

PROBLÈMES

PROBLÈME 1

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x(1 + \ln x)^2 - 1$

1. On admettra que g est dérivable sur $]0; +\infty[$
 - a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$
 - b) Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$ $g'(x) = (1 + \ln x)(3 + \ln x)$
 - c) Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de g .
2. Dresser le tableau de variation de g . (On ne calculera pas les limites en 0 et $+\infty$.)
3. a) Calculer $g(1)$
 - b) En déduire que pour tout $x \in]0; 1[$: $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$: $g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{1 + \ln x} - 1 \text{ si }]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$$

(C) est la représentation graphique dans le repère orthonormé (O, I, J) (unités : 2cm)

1. a) Montrer que f est continue en 0.
 - b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
 - c) En déduire la tangente à (C) au point $A(0; -1)$
2. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C)
 - c) Etudier les positions relatives de (C) et (Δ).
 - d) Préciser l'autre asymptote à la courbe (C) de f .
3. a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[\setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + \ln x)^2}$
 - b) En déduire le sens de variation de f .
 - c) Dresser son tableau de variation

Partie C

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$ par $h(x) = \ln(1 + \ln x)$
2. a) En déduire les primitives sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$ de la fonction $k : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$
 - b) Déterminer la primitive de k qui prend la valeur -1 en 1.

PROBLÈME 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre

$$f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x} \text{ réel } x \text{ appartenant à }]0; +\infty[.$$

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f .

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Sachant que la courbe (C) passe par le point de coordonnées $(1; 0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b .

Partie C : Etude de la fonction f .

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle

$$]0; +\infty[, f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$$

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.

b) Déterminer la limite de la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a) Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

c) En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. On considère la droite (D) d'équation $y = x - 1$.

a) Justifier que la droite (D) est asymptote à la courbe (C) .

b) Étudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (D) .

c) Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le plan P muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm^2 , de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.

On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H .

a) Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Calculer A et donner sa valeur arrondie au mm^2 près.

PROBLÈME 3

Partie A :

On considère g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = 1 + x(2\ln|x| + 1)$$

1. a) Justifier que g est définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
b) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. a) Étudier le sens de variation de g .
b) Dresser le tableau de variation de g .
3. a) Calculer l'image de -1 par g .
b) Déterminer l'image J par g de l'intervalle I tel que : $I =]-\infty; -e^{-\frac{1}{2}}]$
c) Démontrer que la restriction h de g sur l'intervalle I est une bijection de I sur J .
d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$
4. Déduire de tout ce qui précède que :
 $\forall x \in]-\infty; -1[\quad g(x) < 0$ et $\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[\quad g(x) > 0$

Partie B :

On considère f la fonction numérique de la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x(x\ln|x| + 1) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ et } (C) \text{ sa courbe représentative dans le plan muni du}$$

repère orthonormé $(O; I; J)$. (Unité : 5cm)

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. a) Donner l'ensemble de définition de f et déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
c) Déterminer la fonction dérivée f' et déterminer le tableau de variation de f .
3. a) Écrire une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point O .
b) Démontrer que (D) coupe (C) en deux points E et F et calculer leurs coordonnées.
c) Étudier la position de (C) par rapport à (D) .
4. Démontrer que (C) coupe l'axe (OI) en un point K d'abscisse β tel que $-1,8 < \beta < -1,7$.
5. Construire (C) .

Partie C :

1. Soit α un réel appartenant à $]0; 1[$.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\alpha}^1 x^2 \ln(x) dx$.

2. a) Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C) , la droite (D) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.
b) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha)$.

On prendra : $\ln(2) = 0,7$; $\ln(3) = 1,1$; $\ln(5) = 1,6$; $\ln(17) = 2,9$; $e = 2,7$; $\sqrt{e} = 1,6$.

PROBLÈME 4

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = -x^3 + x + 1 - \ln|x|$$

1. Montrer que -1 est un zéro de la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = -3x^3 + x - 2.$$

2. a) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

b) Calculer les limites de g aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.

c) Etudier les variations de g .

d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. On note α cette solution.

Montrer que : $1,2 < \alpha < 1,3$.

e) En déduire que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[, g(x) > 0$; $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = -x + 1 - \frac{x - \ln|x|}{x^2}.$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) .

(Unité graphique : 2cm)

1. Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.

2. a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse -1.

4. Déterminer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C) .

5. a) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = x - \ln|x|.$$

b) En déduire que (D) coupe (C) en un point unique d'abscisse β vérifiant : $\ln(-\beta) = \beta$.

c) Montrer que : $-0,57 < \beta < 0,56$.

d) Déterminer la position de (C) par rapport à (D) .

6. Construire (T) , (D) et (C) .

7. Démontrer que la fonction numérique F définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} - \ln x - \frac{1}{x}\ln x \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0; +\infty[$$

PROBLÈME 6

Partie A : Etude d'une fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$$

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Montrer que $f(x) = xe^{2x}\left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{4}{e^x} + \frac{4}{xe^x} - \frac{2}{xe^{2x}}\right)$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f .
3. Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé, unité graphique 2cm.
 - a) Etudier les branches infinies de (C_f) .
 - b) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un point, dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $[-2; -1]$.
 - c) Tracer (C_f) . On prendra $\ln 2 \approx 0,7$.
4. Montrer que $F(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + 4(2-x)e^x$, est une primitive de $f(x)+2$

Partie B : Etude d'une nouvelle fonction numérique de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = (x^2 - 4x)\ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4) \quad \forall x > 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

1. Montrer que : $g(x) = f(\ln x)$, $\forall x > 0$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de g à droite en 0.
3. Calculer les limites aux bornes de son domaine.
4. Etudier les variations de g .
5. Soit (C_g) la courbe représentative de g dans un niveau repère orthonormé, unité 2cm.
 - a) Etudier la branche infinie de (C_g) .

PROBLÈME 7

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct (O, I, J) .

Unité graphique : 2cm

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - xe^{-x}$

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x - 1)e^{-x}$
2. Déterminer le sens de variation de g puis, dresser le tableau de variation de g (sans les limites aux bornes).
3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

Partie B

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En donner une interprétation graphique
3. a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(1-x)e^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}$.
b) Déterminer le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f .
4. a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x - 1 = \frac{(x+1-e^x)xe^{-x}}{1-xe^{-x}}$.
c) Déterminer le signe de la fonction h telle que : $h(x) = x + 1 - e^{-x}$.
d) Dédire de la question précédente les positions relatives de (C) et de (T) .
5. Construire (T) et (C) .

PROBLÈME 8

Partie A: (Etude d'une fonction auxiliaire g)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x - 2 - 2x \ln x.$$

1. Justifier que l'ensemble des solutions de l'inéquation:

$$-2 \ln x - 1 \geq 0 \text{ est } S =]0; e^{-\frac{1}{2}}]$$

2. a) Calculer $g'(x)$.

b) Etudier les variations de g .

3. a) Etablir le tableau de variation de g . (On ne cherchera pas à calculer les limites de g).

b) En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B: (Etude et représentation graphique d'une fonction f)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (x - 1)^2 - x^2 \ln x$ si $x \in]0; +\infty[$ et $f(0) = 1$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

L'unité graphique est 2cm.

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Justifier que la courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

2. a) Justifier que f continue en 0.

b) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$.

3. Soit (T) la droite d'équation $y = -2x + 1$ et d la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $d(x) = f(x) - y$.

a) Justifier que (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b) Vérifier que pour tout $\forall x \in]0; +\infty[, d(x) = x^2 - x^2 \ln x$.

c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (T) .

4. a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f .

5. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

b) Vérifier que $\alpha = 1$ et démontrer que $f(x) \geq 0$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq 0$ si $x \geq 1$.

6. Construire (T) et (C) .

Partie C: (Etude d'une primitive F d'une restriction de la fonction f)

Soit F la primitive de f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en e . (On ne cherchera pas à déterminer F)

1. Déterminer $F(e)$ et $F'(x)$. (On justifiera chaque réponse)
2. Démontrer que F est une bijection de $]1; +\infty[$ vers $F(]0; +\infty[)$.
3. Soit F^{-1} la réciproque de F . Calculer $(F^{-1})'(0)$.

PROBLÈME 9

On désigne par (C) la courbe de la fonction f ci-dessous dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ dans le plan d'un repère orthonormé $(O; i; j)$. L'unité de longueur : 2 cm.

