

TD sur les fonctions ln et expo :

Problème 1 :

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit $g(x) = 1 - x + 2 \ln(x)$.

- 1) Etudier les variations de $g(x)$ et dresser son tableau de variation.
- 2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3 < \alpha < 4$.
- 3) Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.

Partie B : On considère la fonction principale $f(x) = 2x \ln(x) - \frac{x^2}{2} - x$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites aux bornes de ce domaine.
- 2) Montrer que $\forall x \in D_f, f'(x) = g(x)$.
- 3) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
- 4) Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
- 5) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha$.
b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- 6) Construire (C) .

7) a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $I = \int_1^e x \ln(x) dx$.

b) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire du domaine D limité la courbe (C)

l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Problème 2 :

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\ln(x))^2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en 1.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Que peut-on déduire pour la courbe (C) de f ?
- 3) Soit U la fonction définie par $U(x) = 2x - 2 - x \ln x$.
a) Etudier U (limite, variation tableau de variation)
b) Calculer $U(1)$ puis déterminer le signe de $U(x)$ sur $]0, +\infty[$ (on montrera que $U(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]4,9 ; 5[$).
- 4) a) Montre que $\forall x \in]0, +\infty[f'(x) = \frac{U(x) \ln x}{x(x-1)^2}$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$ puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$

5) Tracer (C) dans un repère orthonormé.