

LIMITES ET CONTINUITÉ

Domaine de définition

Exercice 1

Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$; 3) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$; 4) $f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
- 5) $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$; 6) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$; 7) $f(x) = |x| \cdot \sqrt{\frac{x}{x-1}}$; 8) $f(x) = x^3 - 3x - 4$
- 9) $f(x) = \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2}$; 10) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$; 11) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$; 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
- 13) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$; 14) $f(x) = \frac{x^2+2x}{|x|-2}$; 15) $f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-3x+2}}$; 16) $f(x) = \frac{|x^2-3x|}{x+1}$
- 17) $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + x - 2}$; 18) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-x}$; 19) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$; 20) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x-3|-5}$
- 21) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$; 22) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{9x^2}}$; 23) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1}$; 24) $f(x) = |x^3 - 3x - 4|$
- 25) $f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}$; 26) $f(x) = \left|1 + \frac{1}{x}\right|$; 27) $f(x) = |x - 1| + \frac{1}{x}$; 28) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$
- 29) $f(x) = |x - 1| + \frac{2}{x+1}$; 30) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; 31) $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 32) $f(x) = \frac{x^3-9x}{2(x^2-1)}$
- 33) $f(x) = \frac{-3x^2-4x+3}{-x^2+1}$; 34) $f(x) = \frac{4x+3}{x^3-x^2}$; 35) $f(x) = \frac{-5x}{\sqrt{4x^2+1}}$; 36) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$
- 37) $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}$; 38) $f(x) = \sqrt{-6x^3 + 3x}$; 39) $f(x) = \frac{x}{\left|1 + \frac{1}{x}\right|}$; 40) $f(x) = \frac{x^2+2}{|x|-1}$
- 41) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$; 42) $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x+2}}$; 43) $f(x) = \frac{x-\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}$; 44) $f(x) = \frac{|x+1|}{1-|x-1|}$

Calcul de limites

Exercice 2

1) Limites de fonctions polynômes et rationnelles quand $x \rightarrow \infty$

1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -2x^3 - 3x^2 + 1$	2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(1-x)^2}{1-2x^2}$	3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^3 - 3x^2 + 1}{5x^2 + 4x}$	4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 1}{2x^3}$
5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + 3x^2 + 1$	6) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1-x)^3$	7) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2x^3 - 3x)(x+1)$	8) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x + 1 - \frac{2}{x-3}$

2) Limites de fonctions rationnelles quand $x \rightarrow$ réel annulant le dénominateur et le numérateur

1) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$	2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}$	3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 + 3x + 2}$	4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x - 1}$
5) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$	6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$	7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$	8) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x^3}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$

3) Limites de fonctions rationnelles quand $x \rightarrow$ réel annulant le dénominateur

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x + 1}{x + 1}$	2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - x}{x - 3}$	3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^3}$	4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 7}{x^2 - 1}$
5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{(x+1)^2}$	6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x + 5}{(x-2)(1-x)}$	7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 3x}{x^2 - 1}$	8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x}{x^2 - 2x + 1}$

4) Limites de fonctions racines carrées quand $x \rightarrow \infty$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x+2} - \sqrt{4x+1}$	2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x^2+1}$	3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+1} - x$	4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{9x^2}}$
5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2+1} - 3x$	6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x} + x$	7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1}$	8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{\sqrt{4x^2+1}}$
10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-2x} - 3x$	11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+4x} + 3x + 5$	12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+1}$	13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5-x} - \sqrt{1-x}$

5) Limites de fonctions trigonométriques

1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + \cos x}$	2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$	3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$	4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \cos x}$
5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x}$	6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{3x - \pi}$	7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$	8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{4 + \cos x}$	10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$	11) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1}$	12) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-9}$
13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$	14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{x}$	15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 3x - \sin^2 4x}{1 - \cos 2x}$	16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \tan 2x}{\sin 4x - \tan x}$

6) Limites de fonctions trigonométriques avec taux de variation

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi}$	2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$	3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$	4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - \sqrt{2}}{2x - \frac{\pi}{2}}$
---	--	---	--

7) Limites de fonctions trigonométriques avec théorème des gendarmes

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x+1}$	2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \cos x}{x^2+1}$	3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sin x + 1}$	4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}$
5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^3+1}$	6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{5x}$	7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2+1}$	8) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