Partie A : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.
2. Montrer que :
 - Pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$; $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln(1 - \frac{1}{x})$
 - Pour tout $x \in]-\infty; 0[$; $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln(\frac{1}{x} - 1)$
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Calculer la limite de f en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.
5. a) Calculer les limites de f à gauche en 0 et à droite en 0.
b) Interpréter graphiquement ces résultats.

Partie B : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.

1. Calculer $g'(x)$, g' étant la fonction dérivée de g
2. Déterminer le sens de variation de g .
3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 1,5$.
b) En déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
4. Montrer que pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$; $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$; $g(x) > 0$.
5. Montrer que pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x-1)}$
6. a) Déterminer le signe de $f'(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f .

Partie C

1. Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$
Montrer que la droite (D) est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f(-2)$; $f(-\frac{1}{2})$ et $f(\frac{1}{2})$
3. Construire dans le repère $(O; i; j)$ la courbe (C) et ses asymptotes. On prendra $\alpha = 1,3$

Partie D

On considère les fonctions h et k définies sur $]2; +\infty[$ par $h(x) = (x-1)\ln(x-1) - x\ln x$ et on admettra que pour tout x élément de $]2; +\infty[$, $f(x) - x + 1 < 0$.

1. Calculer $h'(x)$, h' étant la dérivée de h .
2. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

PROBLÈME 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité : $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$

Partie A

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(0) = -1$ et $g(x) = \frac{x}{(\ln(x))^2} - 1$ et (C_g) sa courbe.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de g .
b) Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$.
c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
2. a) Démontrer que g est continue en 0.
b) Étudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.
3. On admet que g est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
a) Démontrer que $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$; $g'(x) = \frac{\ln(x)(\ln(x)-2)}{(\ln(x))^4}$.
b) Déterminer le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
4. a) Démontrer que l'équation $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.
b) Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$;
c) En déduire que : $\forall x \in]0; \alpha[$; $g(x) < 0$
 $\forall x \in]\alpha; 1[\cup]1; +\infty[$; $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R} \setminus]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x)}$ et (C) , sa courbe.

1. a) Calculer les limites de f en 0, en 1 et en $+\infty$.
b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. On admet que f est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
a) Démontrer que $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation de f .
3. Démontrer que $(\alpha) = \frac{1-\sqrt{e}}{e}$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

4. Construire la courbe (C) . On prendra $\alpha \simeq 0,5$

Partie C

Soit h la restriction de f à $]1; +\infty[$

- Démontrer que h est la bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.
- On note h^{-1} la bijection réciproque de h et (Γ) sa représentation graphique.
 - Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
 - Calculer $h(e)$; $h^{-1}(\frac{1-e}{e})$ et $(h^{-1})'(\frac{1-e}{e})$
 - Déterminer une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse $\frac{1-e}{e}$
- Construire (Γ) dans le repère que (C) .

PROBLÈME 11

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} \forall x > 0, g(x) = 1 - x \ln x \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

- Etudier la continuité de g en 0.
 - Etudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- Calculer la limite de g en $+\infty$.
- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in]e^{-1}; +\infty[$.
 - Justifier que : $1,7 < \alpha < 1,8$.
- Démontrer que :
$$\begin{cases} \forall x \in [0; \alpha], g(x) > 0 \\ \forall x \in [\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{3-x} \ln x$

(C_f) désigne sa représentation graphique dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; i; j)$ Unité graphique : 2cm

- Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- Vérifier que : $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right) \left(\frac{x}{e^x}\right) e^3$
 - En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
- Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{e^{3-x}}{x} g(x)$.
 - En déduire le sens de variations de f .
- Montrer que : $f(\alpha) = \frac{e^3}{\alpha e^{\alpha}}$.

- b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- c) Dresser le tableau de variations de f .
- 5. Construire (C_f) .
- 6. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; \alpha[$.
 - a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de départ, l'arrivée d'arrivée.
 - b) Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
 - c) Calculer $(h^{-1})'(0)$.

PROBLÈME 12

Partie A

On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$

Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $u(x) = (ax + b)e^x$.

2. a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

b) Montrer que v est une solution de l'équation (1) si et seulement si $u+v$ est une solution de l'équation (2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

3. Déterminer la solution f de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.

3. a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions réelles : 0 et α telle que $-1,6 < \alpha < -1,5$.

b) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie C : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; 1; j)$. (Unité : 4cm)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$.

b) En déduire les variations de f et dresser le tableau de f .

3. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à -10^{-2} près.

4. Tracer (C) .

Partie D : Calcul d'aire

Soit m un réel négatif.

1. Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \int_m^0 f(x) dx$

a) Calculer $\int_m^0 x e^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire la valeur de I .

2. Calculer la limite de I lorsque m tend vers $-\infty$.

PROBLÈME 13

L'objet de ce problème est la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x(x - (\ln x)^2) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; i ; j)$

Unité graphique 5cm.

Partie A

On considère la fonction h dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $h(x) = 2 - \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x}$

1. a) Calculer $h'(x)$ et étudier les variations de h .

b) En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) \geq 0$.

2. On considère la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $g(x) = 2x - 2 \ln(x) - (\ln x)^2$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

b) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = h(x)$.

c) Étudier les variations de g .

d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $0,1 < \alpha < 0,2$.

e) Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Montrer que f est continue en 0.

3. a) Étudier la dérivabilité de f en 0.

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

4. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement les résultats.

c) Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(-\alpha + 2 \ln(\alpha))$

5. a) On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Calculer $f'(x)$ et montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Partie C

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

2. Soit la fonction $k(x) = f(x) - (2x - 1)$

a) Vérifier que $k'(x) = g(x) - 2$ et que $k''(x) = h(x)$

b) En déduire le sens de variation de k' . Calculer $k'(1)$ puis donner le signe de k' .

c) Dresser le tableau de variation de k puis donner le signe de k . (On ne calculera pas de limites).

d) En déduire la position relative de (C) et de la droite (T) .

3. Tracer (C) et (T) . On prendra $\alpha = 0,1$.

4. Soit la fonction q , restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

a) Montrer que q admet une bijection réciproque notée q^{-1} dont on précisera les ensembles de départ et d'arrivée.

b) Dresser le tableau de variation de q^{-1} .

c) Calculer $q(1)$, $q^{-1}(1)$ et $(q^{-1})'(1)$.

d) Construire la courbe de q^{-1} dans le même repère que (C) .

PROBLÈME 14

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1-x) + 1$.

1. Etudier le sens de variation de g .
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,27; 1,28]$. On note α cette solution.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0]$.

Montrer que $g(x) > 0$ sur $[0; \alpha]$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie B :

Etude la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$;
unités graphiques : 1cm l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Démontrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (d) dont on déterminera l'équation.
2. Etudier la position de (C_f) par rapport à (d).
3. a) Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans 1.
b) Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$
c) Dresser le tableau des variations de la fonction f .
4. Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α .

Partie C : Encadrement d'aire

Pour tout entier naturel n , tel que $n \geq 2$, on donne D_n , l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$, et on appelle A_n son aire, exprimée en unité d'aire.

1. Faire apparaître D_n sur la figure.

PROBLÈME 15

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{1-x} + \ln |x|$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; 1 ; 1)$ d'unité 2cm.

Partie A (Etude d'une fonction auxiliaire)

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = xe^{1-x}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1-x)e^{1-x}$.
3. Déterminer les variations de g puis dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 1$.

Partie B (Etude de la fonction f)

Soit $f(x) = e^{1-x} + \ln |x|$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
2. Calculer la limite de f en 0.
En déduire une interprétation graphique du résultat.
3. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Interpréter graphiquement les résultats.

4. a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1-g(x)}{x}$.
b) En déduire le signe $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
5. Déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variation.
6. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que $0,08 < \alpha < 0,09$ et $-0,06 < \beta < -0,05$.
b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
c) Construire (C) avec précision.

Partie C

1. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $U_n = \int_n^{n+1} e^{-x} dx$ et $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$.
a) Démontrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Exprimer U_n puis S_n en fonction de n .
2. a) Démontrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
b) Démontrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{e}$.
c) Les suites $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(S_n)_{n \geq 1}$ sont-elles convergentes ? Justifier votre réponse.
3. Soit $(V_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $V_n = \int_1^{n+1} \ln |x| dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (n+1) \ln(n+1) - n$$

b) La suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

PROBLÈME 16

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x + 1 - (x+2) \ln|x+2|, x \neq -2 \text{ et } g(-2) = -1.$$

1. a) Démontrer que g est continue en -2 .

b) Étudier la dérivabilité de g en -2 . Interpréter graphiquement le résultat.

2. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Calculer $g'(x)$ pour $x \neq -2$, étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

4. a) Démontrer que pour $x \neq -1$, g s'annule en une valeur α comprise entre $-5,6$ et $-5,5$.

b) En déduire que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -2$ par :

$$f(x) = \frac{\ln|x+2|}{x+1} \text{ si } x \neq -1 \text{ et } f(-1) = 1.$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan du repère orthonormé $(O; 1; 1)$.

Unité graphique 2cm.

1. Démontrer que f est continue en -1 .

2. On suppose que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Démontrer que f est dérivable en -1 .

3. a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

b) Calculer la limite de f à droite et à gauche en -2 . Interpréter graphiquement les résultats.

4. a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x)$ et $\frac{g(x)}{x+2}$ ont le même signe.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$.

Partie C

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -1 .

2. On pose $h(x) = x^2 - 1 + 2 \ln(x+2)$ pour $x > -2$.

- a) Etudier le sens de variation de h .
 - b) Calculer $h(-1)$. En déduire le signe de h .
 - c) Démontrer que (C_f) est au-dessus de la tangente (T) pour $x > -2$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et de l'axe des abscisses.
 4. Tracer (T) et (C_f) .

PROBLÈME 17

Partie A

On considère la fonction g de la variable réelle x définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = 1 - x - 2\ln x$.

- 1) Calculer $g(1)$.
- 2) Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$.
- 3) Etudier les variations de g et en déduire son tableau de variation.
- 4) Démontrer que : $\forall x \in]0, 1[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction h de la variable réelle x définie pour tout $x > 0$ par $h(x) = 2 + x - x^2 \ln x$.

1. Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$ et en déduire que h est prolongeable par continuité en 0.

Soit la fonction f de représentation graphique (C) dans le plan muni du repère orthogonal $(O; i; j)$ d'unités 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x) & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 2. \end{cases}$$

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire l'interprétation graphique correspondante
4. a) Démontrer que f est dérivable en 0.
b) En déduire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
5. Démontrer que $\forall x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$ et étudier les variations de f .
6. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2,2 < \alpha < 2,3$.
7. Tracer (T) puis la courbe (C) .

Partie C

Soit k la fonction définie pour tout $x \geq 1$ par $k(x) = \frac{x^3}{3} \left(-\frac{1}{3} + \ln x \right)$.

1. Déterminer $k'(x)$ où k' est la dérivée de la fonction k .
2. En déduire une primitive de f sur $[1; +\infty[$.
3. Démontrer que $g(\alpha) = -\frac{4}{\alpha} - \alpha - 1$

PROBLÈME 18

Dans tout le problème on admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout entier naturel n .

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1. a) Calculer la limite de g en $+\infty$.
b) Vérifier que $g(x) = 1 - (1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2 e^{-x}$ pour tout nombre réel $x \neq 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.
2. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Calculer la dérivée g' de g et vérifier que $g'(x) = (x - 2)^2 e^{-x}$.
b) En déduire le signe de $g'(x)$.
3. Etablir le tableau de variation de g .
4. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.
b) On désigne par α cette solution.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .
5. Déduire de ce qui précède que :
 $\forall x \in]-\infty; \alpha[; g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

1. a) Vérifier que $f(x) = x \left[1 - \frac{1}{x} + (x + \frac{2}{x})e^{-x} \right]$ pour tout réel $x \neq 0$.
En déduire la limite de f en $-\infty$.
b) Calculer la limite de f est dérivable en $+\infty$.
2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = g(x)$ pour tout x réel.
3. En déduire, à l'aide de la partie A, les variations de f et donner son tableau de variation.
4. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.
5. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
b) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ) .
6. Donner une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.
7. Tracer (Δ) , (T) puis (C) .

PROBLÈME 19

Le but du problème est l'étude de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln(x)-1}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; I; J)$.

Unité : 2 cm

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln(x)$

1. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble définition.
2. Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$.
b) Vérifier que $1,86 < \alpha < 1,87$
c) Montrer que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

1. a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Déterminer la dérivée f' de f et montrer que pour tout élément x de $]0; +\infty[, f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. En déduire le sens de variation de f .
2. a) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha}$.
b) Déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2.10^{-1} .
3. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote à la courbe (C).
b) Déterminer le point A, intersection de (D) et (C).
c) Étudier la position de (C) par rapport à (D).
4. a) Calculer $\ln(e\sqrt{e})$.
b) Déterminer le point B de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
5. Construire (D), (T) et (C).

Partie C :

1. Soit $h: x \mapsto 2 \frac{\ln x}{x}$ et $u: x \mapsto \ln x$

Exprimer h en fonction de u et u' . En déduire une primitive de h sur $]0; +\infty[$.

2. Donner une primitive F de f sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = e$ et $x = \sqrt{e}$.

PROBLÈME 20

On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique 2cm.
Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x + \frac{\ln|x|}{|x|}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère donné.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$ et h la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ par $h(x) = x^2 - 1 + \ln(-x)$.

1. a) Calculer la dérivée de la fonction g et déterminer le signe de cette dérivée.
Dresser le tableau de variations de la fonction g . (On ne demande pas de calculer les limites de g).
- b) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.
2. a) Calculer la dérivée de la fonction h et déterminer le signe de cette dérivée.
Dresser le tableau de variation de la fonction h . (On ne demande pas de calculer les limites de h).
- b) Calculer $h(-1)$ et montrer que $\forall x \in]-\infty; -1[, h(x) > 0$; $\forall x \in]-1; 0[, h(x) < 0$.

Partie B

1. a) Calculer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ puis interpréter les graphiquement.
- b) Calculer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .
- b) Etudier les positions relatives de (C) et (D) . (On précisera les coordonnées des points d'intersection de (C) et (D)).
3. a) Vérifier $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ et $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- b) Etudier le sens de variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.
- b) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
5. Construire la courbe (C) .
6. a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- b) En déduire la primitive de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

PROBLÈME 21**Partie A**

Soit g la fonction dérivable et définie de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln|x| - \frac{2}{x}$.

1. a) Démontrer que pour tout nombre réel x non nul, $g'(x) = \frac{x+2}{x^2}$.

b) En déduire les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites).

2. a) Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

b) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x}{e^x + (\ln|x|)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) . (L'unité graphique est 4 cm).

1. a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique de chacun des résultats.

2. a) Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire que (C) admet une tangente à l'origine que l'on précisera.

b) Pour tout nombre réel x différent de zéro, démontrer que :

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)g(x)}{(e^x + (\ln|x|)^2)^2}$$

avec $\varphi(x) = e^x \ln|x|$.

c) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4e^{-\alpha}}$ et en déduire que : $0 < f(\alpha) < 1$.

d) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le tableau de variation de f .

3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$.

4. Tracer la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C).

PROBLÈME 22

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x - (1+x)e^x$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. a) Montrer l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,79 < \alpha < 0,80$.
b) On déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x + 1 - xe^x$

(On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 4cm)

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
b) Donner une interprétation graphique du résultat.
3. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$
b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que $f(\alpha) = e^\alpha + 4\alpha - 3$
5. a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
b) Etudier la position relative de (C) par rapport (Δ) .
6. a) Montrer que la droite $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions λ et β telles que $-1 < \lambda < 0$ et $1 < \beta < 2$.
b) Tracer (C) et (Δ) .

Partie C : Calcul d'aire

t est un nombre réel tel que $(t \leq 0)$.

On désigne par $A(t)$ l'aire de partie du plan délimitée par (C) , (Δ) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 0$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(t)$.
2. a) Déterminer la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.
b) Interpréter le résultat obtenu.

PROBLÈME 20

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique est 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne demandera pas de calculer les limites).
2. Justifier que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Déterminer la limite à droite en 0 de f puis interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote (C) en $+\infty$.
b) Préciser la position de (C) par rapport par (D) .
3. a) Démontrer que pour tout nombre strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y = 3x - 4$.
4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.
b) Justifier que : $1,3 < \alpha < 1,4$.

