites de cette fonctions aux bornes de son ensemble de définition. On appelle (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. Préciser les asymptotes à la courbe (C_f) de f . En particulier on établira l'existence d'une asymptote oblique (D) .

2°) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3°) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à (D) .

4°) Construire la courbe de f .

PROBLÈME 6 :

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

(C) désigne sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1°) Déterminer la limite de $f(x)$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

2°) a) Établir que pour tout réel x : $f'(x) = -(x + 1)e^{-x}$, en déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation de f .

b) Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 0$.

c) Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm)

3°) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur $[-2; 4]$.

4°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (ax + b)e^{-x}$.

a) Déterminer les réels a et b pour que g soit une primitive de f .

b) Calculer en unité d'aire la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -2$ et $x = 4$. Donner une valeur approchée de l'aire à 10^{-2} près par défaut en cm^2 .

PROBLÈME 7 :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x)$ et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1°) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g et ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$.

c) Etudier le signe de $g(x)$.

2°) a) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f .

3°) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe (Cf) .

b) Déterminer le point d'intersection A de (Cf) et (Δ) ; préciser la position de (Cf) par rapport à la droite (Δ) .

c) Tracer la courbe (Cf) et la droite (Δ) , en précisant la tangente en A à (Cf) .

PROBLÈME 8 :

A-/ Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$

1°) Etudier la fonction h .

2°) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que : $-1 \leq \alpha \leq 0$.

3°) Donner le signe de $h(x)$ dans son domaine de définition.

4°) A l'aide de la calculatrice donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .

(On explicitera la méthode utilisée).

B-/ Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1°) Etudier les variations de f .

- 2°) Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet une droite $(\mathcal{D})$ asymptote oblique en $+\infty$ que l'on précisera.
- 3°) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
- 4°) Donner une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x = 0$.
- 5°) Déterminer sur la figure le domaine puis calculer en cm^2 l'aire de la région du plan limitée par $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

PROBLÈME 9 :

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans un Petrie. Le nombre de bactéries en centaines est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

- 1°) a) Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.
 b) Montrer que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
 On appelle cette valeur la saturation. Que peut-on conclure pour la courbe $(\mathcal{C})$ de f ?
 c) L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifier la réponse.
- 2°) Montrer que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$. En déduire le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- 3°) Soit $(\mathcal{T})$ la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe $(\mathcal{C})$. Déterminer l'équation de $(\mathcal{T})$.
- 4°) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près.
- 5°) Tracer $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{T})$ ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à $(\mathcal{C})$
- 6°) Calculer à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à 200.
- 7°) Déterminer graphiquement au bout de combien de temps, la population de cette colonie dépassera 80% de sa saturation.

PROBLÈME 10 :

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie. Des relevés statiques ont permis de modéliser le nombre de malades durant l'épidémie par la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 26]$ par : $f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10$ où t représente le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

- 1°) Calculer $f'(t)$.
- 2°) a) Etudier le signe de $f''(t)$ sur l'intervalle $[1; 26]$.
 b) Dresser le tableau de variation de f' sur $[1; 26]$.
 c) Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1; 26]$ dont on donnera un encadrement par deux entiers consécutifs.
 d) En déduire le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[1; 26]$ puis les variations de la fonction f sur $[1; 26]$.
- 3°) On admet que $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout t semaines.
- a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation du tableau de variations de la fonction dérivée f' obtenu à la question 2.
- b) En se servant des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malade par semaine a commencé à diminuer.

PROBLÈME 11 :

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = x + \ln|x|$

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition de f . Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2°) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$; étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
- 3°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (Cf) avec la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$.
- 4°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; 1]$.
- 5°) En déduire le signe de $f(x)$ dans D_f .
- 6°) Tracer sa courbe représentative (Cf) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.
- 7°) Déterminer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

PROBLÈME 12 :**Partie : A**

Soit la fonction g définie par : $g(x) = e^x + x - 5$

- 1°) Etudie le sens de variation de g .
- 2°) a) Calculer $g(0)$ et $g(2)$.
- b) Démontrer que l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α et que : $1,30 < \alpha < 1,31$

Partie : B

Soit la fonction numérique f définie sur $] -\infty; 5[$ par : $f(x) = \ln(5 - x)$.

