

Partie. II.

On considère la fonction numérique f définie

sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Vérifier que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter

géométriquement ce résultat.

1. b. Vérifier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1. c. Vérifier que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

2. a. Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[: f'(x) = \frac{h(x)-g(x)}{x^2}$.

2. b. Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.
(On peut utiliser la question 1)2. a.

2. c. Dédire que pour tout x de $]0, +\infty[:$

$$e^{x-1} > 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

3. Montrer que l'équation $f(x) = x$
admet une solution α

tel que : $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (On donne $f(2) = 2.37$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1.38$)

4. Soit φ la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

4. a. Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie
sur un intervalle J que l'on déterminera

(l'expression de $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas demandée.)

(l'expression de $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas demandée.)

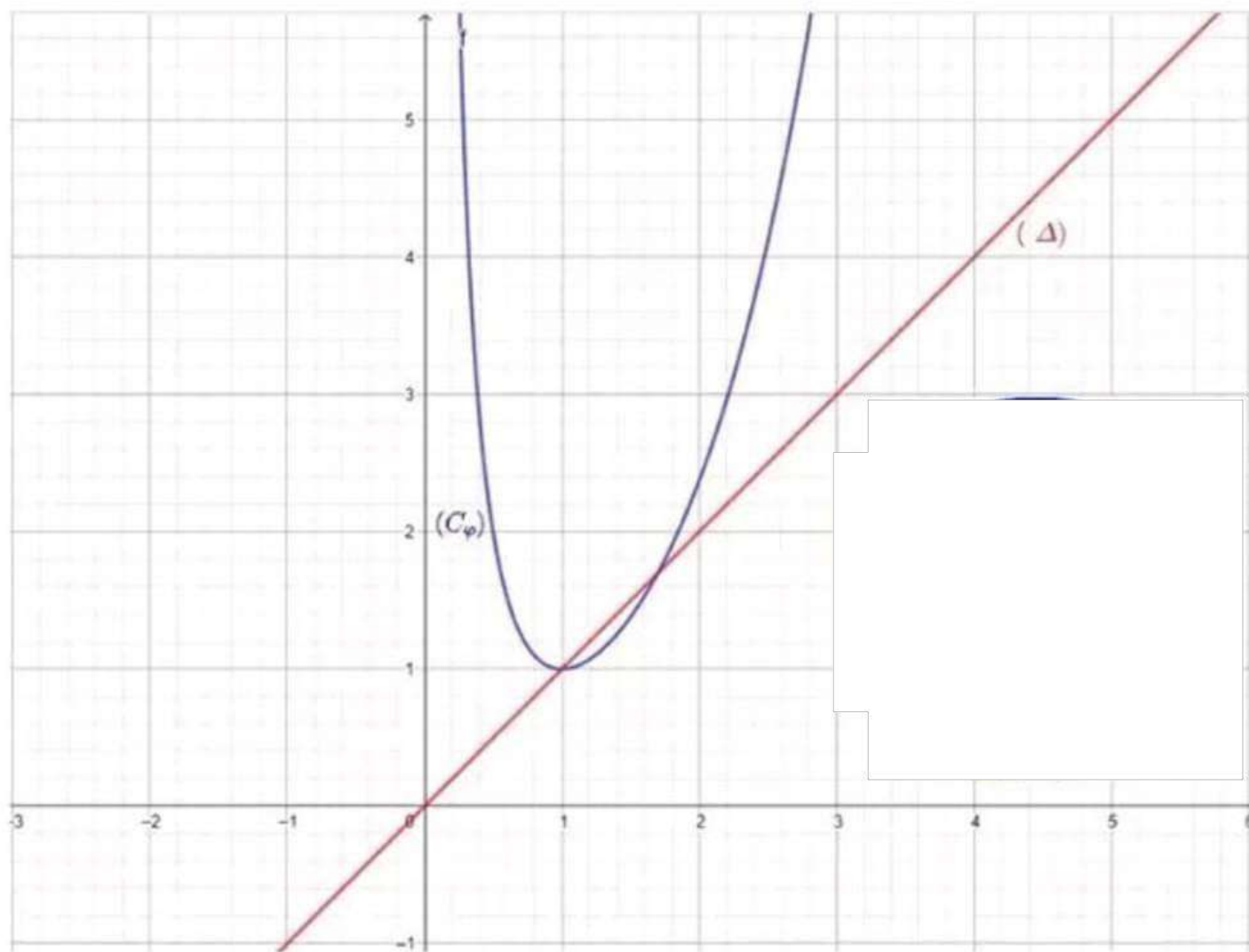
4. b. Justifier que la fonction φ^{-1} est strictement croissante sur l'intervalle J .