Partie C

On pose $\varphi(x) = f(x) - (3x - 4)$ et $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1. a) Déterminer le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.
b) Calculer $h(1)$ puis justifier que : $\forall x \in]0; 1[, h(x) > 0 ; \forall x \in]1; +\infty[, h(x) < 0$.
2. a) Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.
b) Etudier les variations de φ puis en déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x .
c) Déterminer la position de (C) par rapport à la tangente (T) .
3. Tracer la courbe (C) , la droite (D) et la tangente (T) . On prendra $\alpha = 1,35$

PROBLÈME 24

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 2[$ par $g(x) = 2 - (2 - x)\ln(2 - x)$.

1. Calculer les limites de g en 2 et en $-\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ et étudier le sens de variation de g .
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g .
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty; 2[$ et vérifier que $-0,4 < \alpha < -0,3$.
5. Dédire des questions précédentes que pour tout $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et pour tout $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 2[$ par : $f(x) = x(1 - \ln(2 - x))$

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique 2 cm.

1. a) Calculer les limites de f en 2 et en $-\infty$; interpréter graphiquement si possible les résultats obtenus.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. a) Démontrer que pour tout $x < 2$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2-x}$
b) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variation.
3. Justifier que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$
4. Calculer $f(0)$ et $f(2 - e)$.
5. Tracer dans le repère (O, I, J) la courbe (C) . (On prendra $\alpha \approx -0,35$)

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; 2[$

1. Justifier que h réalise une bijection de $[0; 2[$ sur un intervalle L à préciser.
2. Etablir le tableau de variation de h^{-1} , bijection réciproque de h
3. Représenter dans le même repère $(C_{h^{-1}})$ la courbe de la bijection réciproque de h .

PROBLÈME 25**Partie A**

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$.

1. a) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
b) Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f . (On ne demande pas de représentation graphique).
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique α .
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
b) Étudier le signe de $f(x)$ lorsque x décrit $]0; +\infty[$.

Partie B

La fonction g est définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x, \text{ pour tout réel } x > 0 \end{cases}$$

1. a) Étudier la continuité et la dérivabilité de g en $+\infty$.
b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Soit g' la dérivée de la fonction g .
Pour tout réel $x > 0$ calculer $g'(x)$, puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. a) En déduire que : si $x \in \left]0; \frac{1}{\alpha}\right]$, alors $g'(x) > 0$ et si $x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$, alors $g'(x) < 0$.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction g .
4. a) Donner les équations des tangentes à la courbe (Γ) représentative de g aux points d'abscisses 0 et 1.
b) Tracer (Γ) et ses tangentes.

PROBLÈME 26

Partie A

Soit la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x \ln x$;

1. a) Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 1 + \ln x$.
b) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites de g)
2. En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{x}{1+x \ln x} \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité : 4cm)

1. a) Etudier la continuité de f en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point 0 est : $y = x$.
d) Démontrer que :
(C) est au-dessus de (T) sur $]0; 1[$;
(C) est au-dessous de (T) sur $]1; +\infty[$.
2. Démontrer que la droite (OI) est asymptote à (C) en $+\infty$.
3. a) On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{(1+x \ln x)^2}$
b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

Partie C

1. a) Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \leq 1$
b) Démontrer que : $\forall x \in [1; e] , 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$.
2. Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) , (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Démontrer que : $16(e-1) + 16 \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$.

PROBLÈME 27

Dans ce problème, le plan est muni d'un repère (O, I, J) ; Unité : 1 cm. Les fonctions sont supposées dérivables sur leur ensemble de définition.

Partie A :

On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, et (C_g) sa représentation graphique.

1. Démontrer l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$.
2. a) Démontrer que pour tout nombre réel x , $g'(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
b) Etudier les variations de g .
3. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et (C_f) sa représentation graphique.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que f est impaire.
3. En déduire la limite de f en $-\infty$.
4. En déduire la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
5. Pour tout nombre réel x , calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
7. Déterminer les positions relatives de (C_f) et (T) .
8. Tracer (C_f) et (T) .

Partie C :

1. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f . Exprimer $f^{-1}(x)$, pour tout nombre réel x .
3. Construire dans le repère (O, I, J) , en utilisant une couleur différente de celle utilisée pour (C_f) , la représentation graphique (C') de f^{-1} en indiquant la méthode de construction.
4. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, (C_f) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

PROBLÈME 28**Partie A**

On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = 2(x - 2) \ln(2 - x) + x - 2 \text{ si } x \in]-\infty; 2[\text{ et } g(2) = 0$$

1. Etudier la continuité de g en 2.
2. a) Déterminer les limites de g aux bornes de ensemble de définition.
b) Etudier le sens de variation de g .
c) Dresser le tableau de variation de g .
3. a) Calculer $g(2 - \frac{1}{\sqrt{e}})$.
b) En déduire que :

$$\forall x \in]-\infty; 2 - \frac{1}{\sqrt{e}}[, g(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]2 - \frac{1}{\sqrt{e}}; 2[, g(x) > 0$$

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[, f(x) = (x - 2)^2 \ln(2 - x) - 4 \\ \forall x \in]2; +\infty[, f(x) = (x^2 - 4x)e^{x-2} \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est dérivable à gauche en 2.
b) Vérifier que $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$.
c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2} = 1$
d) En déduire que f est dérivable à droite en 2.
e) f est-elle dérivable en 2 ?
2. a) Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 2[, f'(x) = g(x)$ et $\forall x \in]2; +\infty[, f'(x) = (x^2 - 2x - 4)e^{x-2}$
b) Etudier le sens de variation de f .
c) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
d) Dresser le tableau de variation de f .
3. On désigne (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J) . Et soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1[$.
a) Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 1[$ vers un intervalle K à préciser.
b) Soit h^{-1} la réciproque de h .
 h^{-1} est-elle dérivable en -4 ? Si oui, calculer alors $(h^{-1})'(-4)$.
c) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(C_{h^{-1}})$ au point d'abscisse -4 .
d) Construire les courbes (C) , $(C_{h^{-1}})$ et la droite (T) dans le même repère.

Partie C :

Soit le nombre réel a tel que : $2 - \frac{1}{\sqrt{e}} < a < 2$.

1. Calculer l'aire $A(a) = \int_{2-\frac{1}{\sqrt{a}}}^a f(x)dx$ et déduire $\lim_{a \rightarrow 2} A(a)$
2. Montrer que la fonction $F(x) = (x^2 - 6x + 6)e^{x-2}$ est une primitive de f sur $]2; +\infty[$
3. Calculer l'aire en cm^2 du domaine limité par les droites d'équations $x = 2, x = 4$ l'axe (OI) et la courbe (C) .
4. En déduire l'aire en cm^2 du domaine limité par les droites d'équations $x = 4, x = 2 - \frac{1}{\sqrt{e}}$, l'axe (OI) et la courbe (C) .

PROBLÈME 29

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ de représentation graphique (C) donnée sur la feuille annexe.

On admet que f est définie sur $]0; +\infty[$ par
$$\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = 2x(a(\ln x)^2 + b \ln x + c) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a) Calculer en fonction de a, b et c , la dérivée de la fonction f .
b) Déterminer, à l'aide du graphique, les valeurs de :
 $f'(\frac{1}{e}), f'(\sqrt{e})$ et $f(e)$
c) En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = 2x(2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2)$
2. a) Justifier que : $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0$ et en déduire que f est continue en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
3. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2(1 + \ln x)(-1 + 2 \ln x)$
c) Etudier le signe $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
d) Dresser le tableau de variation f .

Partie B

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{e^{2x}-1}$.