- 1°) Etudie le sens de variation de f . Préciser les limites de f en 5 et en $-\infty$.
- 2°) Prouver que $f(\alpha) = \alpha$.
- 3°) a) Démontrer que $\forall x \in [0; 3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- b) En déduis que $\forall x \in [0; 3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
- c) Démontrer que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.
- 4°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, d'unité graphique 3 cm, on désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f .
- a) Tracer la courbe (C) , puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées (x, y) tel que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on notera (S) cette partie.
- b) En remarquant que, $\forall x \neq 5, \frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$;
Montrer que : $\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$.
- c) Prouver que l'aire A de la partie (S) en cm^2 est donné par
 $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$. (On utilisera une intégration par partie).

PROBLÈME 13 :

A/- Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln|x^2 - 2x - 3|$$

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2°) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue puis calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- 3°) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
- 4°) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de f .
- 5°) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans la plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 cm.

B/- Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x(\ln x)^2 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

- 1°) Etudier le signe de $f'(x)$.
- 2°) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
- 3°) Quelle est la demi tangente en $x_0 = 0$?
- 4°) Donner l'équation de la tangente (T) en $x_0 = e$.
- 5°) Tracer la courbe (C_f) de f .
- 6°) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x (\ln x - 1)$.
 - a) Calculer $g'(x)$ et en déduire une primitive de f .
 - b) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la portion du plan comprise entre (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ ($0 < \lambda < 1$) ; $x = 1$.
- 7°) Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0.

PROBLÈME 14 :

A./ Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

- 1°) Déterminer la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.
- 2°) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
- 3°) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
 - a) Vérifier que 0 en est une.
 - b) L'autre solution est appelé α . Montrer que $-1,6 < \alpha < -1,5$.
- 4°) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réels x .

B./ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

- 1°) Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.
(On pourra mettre e^{2x} en facteur pour calculer la limite en $+\infty$).
- 2°) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudier le sens de variation de f .
- 3°) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2 + 2\alpha)}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie **A**. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
(On rappelle que $-1,6 < \alpha < -1,5$)
- 4°) Etablir le tableau de variation de f .
- 5°) Tracer la courbe (C) représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm).

PROBLÈME 15 :

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + x - 3x \ln x$.

- 1°) Peut-on prolonger f par continuité au point $x_0 = 0$? Si oui déterminer son prolongement g .
- 2°) Déterminer l'intervalle **I** de définition de g .
- 3°) Etudier la continuité et la dérivabilité de g au point $x_0 = 0$.
- 4°) a) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
b) Montrer que dans $[1; 2]$ $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α .

5°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis interpréter.

6°) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

PROBLÈME 16 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^{x+1}}$.

Soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique : 1cm.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f .

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^{x+1}} = x + 1 - \frac{2e^x}{e^{x+1}}$;

b) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Montrer que les droites $(D_1) : y = x + 1$ et $(D_2) : y = x - 1$ sont asymptotes à (C_f) .

d) Préciser les positions relatives de (C_f) par rapport à (D_1) et (D_2) .

2°) Montrer que la fonction f est impaire. On limitera l'étude de f à l'intervalle $[0; +\infty[$.

3°) Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

4°) Construire la courbe (C_f) , la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 et les asymptotes (D_1) et (D_2) .

5°) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique x_0 .

6°) Déterminer en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C_f) la droite (D_2) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

(On hachurera le domaine $\mathcal{D}$ sur la figure).

PROBLÈME 17 :

1°) Soit la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

a) Etudier les variations de g et calculer $g(1)$.

b) En déduire le signe de $g(x)$.

2°) Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2 - x$

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$.

c) Montrer que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. En déduire le tableau de variation de f .

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 donner en justifiant, un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune d'elles.

3°) On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à (C) .

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) .

c) Déterminer les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D) .

4°) Tracer (C) et (D) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PROBLÈME 18 :

On considère les fonctions numériques f_m de valeur réelle x définie par

$$f_m(x) = e^{x-1} - mx$$

Où m est un paramètre réel. On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2cm).