8) Limites des fonctions rationnelles avec taux de variation ou expression conjuguée

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$	2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$	3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{\sqrt{3x+1} - 1}$	4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - 1}$
5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}$	6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+13} - 4}$	7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{\sqrt{3x+1} - 1}$	8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5+2x}}{x-2}$
9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x^2-x+1}}{3x - \sqrt{4x^2+5x}}$	10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+2} - 2}{4x}$	11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{1-x}$	12) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2+5x-1} - 7}{\sqrt{x^3+6} - 9}$
13) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{2x^2-2}$	14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4+x}}$	15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+16} - 4}$	16) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{x+6}}{2x-6}$

Continuité en point x_0

Exercice 3

Etudie la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \text{ et } x_0 = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} & \text{si } x \neq 9 \\ f(9) = \frac{1}{6} \text{ et } x_0 = 9 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{\sin x + 1} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \text{ et } x_0 = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{2x - 2} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{2} \text{ et } x_0 = 1 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2-x} - 2}{\sqrt{x+3} - 1} \text{ si } x \neq -2 \\ f(-2) = -\frac{1}{2} \text{ et } x_0 = -2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x - 1} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 1 \text{ et } x_0 = 2 \end{cases}$$

Continuité sur un intervalle

Exercice 4

$$1) \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \text{ si } x \in [0; 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} \text{ si } x \in]1; 3] \end{cases} \quad \text{et} \quad 2) \begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 \text{ si } x \in]-\infty; 1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \text{ si } x \in [1; 3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \text{ si } x \in [3; +\infty[\end{cases}$$

Etudie la continuité de f en 1.

Etudie la continuité de f en 1 et en 3.

Détermination de a et b pour que f soit Continue en x_0

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$

Détermine la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 2$.

Exercice 6

Détermine le nombre réel a pour que la fonction f donnée soit continue.

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x+2a}{1-x} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\sin 2x}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} \text{ si } x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + ax + 1 \text{ si } x < 2 \end{cases} ; \quad c) \begin{cases} f(x) = 3x^2 - 2x + a \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{4x+1}{4x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 7

$$\text{Soit la fonction } f \text{ définie par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 1} \text{ si } x \leq 1 \\ f(1) = b \\ f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Détermine a et b pour que f soit continue en 1.

Exercice 8

$$\text{Soit la fonction } f \text{ définie par : } \begin{cases} f(x) = ax + 5b - a \text{ si } x \geq 0 \\ f(0) = 4 \\ f(x) = \frac{\sin ax}{bx} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Détermine a et b pour que f soit continue en 0.

Exercice 9

$$\text{Soit la fonction } f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } \begin{cases} f(x) = x^2 + ax \text{ si } x \in]-\infty; -1[\\ f(x) = 2x - 1 \text{ si } x \in [-1; 1[\\ f(x) = b(x^2 - 1) \text{ si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

1) Détermine a pour que f soit continue au point $x_0 = -1$

2) Pouvez-vous déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$?

Prolongement par continuité en x_0

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de définition de la fonction f et détermine (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0 .

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \\ x_0 = 2 \end{cases} ; \quad c) \begin{cases} f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2} \\ x_0 = 0 \end{cases} ; \quad d) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4} \\ x_0 = 3 \end{cases} ; \quad e) \begin{cases} f(x) = \frac{2x+\sqrt{x+5}}{x^2-1} \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

Exercice 11

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

- 1) Détermine les ensembles de définitions D_f et D_g respectivement des fonctions f et g .
- 2) Vérifie que la fonction g est le prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) f admet-elle un prolongement par continuité au point 4 ? Si oui, donne alors ce prolongement.

Asymptotes, positions relatives et branches infinies

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x-3}{1-x^2}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) a) Calcule les limites aux bornes de D_f .
- b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 14

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).
- 2) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ).