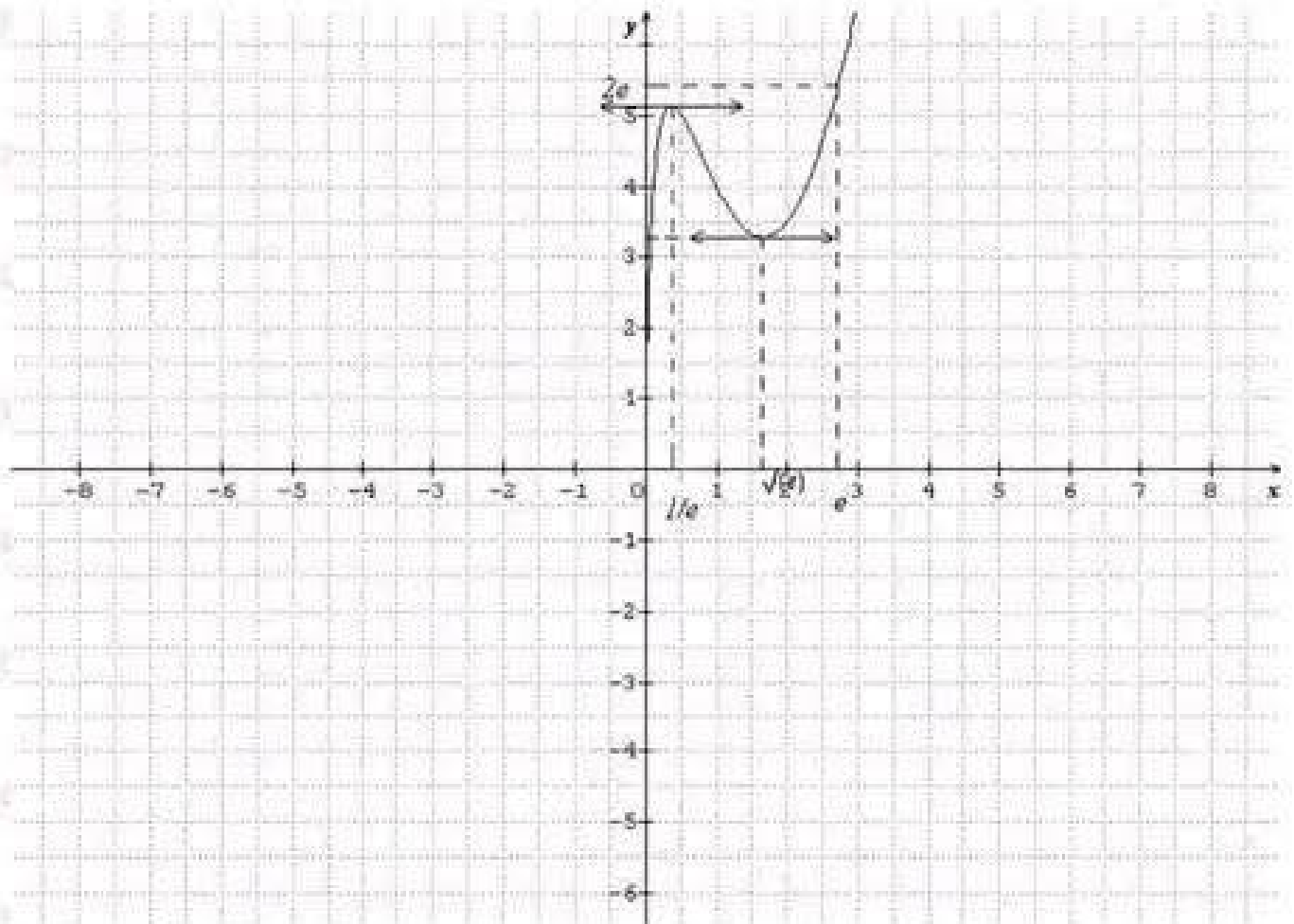
On note (C_g) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 2cm

1. a) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
b) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, e^{2x} - 1 > 0$.
c) Calculer $g'(x)$
d) Etudier le sens de variations de g et dresser son tableau de variations.
2. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.
On admet que h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
a) Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1; 0,3[$.
b) Etudier le signe de $h(x)$ et déduire la position relative de (C_f) et (C_g) .
3. a) Construire (C_g) sur la feuille annexe.

4. a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} - 1$.

b) En déduire une primitive G de g sur $]0; +\infty[$.

c) Calculer l'aire A , en cm^2 , de la partie du plan délimitée par (C_g) , l'axe (OI) et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = 1$. (Annexe à réaliser)



PROBLÈME 30

Partie A : Résolution d'une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle $(E') : f' + f = \left(\frac{e-1}{2}\right)x^2 + (e-2)x - 1$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : f' + f = 0$.
2. Déterminer un polynôme P du second degré solution de l'équation différentielle (E') .
3. Montrer qu'une fonction numérique f est une solution de l'équation différentielle (E') si et seulement si la fonction numérique $f - P$ est solution de l'équation différentielle (E) .
4. Démontrer que les solutions de l'équation différentielle (E') sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-x} + \left(\frac{e-1}{2}\right)x^2 - x ; k \in \mathbb{R}$.
5. Trouver la solution f de l'équation différentielle (E') telle que $f(0) = 1$.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire g et de la fonction f .

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + \left(\frac{e-1}{2}\right)x^2 - x$

On note (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où $OI = 2$ cm et $OJ = 4$ cm.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -e^{-x} + (e-1)x - 1$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Etudier le sens de variation de g .
b) Dresser le tableau de variation de g .
3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Vérifier que $0,8 < \alpha < 0,9$ puis déduire la valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. Montrer que $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.
5. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
6. a) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
7. a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} , f'(x) = g(x)$.
b) En déduire le sens de variation de f .
c) Dresser le tableau de variation de f .
8. a) Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe (OI) puis donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'ordonnée 1.
b) Tracer la courbe (C_f) ainsi que la tangente (T) .
c) Calculer à 10^{-2} près l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) l'axe des abscisses (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

PROBLÈME 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) avec $OI = 2\text{cm}$

Partie A

Soit h la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{2x^2}{(x^2+1)^2} + \ln(x^2 + 1)$.

1. Calculer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{-2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$
3. Etudier le sens de variation h et dresser son tableau de variation.
4. a) Justifier que sur $]0; +\infty[$ l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .
b) Montrer que $1,98 < \alpha < 1,99$.
5. a) Etudier la parité de h . En déduire que $-\alpha$ est une racine de h .

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -\alpha[\cup]\alpha; +\infty[, h(x) > 0. \\ \forall x \in]-\alpha; 0[\cup]0; \alpha[, h(x) < 0. \\ \forall x \in \{-\alpha; 0; \alpha\}, h(x) = 0. \end{cases}$$

Partie B

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{3x} \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ et (C_g) est

sa courbe représentative dans (O, I, J) .

1. Montrer que g est impaire
2. a) Calculer la limite à droite de g en 0. (On pourra poser $X=x^2$)
b) En déduire la limite à gauche de g en 0 et que g est continue en 0.
3. a) Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = \frac{1}{3}$
b) Donner une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 0.
4. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{2\ln|x|}{3x} + \frac{1}{3x} \ln(1 + \frac{1}{x^2})$.
b) En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de g .
c) Interpréter graphiquement ces limites.
5. a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{-h(x)}{3x^2}$
b) Déterminer le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
c) Justifier que $g(\alpha) = \frac{2\alpha}{3(\alpha^2+1)}$ puis en déduire $g(-\alpha)$ en fonction de α .
d) Déterminer $g([-1; 2])$
6. Construire (T) et (C_g) . On prendra $\alpha = 1,98$.
7. a) Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, \frac{2\ln x}{x} \leq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \leq \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln 2}{x}$.
b) En déduire que : $\frac{2}{3e} \leq g(e) \leq \frac{2+\ln 2}{3e}$.
8. Soit f la restriction de g à l'intervalle $K =]-\alpha; 0[$.
a) Justifier que f réalise une bijection de K sur un intervalle L à préciser.
b) Calculer $f(-1)$ puis justifier que la réciproque f^{-1} de f est dérivable en $\ln(\sqrt{2})$.

PROBLÈME 32

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 4cm

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ par :

$$g(x) = \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{x-1}$$

$$1. a) \text{ Montrer que : } \begin{cases} \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[, g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \\ \text{si } x \in]-1; 0[, g(x) = \ln \left(-1 - \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \end{cases}$$

b) Déterminer les limites de g en $-\infty$, $+\infty$ et en 0. (On admettra que la limite de g en -1 à gauche est égale à $+\infty$ et la limite de g en -1 à droite est égale à $-\infty$)

$$2. a) \text{ Démontrer que } \forall x \in Dg, g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $\left] \frac{-1}{2}; \frac{-1}{8} \right]$.

b) Dédurre des questions précédentes que :

$$\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]\alpha; 0[\cup]0; +\infty[, g(x) \geq 0 \\ \text{si } x \in]-1; \alpha[, g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B : Etude de la fonction principale f .

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et on note (C) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J)

1. a) Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue.

b) Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et -1 . (On pourra poser $X = \frac{1}{x}$)

c) Préciser les asymptotes de (C) .

2. a) Démontrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement résultat.

3. a) Vérifier que $\forall x \in Dg \setminus \{0\}, f'(x) = g(x)$.

b) Démontrer que $(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha+1}$, α étant le réel défini dans la partie A - 3)

c) Etudier le sens de variation de f ; puis donner le tableau de variation de f .

4. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec la droite (OI) .

b) Donner une équation de la tangente (T) , (C) au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

5. Construire avec soins (T) , (C) et ses asymptotes. On prendra $\alpha = -0,25$ et $f(\alpha) = -0,4$.

PROBLÈME 33**Partie A**

On considère la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 3 + \ln x$

1. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de g .
2. a) On admet que g est dérivable sur $]0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $2,20 < \alpha < 2,21$
b) Démontrer que $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2-2x}{x} + \frac{x-1}{x} \ln x$ de courbe (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité : 2 cm)

1. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement résultat.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. En remarquant que $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(-2 + \ln x)$, déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
5. Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
6. Démontrer que $\alpha = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
7. Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
8. Construire (C) avec ses asymptotes et (T) .

Partie C

Soit F la primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère (O, I, J) .

1. a) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0; +\infty[$.
b) Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 .
2. a) x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\int_1^x \ln t dt$ (On pourra utiliser une intégration par parties).
b) Démontrer que, pour tout x strictement positif $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$.
c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x .
3. a) Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$ déterminer la limite de F en 0.
b) Démontrer que, pour tout x strictement supérieur à 1,

$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x} \right) + 3$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de F .

d) Tracer (Γ) sur le même graphique que (C) .

4. Calculer en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e^2$.

PROBLÈME 34

Partie A

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = 4e^{-x} - (1 + e^{-x})^2$

1. Etudier les variations de g . (On ne calculera pas de limites aux bornes de son ensemble de définition).

2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. On admet que f est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{4(1+e^{-x})^2}$

b) Etudier le sens de variation de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Calculer $f(0)$ puis étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie C

On considère la fonction numérique h définie par : $h(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 4cm)

1. Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition, puis interpréter graphiquement les résultats.

2. Montrer que le point $S(0; \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de la courbe (C_h) .

3. Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.

4. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C_h) au point S .

5. Etudier les positions relatives de la courbe (C_h) par rapport à la tangente (T) .

6. Justifier que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K à préciser.

Soit h^{-1} la bijection réciproque de h .

a) Justifier que h^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et calculer $(h^{-1})'(\frac{1}{2})$.

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1} .

c) Justifier que la courbe $(C_{h^{-1}})$ admet des asymptotes dont on précisera la nature et les équations.

d) Déterminer l'expression explicite de h^{-1} .

7. Construire les courbes (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ et leurs asymptotes respectives dans le même repère.

PROBLÈME 35

Partie A

a, b et c sont des nombres réels. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$h(x) = (ax + b)e^{-x} + c$ dont le tableau de variation se présente comme suit :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$h'(x)$		+		0	-
$h(x)$	$-\infty$	1	2	$2 + e^{-2}$	2

1. On note h' la dérivée de h . Calculer $h'(x)$ en fonction de a et b .

2. En utilisant les données numériques du tableau de variation de h .

a) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que $a = 1, b = -1$ et $c = 2$.

Ainsi donc dans la suite du problème $h(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$.

3. a) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1; 0[$.

b) En déduire le signe de $h'(x)$

Partie B

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f par $f(x) = 2x - 1 - xe^{-x}$.

(Unité : 2 cm)

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

c) Préciser les positions de (C_f) par rapport à (D) .

2. Calculer les limites en $-\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

3. a) Démontrer que $f'(x) = h(x)$

b) Donner le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f .

4. a) Démontrer que $(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$.

- b) Donner l'arrondi d'ordre 1 de $f(\alpha)$. (On prendra $\alpha \simeq -0,375$)
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
6. Tracer (T) , (D) et (C_f) .

Partie C

1. a) Déterminer les nombres réels m et p de sorte que la fonction G définie par $G(x) = (mx + p)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x) = -xe^{-x}$.
- b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit A l'aire en cm^2 du domaine Δ délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et des droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.
- a) Faire apparaître Δ sur la figure.
- b) Calculer A .

PROBLÈME 36

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm. On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty; 1[$ par $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1 - x)$.

On note (C) la courbe représentative de f .

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
- c) Calculer la limite de f à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.
2. a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, calculer $f'(x)$.
- b) Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.
- c) Dresser le tableau de variation de f .
3. a) Démontrer que l'équation $(E): x \in]-\infty; 1[, f(x) = 0$ admet une solution unique α .
- b) Justifier que $-0,7 < \alpha < -0,6$.
4. a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$.

b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-1	-	-0,1	-0	-0,1	0,2	0,1	0,7
arrondi d'ordre 1	4,	2,	0,	0,	-0	-0	-1	-1	-1

Tracer (T) et (C) .

On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$.

5. On désigne par A l'aire de la partie du plan délimité par (C) , la droite de (O, I) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

a) Calculer $\int_{\alpha}^0 \ln(1-x) dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) Démontrer que la valeur de A en unités d'aire est : $A = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$.

c) Déterminer en cm^2 l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour $\alpha = -0,65$.

6. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère (O, I, J) .

a) Calculer $f(-1)$.

b) Démontrer que le nombre dérivée de f^{-1} en $\ln 2$ existe puis le calculer.

c) Construire la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse $\ln 2$ sur la figure de la courbe (C) .

PROBLÈME 37

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + e^{-2x}$

1. Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. On ne calcule pas les limites

2. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq \frac{1+\ln(2)}{2}$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - e^{-2x}$ et sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 4cm)

1. a) Déterminer la limite de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ces résultats.

2. a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2g(x)$

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet unique solution α .

d) Justifier que $0,56 < \alpha < 0,57$

e) Démontrer que $\frac{\ln(\alpha)}{\alpha} = -1$

3. Soit (D) la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{\ln 2}{2}$. Déterminer une équation de (D) .

Partie C

1. Soit la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$, et définie par : $h(x) = f(x) - \frac{(\ln 2)^2}{4} + \frac{1}{2} - (1 + \ln 2)(x - \frac{\ln 2}{2})$

a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 2g(x) - (1 + \ln 2)$

b) Étudier le sens de variation de h .

c) Calculer $h(\frac{\ln 2}{2})$ puis déduire la position relative de (C) par rapport à (D) .

2. Construire (C) et (D) .

3. Soit un nombre réel supérieur ou égal à α .

a) Calculer en cm^2 l'aire $A(t)$ de la partie délimitée par la courbe (C) , l'axe (OI) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(t)$

PROBLÈME 38

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) avec $OI=2\text{cm}$ et $OJ=0,5\text{cm}$

Partie A

Soit g la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \ln|x+1|$

1. Calculer les limites de g à droite en -1 et en $-\infty$.
2. a) Justifier que pour tout nombre réel x différent de -1 , on a : $g'(x) = \frac{x(2x+3)}{(x+1)^2}$
 b) Déterminer les signes de $g'(x)$ selon les valeurs de x .
 c) Dresser le tableau de variation de g . (On ne calculera pas les autres limites aux bornes de D_g)
 d) En déduire que : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; -1[; g(x) < -3 \\ \text{pour } x \in]-1; +\infty[; g(x) > 2 \end{cases}$
3. Soit k la restriction de g à l'intervalle $]0; +\infty[$.
 a) Justifier que k admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition
 b) Prouver que k^{-1} est dérivable en 2012.
4. Soit u la fonction définie sur $]-\infty; -1[$ par $u(x) = (x+1)\ln(-x-1)$
 a) Calculer $u'(x)$ et montrer que pour tout réel $x < -1$, on a : $g(x) + u'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$
 b) En déduire sur $]-\infty; -1[$, la primitive G de la fonction g telle que $G(-2) = 1$

Partie B

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \ln|x+1| - (x+1)^2 + 2x$ de courbe représentative (C_f) et (D) la droite d'équation $x+1=0$; dans le repère (O, I, J) .

1. a) Préciser l'ensemble de définition de f et justifier que (D) est une asymptote à (C_f) .
 b) Calculer les limites en $-\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.
2. a) Justifier que pour $x > -1$, $f(x) = -x(x+1) \left[\frac{x+1}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right]$
 b) En déduire le calcul des limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel x différent de -1 , on a : $f(x) = -g(x) + 2$

b) Vérifier que la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses (Ox) .

c) Prouver que f est croissante sur $]-\infty; -1[$ et décroissante sur $]-1; +\infty[$.

c) Prouver que f est croissante sur $]-\infty; -1[$ et décroissante sur $]-1; +\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de f .

4) a) Vérifier que sur $]-1; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution β et que $-0,9 < \beta < -0,8$.

b) Prouver que $f'(\beta) = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta^2}{\beta+1}$ et que $f'(\beta) < 0$.