1°) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

2°) Montrer que la droite (Δ_m) d'équation $y = -mx$ est une asymptote à la

- courbe $(\mathcal{C}_m)$ et déterminer la position de cette droite par rapport à $(\mathcal{C}_m)$.
- 3°) Etudier la fonction f_1 et tracer avec soin la courbe $(\mathcal{C}_1)$ dans le repère.
- 4°) Soit g_1 la restriction de f_1 à $[1; +\infty[$. Montrer que g_1 admet une réciproque $(g_1)^{-1}$.
Représenter la courbe de $(g_1)^{-1}$.
- 5°) Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par $(\mathcal{C}_1)$, la droite $\Delta_1: y = -x$, et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \alpha$, $(\alpha < 1)$.

PROBLÈME 19 :

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; \infty[$ par $g(x) = x^2 - 2 \ln x$

- 1°) Etudier le sens de variation de g .
- 2°) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; \infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2cm).

- 1°) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 2°) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C) . Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0; +\infty[$.
Montrer que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera.
- 3°) Etudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .
- 4°) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ) . Préciser les coordonnées du point B .
- 5°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α . Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α . Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que $0,31 < \alpha < 0,35$.
- 6°) Représenter la courbe (C) et les droites (Δ) et (T) .

PROBLÈME 20 :

A./ Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

- 1°) a) Déterminer les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

b) Calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de φ .

- 2°) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée α est dans $[1; +\infty[$. Vérifier que $1,79 < \alpha < 1,80$.
- 3°) En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

B./ On donne les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Leurs courbes sont respectivement notées $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

- 1°) Déterminer les domaines de définition de f et de g puis calculer leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.
- 2°) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ admettent au point $A(0; 1)$ une tangente commune (T) .
Donner une équation cartésienne de (T) .

3°) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1) \times \varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction définie dans la partie A.

b) Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la position relative des courbes (C_f) et (C_g) .

4°) a) Déterminer une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par : $F(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c) Déduire une primitive H de $f - g$ sur $\mathbb{R}$.

d) Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.

NB : Les tracés de (C_f) et (C_g) ne sont pas demandés.

PROBLÈME 21 :

A/- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$

1°) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de g .

2°) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

3°) Donner un encadrement de α par deux nombres rationnels de la forme $\frac{n}{10}$ et $\frac{n+1}{10}$ avec n entier naturel.

4°) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

B/- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$. Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1°) Étudier les limites de f en $-\infty$; en 0 et en $+\infty$.

2°) Calculer $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variation de f .

3°) Démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$.

4°) En utilisant l'encadrement de α trouvé au A) 3°) montrer que : $1,6 < f(\alpha) < 2,1$.

C/- On considère un réel m supérieur à 1.

Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

1°) Démontrer que H définie sur $[1; +\infty[$ par $H(x) = -\frac{1+\ln x}{x}$ est une primitive de h .

2°) On désigne par $A(m)$ l'intégrale $\int_1^m [2x - f(x)] dx$. Calculer $A(m)$.

3°) Déterminer si elle existe la limite de $A(m)$ quand m tend vers $+\infty$.

PROBLÈME 22 :

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$.

(C) désigne sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) a) Prouver que la droite (Δ_1) d'équation : $y = x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ_1) .

3°) a) Justifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = x - 2 + \frac{4}{1+e^x}$.

b) En déduire que la droite (Δ_2) d'équation : $y = x - 2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

c) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ_2) .

4°) a) Prouver que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$.

- b) Etudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .
- 5°) Tracer les droites (Δ_1) et (Δ_2) , puis la courbe en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.
- 6°) Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME 23 :

A/- Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité 2cm.

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2°) Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
- 3°) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .
- 4°) a) Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point I .
- b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T) .
- 5°) Tracer $(\mathcal{C})$ et (T) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.
- 6°) a) A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{2}}^0 f(x) dx$
- b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (T) et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

B/- Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x) \text{ où } f \text{ est la fonction en A/}.$$

- 1°) Vérifier que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sin x}$.

2°) Calculer l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$.

3°) Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$.

a) Calculer I_0 et I_1 .

b) Calculer l'intégrale $J_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx$.

c) En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calculer I_2, I_3, I_4, I_5 .

PROBLÈME 24 :

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère la famille de fonction f_n définies sur $[0; +\infty[$ comme suit :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm, et on note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n .