Exercice 15

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-5x+7}{3-x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f , puis calcule les limites aux bornes de D_f .
- b) Interprète graphiquement si possible les résultats obtenus.
- 2) a) Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{3-x}$.
- b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).
- c) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) a) Calcule les limites aux bornes de D_f .
- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 17

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x^3+2x^2}{x-1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) Calcule les limites aux bornes de D_f . Interprète graphiquement le résultat de la limite en 1.
- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

DÉRIVATION

Calcul de dérivées

Exercice 1

Dérive les fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} ; \quad 2) f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4} ; \quad 3) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} ; \quad 4) f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$5) f(x) = (x^4 - 7)^3 ; \quad 6) f(x) = (3x^2 + 2x - 4)^{-4} ; \quad 7) f(x) = \left(\frac{3x-4}{x-1}\right)^3 ; \quad 8) f(x) = x^3 - 3x - 4$$

$$9) f(x) = \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x-2} ; \quad 10) f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^3-3}\right)^3 ; \quad 11) f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} ; \quad 12) f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$13) f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1} ; \quad 14) f(x) = \sqrt{3 + \cos 2x} ; \quad 15) f(x) = x - \frac{2}{x-1} ; \quad 16) f(x) = \sin^2 4x$$

$$17) f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1} ; \quad 18) f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-x} ; \quad 19) f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1 ; \quad 20) f(x) = \cos^4 \pi x$$

$$21) f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1} ; \quad 22) f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{9x^2}} ; \quad 23) f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1} ; \quad 24) f(x) = \frac{x}{2 + \cos 4x}$$

$$25) f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6} ; \quad 26) f(x) = (x^3 - 1)^2 \sqrt{x^2 + 1} ; \quad 27) f(x) = \sin 3x \cos 2x ; \quad 28) f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$$

$$29) f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3} ; \quad 30) f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} ; \quad 31) f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} ; \quad 32) f(x) = \frac{x^3-9x}{2(x^2-1)}$$

$$33) f(x) = \frac{-3x^2-4x+3}{-x^2+1} ; \quad 34) f(x) = \frac{4x+3}{x^3-x^2} ; \quad 35) f(x) = \frac{-5x}{\sqrt{4x^2+1}} ; \quad 36) f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$$

$$37) f(x) = \frac{(2x-1)^2}{(3x+1)^3} ; \quad 18) f(x) = \sqrt{-6x^3+3x} ; \quad 39) f(x) = \frac{1-3\cos x}{\sin x-2} ; \quad 40) f(x) = (1 + \cos^2 x)^4 \sin x$$

Dérivabilité en point x_0

Exercice 2

Etudie la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

$$1) f(x) = x\sqrt{x} \text{ et } x_0 = 1 ; \quad 2) f(x) = |x^2 - 4| \text{ et } x_0 = 2 ; \quad 3) f(x) = x\sqrt{\sin^2 x} \text{ et } x_0 = 0$$

$$4) f(x) = \frac{x+5}{x-3} \text{ et } x_0 = 2 ; \quad 5) f(x) = x^2 - 3x \text{ et } x_0 = 4 ; \quad 6) f(x) = \sqrt{3x+1} \text{ et } x_0 = 1$$

Exercice 3

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = -x^2 + x \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = x^2 - x \end{cases}$. Etudie la dérivabilité de f en 1.

Continuité et dérivabilité en x_0

Exercice 4

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} \text{ si } x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a \text{ si } x < -1 \end{cases}$

1) Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue au point -1 ?

2) Pour cette valeur, étudie la dérivabilité de la fonction f au point -1 .

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$

1) Détermine l'ensemble de définition de f .

2) Etudie la continuité de f sur $[-1; +\infty[$.

3) Montre de f est dérivable en 0 et détermine l'équation de la tangente à sa courbe représentative en $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 6

Détermine les réels a et b pour que f soit continue et dérivable aux points x_0 donnés :

$$a) \begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} & \text{si } x > 1, x_0 = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} & \text{si } x > -2, x_0 = -2 \end{cases} \quad c) \begin{cases} f(x) = ax^2 - 3x + 4 & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+b}{x+3} & \text{si } x > -2, x_0 = -2 \end{cases}$$

Tangentes

Exercice 7

Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse x_0 des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 5} \text{ et } x_0 = 1 \quad ; \quad 2) f(x) = \frac{2x + 1}{x - 2} \text{ et } x_0 = 0 \quad ; \quad 3) f(x) = \cos x \text{ et } x_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$4) f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} \text{ et } x_0 = -1 \quad ; \quad 5) f(x) = x^2 - 3x \text{ et } x_0 = 4 \quad ; \quad 6) f(x) = \sqrt{x + 1} \text{ et } x_0 = 3$$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 2$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Montre que (C) admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -2x + 4$.

2) Donne une équation de chacune de ces tangentes.