PARTIE C

Soit t la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $t(x) = x[-1 + \ln|x+1|]$ et (Γ) la parabole d'équation $y = -x^2 + x - 1$.

1. Justifier que pour x différent de -1 : $\ln|x+1| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1 - e] \cup [e - 1; +\infty[$.

2. En déduire les signes de $t(x)$ selon les valeurs de x .

3. Étudier alors les positions relatives des courbes (Γ) et (C_f) .

4. a) Étudier le sens de variation de la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = -x^2 + x - 1$.

b) Dresser son tableau de variation.

5) Tracer dans le repère (O, I, J) les droites (T) , (D) et les courbes (Γ) et (C_f) .

PROBLÈME 39

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)$

Partie A

On désigne par h la fonction numérique définie par $h(x) = x - \ln(1+x)$

1. a) Déterminer le domaine de définition de h .
b) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
2. a) Etudier le sens de variation de h
b) Dresser le tableau de variation de h .
3. En déduire le signe de h .

Partie B

1. a) Quel est l'ensemble de définition de f .
b) Déterminer les limites de f respectivement en $+\infty$ et en -1 .
2. a) Montrer que f peut être prolongée par continuité au point -1 .
b) Soit k ce prolongement, étudier la dérivabilité de k en -1 .
3. a) Montrer que f peut être prolongée par continuité au point 0 .
b) Soit g ce prolongement, étudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 .
4. a) Exprimer la dérivée $g'(x)$ de $g(x)$ en fonction de $h(x)$
b) Dresser alors le tableau de variation de g .
5. Construire (C_g) la courbe de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

PROBLÈME 40**Partie A**

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x+1-\ln x}{2x+1}$

1. Etudier le sens de variation de g (dérivée, limites, tableau de variation).
2. Calculer $g(1)$ et $g(2)$; en déduire que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α .
Montrer que α appartient à l'intervalle $]1,8; 1,9[$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$.

On note (C) , la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unité : 2cm sur (Ox) ; 4cm sur (Oy))

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2(2x+1)g(x)}{(x^2+x)^2}$

En déduire le signe de $f'(x)$.

2. Construire le tableau de variation de f et montrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.

3. Tracer la courbe (C) dans le repère orthogonal. (Préciser la tangente au point d'abscisse 1).

PROBLÈME 41

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire g)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 2 - 2x \ln x$

1. Justifier que l'ensemble des solutions de l'équation : $-2 \ln x - 1 \geq 0$ est $S =]0; e^{-\frac{1}{2}}]$

2. a) Calculer $g'(x)$.

b) Etudier les variations de g .

3. a) Etablir le tableau de variation de g . (On ne cherchera pas à calculer les limites de g)

b) En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$

Partie B : (Etude et représentation graphique d'une fonction f)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = (x-1)^2 - x^2$ si $x \in]0; +\infty[$ et $f(0) = 1$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2cm.

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Justifier que la courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

2. a) Justifier que f est continue en 0.

b) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$

3. Soit (T) est la droite d'équation $y = -2x + 1$ et d la fonction sur $]0; +\infty[$ par :
 $d(x) = f(x) - y$

a) Justifier que (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[, d(x) = x^2 - x^2 \ln x$

c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (T) .

4. a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f .

5. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$

b) Vérifier que $\alpha = 1$ et vérifier que $f(x) \geq 0$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq 0$ si $x \geq 1$.

6. Construire (C) et (T) .

Partie C : (Etude d'une primitive F d'une restriction de la fonction f)

Soit F la primitive de f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en e (On ne cherchera pas à déterminer F)

1. Déterminer $F(e)$ et $F'(x)$. (On justifiera chaque réponse).
2. Démontrer que F est une bijection de $[1; +\infty[$ vers $F([1; +\infty[)$.
3. Soit F^{-1} la réciproque de F calculer $F^{-1}(0)$.

PROBLÈME 42

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln x$

1. a) Déterminer les limites de g en 0 puis en $+\infty$.
b) Etudier les variations de g .
c) Dresser le tableau de variation de g .
2. a) Montrer la courbe de g coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α tel que $\alpha \in]0,2; 0,3[$
b) En utilisant la méthode de balayage, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
c) En déduire le signe de α suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est continue en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. a) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
b) En déduire le signe de $f'(x)$.
c) Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$.
4. Dresser le tableau de variation de f .

Partie C :

Soit la courbe (C) de f dans un repère orthonormal $(O; i; j)$ d'unité 4cm et (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

1. Donner une équation de (T) .
2. On considère φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = f(x) - 2(x - 1)$.
a) Montrer que $\varphi''(x) = f''(x) = \frac{4h(x)}{(x+1)^3}$ où $h(x) = -x + \frac{1}{x} - 2\ln x$

- b) Etudier les variations de h .
- c) Calculer $h(1)$ puis en déduire le signe de h puis le signe de φ'' .
- d) Dresser le tableau de variation de φ' puis en déduire le signe de φ' .
- e) Dresser le tableau de variation de φ en déduire la position de (C) par rapport à (T) .

Partie D

On prendra $\alpha \approx 0,28$.

1. Calculer les images par f de : 0,1; 0,28; 0,5; 1; 1,5 et 2.
2. Tracer la portion de (C) pour $x \in [0; 2]$; (T) et la tangente en α de la courbe (C) .
3. a) Calculer $f(1)$.
b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ?
c) Calculer $(f^{-1})(0)$.
d) Donner une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point $K(0; 1)$.

PROBLÈME 43

Soit la fonction dérivable sur $]1; +\infty[$ et définie par : $f(x) = 2 + \frac{\ln(x-1)}{x^2}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) . L'unité graphique est 2cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $]1; +\infty[$ et définie par : $g(x) = \frac{x}{x-1} - 2 \ln(x-1)$.

1. a) Calculer la limite de g à droite en 1.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
2. a) Démontrer que pour tout nombre réel, $g'(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$.
b) Déterminer le sens de variation de g .
c) Dresser le tableau de variation de g .
3. a) Démontrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution α .
Vérifier que : $3,093 < \alpha < 3,094$.
b) Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]1; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote à (C_f) .
2. Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de (C_f) et de (D) .
3. Démontrer que pour tout nombre réel x strictement supérieur à 1, $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$.

4. a) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f .

b) Dresser le tableau de variation de f .

5. α étant le nombre réel défini à la question 5 de la partie A,

a) Démontrer que : $f(\alpha) = 2 + \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)}$.

b) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à $2 \cdot 10^{-3}$ près par défaut.

6. Tracer la courbe (C_f) .

Partie C

Soit β un nombre réel appartenant à l'intervalle $]1; 2[$.

On désigne par $A(\beta)$ l'aire de la partie (E) délimitée par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = \beta$ et $x = 2$.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x différent de 0 et 1

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1},$$

2. Exprimer $\int_{\beta}^2 \frac{1}{x(x-1)} dx$ en fonction de β .

3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $A(\beta) = \frac{(\beta-1)\ln(\beta-1)}{\beta} - \ln\beta + \ln 2$.

4. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} A(\beta)$.

PROBLÈME 44

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}.$$

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm). On note (C) la courbe représentative de f dans $\mathcal{P}$.

1. Etude d'une fonction auxiliaire

On introduit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 3 - 2\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de $g(x)$. (Limite aux bornes de D_g ; dérivée, sens de variation)

b) Dresser le tableau de variation de g .

c) Montrer que $g(x) > 0, \forall x \in]0; +\infty[$.

2. Etude de la fonction f .

a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

En déduire le sens de variations de f .

b) Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$. (On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$). Quelle est la conséquence graphique ?

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.

d) Montrer que (C) et (D) se coupent au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

Etudier la position relative de (C) et (D) .

3. Courbe représentative de f .

Dresser le tableau de variation de f .

Après avoir recopié, complété le tableau suivant. (On donnera les valeurs de $f(x)$ sous forme décimale approchée à 10^{-2} près.

x	0,5	1	$\sqrt{e}$	e	5
$f(x)$					

Tracer (C) et (D) .

4. Calcul d'une aire

a) Soit K la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $K(x) = (\ln x)^2$

Calculer $K'(x)$.

PROBLÈME 45

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. (unité graphique : 4cm)

Partie A:

Soit la fonction g définie sur $]-\infty; 0[$ par $g(x) = x + 1 + \ln(-x)$.