A- Dans cette première partie, on se propose d'étudier la fonction f_1 .

- 1°) a) Etudier la continuité de f_1 en 0 et son comportement en $+\infty$.
- b) Etudier le comportement du rapport $\frac{f_1(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Que peut-on conclure pour la fonction f_1 et la courbe $(\mathcal{C}_1)$?

- 2°) a) Justifier la dérivabilité de f_1 sur $]0; +\infty[$. Calculer $f_1'(x)$ puis $f_1''(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$.
- b) Etudier successivement les variations de f_1' et de f_1 et dresser le tableau de variation de f_1 .
- 3°) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_1)$, son asymptote et la tangente au point O.

B- La seconde partie est consacrée à l'étude des fonctions f_n lorsque $n \geq 2$.

- 1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis le comportement de f_n en $+\infty$.
- 2°) a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0; +\infty[$.
Démontrer que : $f_n'(x) = x^{n-1}g_n(x)$ où g_n est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ que l'on déterminera.
- b) Etudier les variations de g_n et en déduire le signe de $g_n(x)$.
- c) Dresser le tableau de variation de f_n .

C- La troisième partie porte sur les courbes $(\mathcal{C}_n)$ lorsque $n \geq 2$.

- 1°) Quelle est la tangente à $(\mathcal{C}_n)$ en O origine du repère ?
- 2°) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$ pour $n \geq 2$. Quelle est la position de $(\mathcal{C}_1)$ par rapport à toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$?
- 3°) a) Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]$$

Que peut-on en conclure pour $(\mathcal{C}_2)$?

- b) On précisera la position de $(\mathcal{C}_2)$ par rapport à la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$.
- 4°) Tracer $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_1)$.

PROBLÈME 25 :

Partie : A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

- 1°) Etudier le sens de variation de g .
- 2°) a) Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.
- b) Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
- 3°) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie : B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2+x}$

On appelle $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité graphique 2cm.

- 1°) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ces limites.

- 2°) a) Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$.

- b) En déduire les variations de f .

- c) Montrer que, $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et donner le tableau de variation de f .

- 3°) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .

Partie : C

On se propose de trouver un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ de l'ensemble des points $M(x; y)$

tels que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

1°) Montrer que, pour tout $x \geq 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2°) a) Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

3°) a) Dédurre un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$.

b) Exprimer α en fonction de K , puis déduire une valeur approchée de α en cm^2 .

PROBLÈME 26 :

A./ Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

On appelle **(C)** la courbe représentative de f .

1°) a) Calculer la fonction dérivée de f .

b) Dresser le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

d) Montrer que **(C)** admet une asymptote **(D)** que l'on déterminera.

e) Construire **(C)** et **(D)** sur un même graphique.

2°) a) Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution et une seule notée α .

b) Justifier l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

B./ Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J = [1; +\infty[$ par : $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1°) Etudier les variations de g sur J puis en déduire que pour tout $x \in J$, $g(x) \in J$.

2°) Montrer que pour tout $x \in J$, on a $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En déduire que pour tout $x \in J$, on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |x - \alpha|$.

3°) Soit (U_n) la suite d'éléments de J définie par $U_n = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier n positif ou nul.

a) Montrer que pour tout entier n positif ou nul, on a :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |U_n - \alpha|.$$

b) En déduire que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

d) Déterminer un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Calculer U_p à 10^{-3} .

PROBLÈME 27 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{1+xe^x}$.

On désigne par **(C)** la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

Partie I : Etude de f

1°) Soit Ψ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\Psi(x) = 1 + xe^x$.

a) Etudier les variations de Ψ puis dresser son tableau de variation.

(On ne demande pas de calculer les limites).

b) Démontrer que pour nombre réel x , $\Psi(x) > 0$.

c) En déduire l'ensemble de définition de f .

2°) Soit φ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\varphi(x) = 1 + x^2e^x$.