5. Le graphique ci – dessous représente la courbe (C_φ) de la fonction φ et la droite (Δ) d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé .

5. a. Justifier que pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi(x) \leq x$

5. b. Dédire que pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi^{-1}(x) \geq x$.

5. b. Reproduire la courbe (C_φ) et tracer la courbe $(C_{\varphi^{-1}})$ dans un même repère orthonormé .



5. *Partie. III.*

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in]1, \alpha[$ et $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que :

$$1 < u_n < \alpha \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante .

(On peut utiliser la question 5. b de la partie II).

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente

et déterminer sa limite .

Réponses.

On considère la fonction numérique f définie

sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans

un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Vérifier que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis

interpréter géométriquement ce résultat.

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \right) = e^{-1} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= e^{-1} - (-\infty) = e^{-1} + \infty = +\infty$$

■. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

signifie que la courbe (C_f) l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

1. b. Vérifier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1}) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= +\infty - 0 = +\infty.$$

1. c. Vérifier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

$$\begin{aligned} \blacksquare. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{ex} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{e} \times (+\infty) - 0 = +\infty \end{aligned}$$

■. Interprétation géométrique du résultat

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ signifie que (C_f)

admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2. a. Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \right)' \\ &= e^{x-1} - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = e^{x-1} - \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 e^{x-1} - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{x^2 e^{x-1} - (1 - \ln x)}{x^2} = \frac{h(x) - g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

2. b. Dresser le tableau de variations
de f sur $]0, +\infty[$.

(On peut utiliser la question 1)2. a.

$$\blacksquare. x \in]0, 1[\Rightarrow h(x) - g(x) < 0 \Rightarrow \frac{h(x) - g(x)}{x^2} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

$\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]0, 1[$

$$\blacksquare. x \in]1, +\infty[\Rightarrow h(x) - g(x) > 0 \Rightarrow \frac{h(x) - g(x)}{x^2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$

$$\blacksquare. f'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) - g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow h(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1 \blacksquare. g(1) = 1$$

■. *Tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$*

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

2.c. Dédurre que pour tout x de $]0, +\infty[$: $e^{x-1} > 1 + \frac{\ln x}{x}$.

1 est une valeur minimale de la fonction f , donc
pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f(x) > 1 \Rightarrow e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} > 1 \Rightarrow e^{x-1} > 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

3. Montrer que l'équation $f(x) = x$

admet une solution α

tel que : $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (On donne $f(2) = 2.37$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1.38$)

$$f(1) = e^{1-1} - \frac{\ln 1}{1} = e^0 - \frac{0}{1} = 1 - 0 = 1$$

2. c. Dédurre que pour tout x

de $]0, +\infty[: e^{x-1} > 1 + \frac{\ln x}{x}$.

1 est une valeur minimale de la fonction f , donc
pour tout $x \in]0, +\infty[:$

$$f(x) > 1 \Rightarrow e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} > 1 \Rightarrow e^{x-1} > 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

3. Montrer que l'équation $f(x) = x$

admet une solution α

tel que : $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (On donne $f(2) = 2.37$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1.38$)

On considère la fonction $p(x) = f(x) - x$

■. p est continue sur $]0, +\infty[$

car f est continue sur $]0, +\infty[$.