Détermination de paramètre

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a, b et c sachant que (C) passe par $A(2 ; 6)$ et admet comme tangente au point d'abscisse 6 la droite d'équation $y = -3x + 20$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a, b et c sachant que f admet 2 comme extremum relatif en 1 et que la tangente à sa représentation graphique au point d'abscisse 2 admet 3 comme coefficient directeur.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Détermine les réels a, b et c sachant que (C) passe par $A(0 ; 4)$ et que la tangente au point $B(2 ; 1)$ est parallèle la droite (OI).

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

Détermine les réels a, b et c en utilisant les données du tableau de f .

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

ETUDE DE FONCTIONS

Problème 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
- 2) a) Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).
c) Etudie la position relative entre (C) et (D).
- 3) Montre que le point I(1; -1) est un centre de symétrie de (C).
- 4) Détermine une équation de la tangente (T) aux d'abscisses 2.
- 5) Détermine les coordonnées du point d'intersection entre (C) et l'axe des ordonnées.
- 6) Trace (D), (T) et (C).

Problème 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) a) Calcule les limites aux bornes de D_f .
b) Interprète graphiquement le résultat de la limite obtenu en 1.
- 3) a) Vérifie que $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1}$.
b) Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C).
c) Etudie la position relative entre (C) et (D).
- 4) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 5) Démontre que le point A(1; 3) est un centre de symétrie de (C).
- 6) Trace (D) et (C).

Problème 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
- 2) a) Détermine les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$.
b) Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).
c) Etudie la position relative entre (C) et (D).
- 3) A est le point d'intersection des asymptotes à (C).
a) Détermine les coordonnées du point A.
b) Montre que le point A est un centre de symétrie de (C).
- 4) Détermine une équation de la tangente (T) aux d'abscisses 1.
- 5) Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des repères.
- 6) Trace (D), (T) et (C).

Problème 4

Soit f une fonction numérique à variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes :

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f(1) = f(3) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 1$; $f'(0) = f'(2) = 0$.
- $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0$; $\forall x \in]0; 2[, f'(x) < 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 2] = 0^-$.

- 1) Dresse le tableau de variation de f .
- 2) (C_f) représentant les variations de f , précise les équations des asymptotes à (C_f).
- 3) Précise le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 4) Trace dans le même repère (C_f) et ses asymptotes.

Problème 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f puis les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) Montre que la courbe (C) de f admet une droite (Δ) asymptote oblique aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
- 3) Etudie la position de (C) par rapport à (Δ) .
- 4) Etudie le sens de variation de f et construis (C) dans un repère orthonormé.
- 5) Démontre que (C) admet un centre de symétrie que l'on déterminera.
- 6) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point E d'abscisse 1.
Existe-t-il un autre point de (C) en lequel la tangente à (C) est parallèle à (T) ?
Si oui, détermine les coordonnées de ce point et une équation de cette tangente (T') .
- 7) Résous et discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation : $x^2 - (m + 1)x + 3m - 5 = 0$.

Problème 6

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. On désigne par (Cf) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montre que (Cf) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.
- 2) Précise la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique.
- 3) Etudie les variations de f .
- 4) Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$?
Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.
- 5) Trace la courbe (Cf) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 6) Montre que la restriction g de f à l'intervalle $I =]1 ; 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
- 7) a) Calcule $(h^{-1})'(\frac{5}{2})$.
b) Dresse le tableau de variation de h^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que celle de f .

Problème 7

Partie A :

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

- 1) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,01.
- 3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$. Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine le domaine de définition de f . Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .
- 2) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$. En déduis les variations de f .
- 3) a) Détermine les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.
b) En déduis que Cf admet une asymptote oblique (Δ) et étudie la position de Cf par rapport à (Δ) .
Vérifie en particulier que Cf rencontre (Δ) en un point unique A .
- 5) Détermine les abscisses des points B et B' de Cf admettant une tangente parallèle à (Δ) .
- 6) Démontre que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$. En déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$.
- 7) Trace Cf et (Δ) .