- a) Calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
 b) Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variation.
 c) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 0,7 et 0,71.
 d) En déduire : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, \varphi(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, \varphi(x) < 0 \end{cases}$
 3°) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+xe^x)^2}$.
 b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 c) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
 4°) Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
 a) Démontrer que (D) est asymptote à (C) en $-\infty$.
 b) Etudier la position de (C) par rapport à (D). (On pourra utiliser la question I.1.b).
 c) Démontrer que la droite (D) est tangente à (C) au point d'abscisse 0.
 d) Tracer (D) et (C) dans la fenêtre définie par :
 $X_{\min} = -4,5$; $X_{\max} = 4$
 $Y_{\min} = -5$; $Y_{\max} = 0,4$.
 On prendra : $OI = 2 \text{ cm}$; $OJ = 2 \text{ cm}$ et $\alpha = 0,7$.

Partie II : Etude d'une suite

Pour tout entier n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t} dt$.

- 1°) a) Sans calculer I_1 , en donner une interprétation graphique.
 b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 c) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 2°) a) Démontrer que : $\forall t \in [0; 1], \frac{1}{1+e} \leq \frac{1}{1+te^t} \leq 1$.
 (On pourra utiliser les variations de Ψ sur $[0; 1]$).
 b) En déduire que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{(1+e)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)}$.
 c) Déterminer la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

PROBLÈME 28 :

On considère, pour tout entier naturel non nul n , la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = e^{-nx^2}$.

On désigne par (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 5 cm).

Dans tout le problème, les fonctions sont supposées dérivables sur leur ensemble de définition.

Partie : A

- 1°) Calculer $f_n(0)$ et la limite de f_n en $+\infty$.
 2°) Calculer $f_n'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n .
 3°) Encadrer $f_n(x)$ par deux entiers consécutifs.
 4°) Démontrer que la dérivée seconde f_n'' de f_n s'annule pour une unique valeur positive a_n égale à $\frac{1}{\sqrt{2n}}$.
 5°) Soit A_n le point de (C_n) d'abscisse a_n .
 a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T_n) à la courbe (C_n) au point d'abscisse

$$a_n \text{ est : } y = -\sqrt{\frac{2n}{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

b) Démontrer que toutes les droites (T_n) passe par un point fixe dont on donnera les coordonnées.

6°) Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = e^{-nx^2} + \sqrt{\frac{2n}{e}}x - \frac{2}{\sqrt{e}}$.

a) Calculer $h(a_n)$.

b) Utiliser la dérivée seconde de h pour trouver le signe de $h'(x)$ et dresser le tableau de variation de h .

c) En déduire la position de (C_n) par rapport à (T_n) .

7°) Construire (C_1) et (C_3) .

Partie : B

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

1°) Etudier le sens de variation de la suite (U_n) .

2°) Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

Dans la suite de l'énoncé, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3°) Démontrer que : $\int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nx^2} dx \leq \frac{1}{\ln(n)}$.

4°) Démontrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{\ln(n)}; 1\right], 0 < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$.

5°) Démontrer que : $0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^1 e^{-nx^2} dx \leq \left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right) e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$.

6°) Calculer la limite de la suite (U_n) .

PROBLÈME 29 :

Partie : A

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \end{cases}$

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2°) Soit φ la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $\varphi(x) = \ln(x) + x + 1$

a) Etudier le sens de variation de φ .

b) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $0,27 \leq \beta \leq 0,28$

3°) a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f .

b) Vérifier que : $f(\beta) = -\beta$.

c) Calculer la limite de f en $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variation de f .

4°) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On placera en particulier les point d'abscisses 1 ; 3 ; 4 ; e^2 ; 12.

On prendra : $\ln(0,27) \simeq -1,31$; $\ln(0,28) \simeq -1,27$; $\ln(2) \simeq 0,7$; $\ln(3) \simeq 1,1$; $\ln(5) \simeq 1,6$.

Partie : B

1°) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[3; 4]$.

b) Démontrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.

2°) Soit g la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positif x

par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

- a) Etudier le sens de variation de g .
- b) Démontrer que pour tout x élément de $[3; 4]$, $g(x)$ est un élément de $[3; 4]$.
- c) Démontrer que : $\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

On prendra : $e^{\frac{4}{3}} \simeq 3,8 ; e^{\frac{5}{4}} \simeq 3,49$

3°) Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

- a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$.
- b) Démontrer que pour tout entier n positif ou nul : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

- c) Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.
- d) Pour quelle valeurs de n , U_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près.