■. $p(2) = f(2) - 2 = 2.37 - 2 = 0.37$

et $p\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = 1.38 - 1.5 = -0.12$.

On remarque que : $p(2) \times p\left(\frac{3}{2}\right) < 0$.

D'après *le théorème des valeurs intermédiaires*, il existe

une solution au moins $\alpha \in \left] \frac{3}{2}, 2 \right[$ telle que : $p(\alpha) = 0$

$\Rightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha$

4. Soit φ la restriction de la fonction f
sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

4. a. Montrer que φ admet une fonction

réciproque φ^{-1} définie

sur un intervalle J que l'on déterminera

(l'expression de $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas demandée.)

■. φ est continue et strictement croissante
sur l'intervalle $[1, +\infty[$

■. φ admet une fonction réciproque φ^{-1}
définie sur un intervalle J

■. Déterminons J .

$$J = \varphi([1, +\infty[) = \left[\varphi(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right[= \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [1, +\infty[.$$

5. a. Justifier que pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi(x) \leq x$.

On remarque d'après le graphe que

sur l'intervalle $[1, \alpha]$

(C_φ) est au dessous de (Δ) , ce qui se traduit

par $\forall x \in [1, \alpha] : \varphi(x) \leq x$

5. b. Dédurre que pour tout x de $[1, \alpha] : \varphi^{-1}(x) \geq x$.

On remarque d'après le graphe le graphe

que sur l'intervalle $[1, \alpha]$

$$\varphi(x) \leq x \Rightarrow \varphi^{-1}[\varphi(x)] \leq \varphi^{-1}(x) \Rightarrow x \leq \varphi^{-1}(x).$$

Partie. III.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in]1, \alpha[$

et $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que :

$1 < u_n < \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Faisons un raisonnement par récurrence

■. *Initialisation : pour $n = 0$:*

$1 < u_0 < \alpha$ est vraie car $u_0 \in]1, \alpha[$.

■. *Héridité.*

Supposons que :

$1 < u_n < \alpha$ et montrons que $1 < u_{n+1} < \alpha$.

$1 < u_n < \alpha \Rightarrow \varphi^{-1}(1) < \varphi^{-1}(u_n) < \varphi^{-1}(\alpha)$

car φ^{-1} est strictement croissante sur $]1, \alpha[$.

$1 < u_n < \alpha \Rightarrow \varphi^{-1}(1) < \varphi^{-1}(u_n) < \varphi^{-1}(\alpha)$

$\Rightarrow 1 < u_{n+1} < \alpha$.

■. $\forall n \in \mathbb{N} : 1 < u_n < \alpha$

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

■. On a $\forall n \in \mathbb{N} : 1 < u_n < \alpha \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_n < \alpha \Rightarrow$ la suite (u_n)
est majorée par α .

■. Monotonie de la suite (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \varphi^{-1}(u_n) - u_n.$$

On a : $(C_{\varphi^{-1}})$ est au dessus de (Δ)

sur $]1, \alpha[$ et $u_n \in]1, \alpha[$

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(u_n) > u_n$$

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(u_n) - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

$\Rightarrow$ la suite (u_n) est strictement croissante sur $]1, \alpha[$.

■. la suite (u_n) est majorée par α et strictement croissante sur $]1, \alpha[$, donc **convergente**.

