

Problème :

La partie B peut être traitée indépendamment de la partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ unité graphique : 2 cm

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère $(O; I; J)$

Partie A : Dans cette partie on s'intéresse seulement aux fonctions f_0 et f_1 correspondant respectivement à $n=0$ et $n=1$

On considère d'abord la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

- 1) a) Détermine la limite de $f_0(x)$ lors que x tend vers $-\infty$
b) Détermine la limite de $f_0(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
c) Déduis-en les asymptotes de C_0
- 2) Montre que le point $k\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C_0
- 3) Etudie les variations de $f_0(x)$
- 4) a) Détermine une équation de la tangente T à la courbe C_0 au point k
b) Justifie que pour étudier la position de C_0 par rapport à la tangente T , il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$ où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$
c) Calcule $g'(x)$ et $g''(x)$
d) Détermine, en les justifiant, les signes de $g''(x)$; $g'(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x
e) Déduis en la position relative de la tangente T par rapport à la courbe C_0
- 5) Trace la courbe C_0 et la tangente T dans le repère $(O; I; J)$
- 6) a) Montre que pour tout réel x , les points $M(x; f_0(x))$ et $M'(x; f_1(x))$ sont symétriques par rapport à la droite d d'équation $y = \frac{1}{2}$
b) Comment obtient-on C_1 à partir de C_0 . Trace C_1 sur la même figure

Partie B : Etude de la suite u définie pour tout entier naturel n , par $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

- 1) Montre que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$
- 2) Montre que $u_0 + u_1 = 1$. Déduis-en u_1
- 3) Montre que la suite u est positive
- 4) On pose $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$
 - a) Montre que pour tout x réel, $k(x) = \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$
 - b) Déduis-en le signe de k pour tout $x \in [0,1]$
 - c) Déduis-en que u est décroissante
- 5) a) Montre que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_{n-1} + u_n = \frac{1-e^{-(n-1)}}{n-1}$
b) calcule u_2

- 6) soit v la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 2 par $v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}$
- a) calcule la limite de v quand n tend vers $+\infty$
 - b) Montre que pour tout entier n supérieur ou égale à 2, on a : $0 \leq u_n \leq v_n$
 - c) Déduis-en la limite u quand n tend vers $+\infty$