Problème 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{1 - x^3}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 1$

- 1) Etudie la fonction g (limites et sens de variation).
- 2) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$, puis en déduis l'arrondi d'ordre 2 de l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
- 3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

- 1) Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- 2) a) Prouve que le signe de la fonction dérivée f' de f dépend en signe et en racine de la fonction g étudiée dans la partie A.
b) Détermine $g(x_0)$ où x_0 est l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses obtenu dans la partie A-2).
c) Dresse le tableau de variation de f .
- 3) trace la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 4) Détermine graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation paramétrique :
 $(E_m) : mx^3 + x = m$ où m est un paramètre réel.

Problème 9

Partie A :

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 6x + 5$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 3) Calcule $g(1)$ et $g(5)$.
- 4) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 10}{x - 3}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm)

- 1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, 3 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en 3.
- 2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-3)^2}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D) .
- 4) Montre que $f(\alpha) = \frac{\alpha+5}{\alpha-3}$.
- 5) Trace (C) et (D) .

Problème 10

I/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$.

- 1) Etudie les variations de g .
- 2) a) Montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
b) Vérifie que $\alpha \in]-1; 0[$.
- 3) Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$.

II/ On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1} \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = x - \frac{2}{x-1} \end{cases}$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0; I; J)$, (C_1) et (C_2) sont respectivement les courbes de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

- 1) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) a) Démontre que pour tout réel x de $]-\infty; 1[, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.
En déduis le sens de variations de f sur $]-\infty; 1[$.
b) Etudie le sens variation de f sur $]1; +\infty[$.
c) Dresse le tableau de variations de f .
- 3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_2) en $+\infty$.
b) Etudie la position de (C_2) par rapport à (D) .
- 4) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement le résultat.
- 5) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C_1) avec l'axe des ordonnées et de (C_2) avec l'axe des abscisses.
- 6) Représente la courbe (C_f) dans le repère $(0; I; J)$. ($\alpha = -0,1$).
- 7) Soit h la restriction de f sur $]1; +\infty[$.
a) Justifie que h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K à déterminer.
b) Dresse le tableau de variation de h et celui de sa bijection réciproque h^{-1} .

- c) Calcule $(h^{-1})'(0)$.
d) Représente la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère $(0; I; J)$.

Problème 11

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3,1 < \alpha < 3,2$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm)

- 1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, 1 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en 1.
- 2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D) .
- 4) Montre que $f(\alpha) = \frac{3(\alpha^2+1)}{(\alpha-1)^2}$
- 5) Trace (C) et (D) . (On prendra $f(\alpha) \simeq 7$)

PARTIE C : Etude d'une bijection

Soit φ la restriction de f à l'intervalle $] -\infty ; 1[$

- 1) Montre que φ réalise une bijection de $] -\infty ; 1[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
- 2) Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ et (C^{-1}) sa représentation graphique.
a) Dresse le tableau de variation de φ^{-1} .
b) Justifie que φ^{-1} est dérivable en 0 et calcule $(\varphi^{-1})'(0)$.
- 3) Trace (C^{-1}) dans le même repère que (C) .

Problème 12

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x + 4$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ telle que $-2,2 < \alpha < -2,1$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2-1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm)

- 1) a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
b) Ecris D_f sous forme de réunion d'intervalles.
- 2) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, -1, 1 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat des limites de f en -1 et 1.
- 3) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$
b) En déduis le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f .
- 4) Montre que $f(\alpha) = \frac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}$
- 5) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (Δ) et (C) .
- 6) Trace (C) et (Δ) .

PARTIE C : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.

- 1) Montre que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
- 2) a) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et $(C_{h^{-1}})$ sa représentation graphique.
Dresse le tableau de variation de h^{-1} .

- b) Calcule $h(2)$ et $(h^{-1})'(2)$.
 3) Trace (C_h^{-1}) dans le même repère que (C).

Problème 13

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

La fonction f a pour forme explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) Calcule $f'(x)$.
- 3) Détermine les réels a, b et c en utilisant les données du tableau de f .
- 4) Montre que la restriction g de f à $[0; +\infty[$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 5) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α . Montre que α est compris entre 1 et 2.
 Donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- 6) Donne une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$, puis trace (T_0) et (C_f) .
- 7) Discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de l'équation
 $(E) : \frac{-x^3 + 5 + m}{3} - x^2 = 0$.

Problème 14

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x\sqrt{1+x^2} - 1$

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,7 < \alpha < 0,8$.
 b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2cm)

- 1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
 b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.
- 2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
 b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 3) Montre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$.
- 4) Trace (C).

