

Lycée privé (L.P.A.K) de Banankabougou

Année Scolaire :2023-2024

Pré-bac : TSE Sujet N° 1

Exercice 1 : (4 points)

Soit la (u_n) suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} \end{cases}$

- a. Calcule u_1 ; u_2 et u_3 .
 - b. Montre que $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.
 - c. En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n > 1 > \frac{1}{2}$.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
- a. Montre que la suite (v_n) est une arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.
 - b. Ecrire v_n en fonction de n .
 - c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2 : (5,5 points)

1. Trouve dans le système décimal un entier $N = abcd$ divisible par 45 et tel que le couple $(b; c)$ soit solution de l'équation $x^2 - y^2 = 24$.
2. On considère l'équation $(E) : (p; q) \in \mathbb{Z}^2, 11p - 7q = -4$.
 - a. Vérifie que le couple $(-1; -1)$ est une solution de (E) .
 - b. Résoudre les équations (f) et (g) suivantes :
 $(f): x \in \mathbb{Z}, 2x \equiv 3[7] \quad (g): x \in \mathbb{Z}, 9x \equiv 4[11]$.
 - c. Déduire des questions 2) a) et b) la solution du système $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}, x \in \mathbb{Z}$.
3. Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n .
 - a. Montre que l'on a : $\beta(1 - \alpha) = 4$.
 - b. En déduire n .

Problème : (10,5 points)

I-1. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $] 0; + \infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \ln x$.

- a. Calcule $g'(x)$ pour tout $x \in] 0; + \infty[$
 - b. Montre que pour tout $x \in] 0; + \infty[\ g(x) \geq 0$.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; + \infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x \ln x, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{T})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

- a. Justifie que f est continue à droite en 0.

- b. Etudie la dérivabilité de f à droite en 0. Interprète graphiquement le résultat.
3. Montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interprète graphiquement les résultats
4. a. Montre que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = x + g(x)$.
 b. En déduire que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
 c. Dresse le tableau de variation de f .
5. a. Montre que la droite $(\mathfrak{D}): y = x$ est la tangente à $(\mathcal{T})$ au point d'abscisse 1.
 b. Vérifie que pour tout $x > 0$, $f(x) - x = xg(x)$. En déduire la position relative de $(\mathcal{T})$ et $(\mathfrak{D})$.
 c. Trace la courbe $(\mathcal{T})$ dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
- II- 1. Montre que pour tout réel $x > 0$, $\int_1^x t \ln t dt = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
 On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'aire, en (u, a) , de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{T})$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{n}$; $x = 1$ et $y = 0$.
 a. Montre que $\mathcal{A}_n = \frac{7}{12} - \frac{\ln(n)}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3}$.
 b. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$.
3. a. Montre que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
 b. Justifie que pour $n \geq 2$, il existe un unique réel $a_n > 0$ tel que $f(a_n) = \mathcal{A}_n$
 c. Montre que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel α et vérifie que $0,4 < \alpha < 0,5$.