■. La limite de la suite (u_n) est déterminée

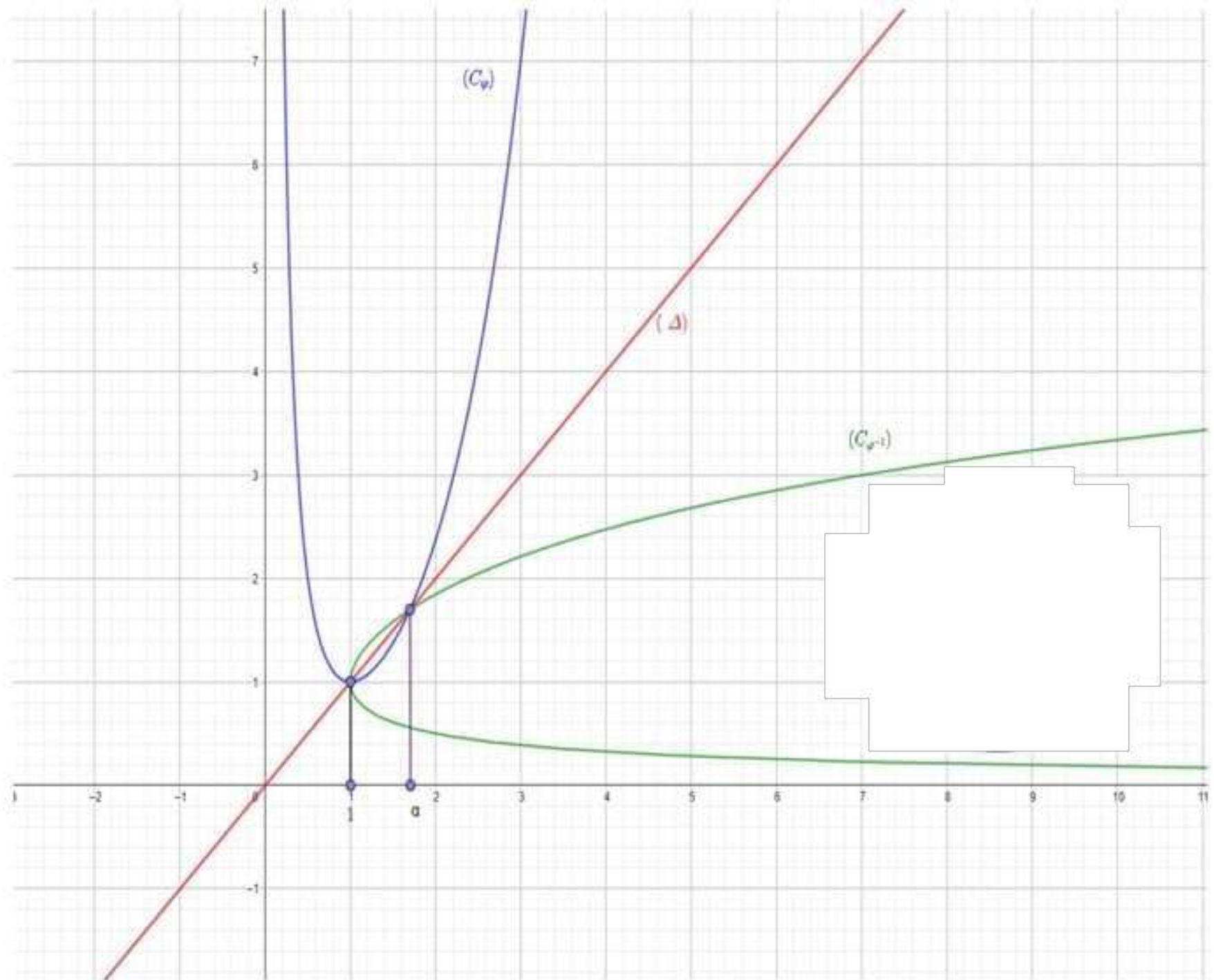
par l'équation $\varphi^{-1}(x) = x$. $\varphi^{-1}(x) = x \Rightarrow \varphi(x) = x$.

L'équation $\varphi(x) = x$ admet

deux solutions $x = 1$ ou $x = \alpha$ ou $x = 1$ est à exclure car : $1 < u_n$

La limite de la suite (u_n) est alors α .

«



Celui qui maîtrise les mathématiques possède une clé qui ouvre de nombreuses portes du savoir. »