1. Etudier les limites de g aux bornes de D_g .

2. Dresser le tableau de variation de g puis calculer $g(-1)$

3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B:

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) ; \text{ si } x \in]-\infty; 0[\\ f(x) = (e^x - 1) \ln(e^x - 1) ; \text{ si } x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 et (C) la

courbe représentative.

1. a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en donner une interprétation graphique.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en donner une interprétation graphique.

3. a) $\forall x \in]-\infty; 0[$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) $\forall x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x)$ a le même signe que $1 + \ln(e^x - 1)$

c) Résoudre l'équation $\forall x \in]0; +\infty[$, $\ln(e^x - 1) > 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

- d) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. a) Prouver que (C) coupe la droite (OI) en deux points dont on précisera les coordonnées.
- b) Construire (C) .
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left] \ln \left(1 + \frac{1}{e} \right); +\infty \right[$.
- a) Montrer que h est une bijection de $\left] \ln \left(1 + \frac{1}{e} \right); +\infty \right[$ sur un intervalle K à préciser.
- b) Dresser le tableau de variation de h^{-1} dans le même repère que (C) .
6. Soit u la fonction définie de $] -\infty; 0[$ par $u(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln(-x) - \frac{1}{2} \right)$
- a) Calculer la fonction dérivée de u .
- b) En déduire la primitive de f sur $] -\infty; 0[$ qui s'annule en -1 .

Partie C

- Soit la fonction v définie sur $[\ln 2; 1]$ par : $v(x) = f(x) - (e^x - 1)$.
- Justifier que $\forall x \in [\ln 2; 1]$, on a $e^x - 1 > 0$.
 - Prouver que $\forall x \in [\ln 2; 1]$, on a : $-1 \leq \ln(e^x - 1) - 1 \leq \ln \left(1 - \frac{1}{e} \right)$.
 - Déduire de ce qui précède le signe de $v(x)$ sur $[\ln 2; 1]$.
 - Justifier que $\forall x \in [\ln 2; 1]$; $f(x) \leq e^x - 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

PROBLÈME 46

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{(x-1)^2 \ln x}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + \frac{x-1}{x+1}$.

- Démontrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- Dresser le tableau de variation de g . (sans les limites aux bornes)
- a) Calculer $g(1)$.
- b) Démontrer que : $\forall x \in]0; 1[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $g(x) > 0$

Partie B:

- Calculer la limite de f à droite en 0. En donner une interprétation graphique.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

3. a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{(x^2-1)g(x)}{x^2}$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x puis dresser le tableau de variation de f .

4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α .

b) Vérifier que : $2,64 < \alpha < 2,65$.

c) Démontrer que : $\forall x \in]0; \alpha[, f(x) < 1$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) > 1$.

5. a) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

b) Déterminer les positions relatives de (C) et de l'axe des abscisses.

6. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère orthonormé direct (O, I, J) .

a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) = -f(x)$.

b) Construire (C) puis (Γ) dans le même repère.

PROBLÈME 47

Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f(x) = \frac{x^2-x}{\ln x} \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = (2x - 1)\ln x - x + 1$.

1. Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \ln(\ln(x^2) - \frac{1}{x} + 1)$

2. a) Vérifier que : $g'(1) = 0$

b) Démontrer que : $\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$.

3. En déduire le sens de variation de g .

4. Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[\setminus \{1\} , g(x) > 0$ et $g(1) = 0$.

Partie B

1. Étudier la continuité de f en 0 et en 1.

2. Démontrer que la fonction f est dérivable à droite en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Soit h la fonction définie sur $] -1; +\infty[\setminus \{0\}$ par $h(x) = \frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}$.

a) Démontrer que : $\forall x \in]0; 1[, x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

b) Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{3}{2}$ puis, en déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

4. On admet que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}$. Justifier que f est dérivable en 1.

Partie C

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

2. a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[\setminus \{1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{\ln^2 x}$

b) Déterminer le sens de variation de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

3. Tracer la courbe (C) . (Unité graphique : 2cm en abscisse et 2cm en ordonnée).

4. Démontrer que réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle à déterminer.

PROBLÈME 48

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité du graphique est le centimètre.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on désigne par :

(C) la courbe représentative de g .

(D) la droite d'équation $y = x$

1. a) On donne $g(0) = 1$. Déterminer la valeur de b .

b) On admet que la tangente (T) à (C) .

2. Soit h la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - x$.

a) Soit h' la fonction dérivée de h . Calculer $h'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de h . (On ne demande pas de calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$).

c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + (x + 1)e^{-x}$.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

b) Justifier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

c) Donner une interprétation graphique de ces résultats.

2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudier les positions relatives de (C) et (D) .

3. a) On désigne par f' la fonction dérivée de f .
Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}h(x)$.
b) Déterminer le sens de variation de f .
c) Dresser le tableau de variation de f .
4. Construire sur le graphique (T) , (D) et (C) .
5. a) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f , calculer $(f^{-1})'(1)$.
c) calculer (f) la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que (C) .

Partie C:

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^n (t+1)e^{-t} dt$.

1. A l'aide d'une intégration par partie démontrer que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (-2 - n)e^{-n} + e$.
2. Calculer l'aire A_n en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C) ; la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$.

PROBLÈME 49

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $g(x) = 1 + x \ln x$

1. a) Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 1 + \ln x$
b) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On calculera pas les limites de g)
2. En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = \frac{x}{1+x \ln x} \end{cases}$

On note (C) , la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , (Unité : 4 cm).

1. a) Etudier la continuité de f en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est :
 $y = x$.

d) Démontrer que :

(C) est au-dessus de (T) sur $]0; 1[$

(C) est au-dessous de (T) sur $]1; +\infty[$

2. Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3. a) On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$;

Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{(1+x \ln x)^2}$

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J)

Partie C :

1. a) Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \leq 1$

b) Démontrer que : $\forall x \in [1; e], 1 - \frac{1}{1-x} \leq f(x)$.

2. Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Démontrer que : $16 \ln \left(\frac{2}{1+e} \right) \leq A \leq 16(e-1)$

PROBLÈME 50

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Unité graphique : 4cm

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$.

1. a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b) Étudier les variations de g en $[0; +\infty[$.

2. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0; +\infty[$ une solution unique α .

b) Justifier que : $1,14 \leq \alpha \leq 1,15$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Étude de la fonction de f sur $[0; +\infty[$.

1. a) Démontrer que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

b) En déduire les variations de f sur $[0; +\infty[$.

2. a) Démontrer que pour tout réel positif x , $f(x) = \frac{1 - e^x}{x + e^{-x}}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

3. a) Etablir que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

b) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-1} .

c) Dresser le tableau de variations de f .

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

5. a) Etablir que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}, \text{ avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$

b) Etudier les variations de la fonction u sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

En déduire le signe de $u(x)$.

c) Déduire des questions précédentes la position relative de (C_f) et (T) .

6. Tracer (C_f) et (T) sur le même graphique.

Partie C : Calcul d'aire

1. Donner une primitive F de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. On note D le domaine du plan délimité par (C_f) , la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer en cm^2 , l'aire A du domaine D .

Donner une valeur décimale, au mm^2 près, de l'aire A .

PROBLÈME 51

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x(\ln x)^2 - x \ln x - x - 1$.

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2. Démontrer que : $\forall x > 0, g'(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$.

3. a) Etudier la variation de g

b) Dresser le tableau de variation de g .

4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $5,4 < \alpha < 5,5$.

5. Justifier que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$;

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1+x \ln x}{-1+\ln x}$ si $x \neq 0$ et $f(0)$.

On note (C_f) sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .

2. a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

Donner une interprétation graphique de ces résultats.

3. a) Calculer les limites de f en e .

Donner une interprétation graphique de ces résultats.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$.

On admettra que (C_f) a une branche parabolique dans la direction de la droite (D) d'équation : $y = x$.

4.a) Démontrer que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{g(x)}{x(-1+\ln x)^2}$

b) Etudier les variations de f

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Construire (C) et ses asymptotes.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; e[$.

1. Démontrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} d'un intervalle K à préciser sur $[0; e[$.
2. Démontrer que h^{-1} est dérivable en -1 et calculer $(h^{-1})'(-1)$.
3. Donner le sens de variations de h^{-1} et dresser son tableau de variations.
4. Donner une équation de la tangente en -1 à $(C_{h^{-1}})$, représentation graphique de h^{-1} .
5. Construire $(C_{h^{-1}})$ sur le même graphique que (C_f) .