Problème 15

A// Soit g la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par

$$(x+1)\sqrt{x+1} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

- b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 4) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

5) Trace (C).

C//

- 1) a) Montre que f réalise une bijection de l'intervalle $[-1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 b) Justifie que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} et dresse le tableau de variation de f^{-1} .
 2) f^{-1} est-elle dérivable en -1 ?
 3) Trace la courbe représentative (C^{-1}) de f^{-1} dans le même repère.

Problème 16

A// Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

- 1) Etudie les variations de la fonction g .
 2) Montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.
 3) En déduis le signe de g sur $\mathbb{R}$.

B// Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x$ et $y = x$.

- 1) Etudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
 2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
 b) En déduis le tableau de variation de f .
 3) Détermine la limite en $-\infty$ de $f(x) - (-3x)$. Quelle conséquence graphique peut-on déduire de ce résultat ?
 4) Montre la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
 5) Etudie la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').
 6) Trace la courbe (C), les droites (D) et (D').

Problème 17

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
 2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{4}{(4x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1}}$.
 b) En déduis le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
 3) Déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 2cm)

- 1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
 b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en $-\infty$.
 2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
 b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
 3) a) Montre que (C) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = 4x$ au voisinage de $+\infty$.
 b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).
 4) Trace (C) et (D).

PARTIE C : Etude d'une bijection

- 1) Justifie que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble K que l'on précisera.
 2) a) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
 b) Calcule $f(0)$ et en déduis la valeur de α .
 3) Donne les caractéristiques (ensemble de définition et sens de variation) de la bijection réciproque f^{-1} de f .
 5) a) Justifie que f^{-1} est dérivable en 1.
 b) Détermine le nombre dérivé de f^{-1} en 1.
 6) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{4x}$
 7) Représente dans le même repère (C^{-1}), courbe représentative de f^{-1} .

Problème 18

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par :
$$\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
 et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

- 1) a) Etudie les variations de la fonction numérique g définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$.
b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1; +\infty[$ et vérifie que $1,28 < \alpha < 1,3$.
c) Détermine le signe de g sur $]1; +\infty[$.
- 2) a) Justifie que l'ensemble de définition D de f est $[-1; +\infty[$.
b) Etudie la continuité de f en 1.
- 3) a) Etudie la dérivabilité de f en 1 et en -1, puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.
b) Détermine l'ensemble de dérivabilité de f .
- 4) a) Démontre que :
$$\begin{cases} \forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \\ \forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

b) Etudie le signe de f' sur $]-1; 1[$.
- 5) Justifie que : $f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$ et $-0,15 < f(\alpha) < -0,10$.
- 6) Dresse le tableau de variation de f sur $[-1; +\infty[$.
- 7) Etudie les branches infinies puis donne l'allure de (C) .

Problème 19

Soit la fonction f défini par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 9|}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f .
b) Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- 2) a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en -3 et en 3 .
b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.
- 3) a) Précise l'ensemble de dérivabilité de f .
b) Calcule $f'(x)$ et étudie son signe.
- 4) Etudie les variations de f .
- 5) Démontre que (C_f) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.
- 6) Construis (C_f) .
- 7) soit h la restriction de f à $]-\infty; -3]$.
Montre que h définit une bijection de $]-\infty; -3]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

Problème 20

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$.

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) Ecris $f(x)$ sans valeur absolue.
- 3) Etudie la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$ puis interprète graphiquement vos résultats.
- 4) Montre que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$.
- 5) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (Δ) et (D) .
- 6) Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
- 7) Trace dans un repère orthonormé la courbe (C) de f .

Problème 21

Soit la fonction définie par : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x| + \sqrt{x^2 - 2x}$$

- 1) Montre que :
 - a) $\forall x \in]-\infty; 0[, \sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x \leq 0$.
 - b) $\forall x \in]2; +\infty[, \sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x \geq 0$.
 - c) $\forall x \in]-\infty; 0[, x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} \leq 0$.
 - b) $\forall x \in]2; +\infty[, x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} \geq 0$.

- 2) a) Ecris $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
b) Etudie la dérivabilité de f en 0 et en 2, puis interprète géométriquement les résultats obtenus.
- 3) Dresse le tableau de variation de f .
- 4) Montre que les droites $(\Delta): y = 2x - 1$ et $(D): y = -2x + 1$ sont des asymptotes à la courbe (C_f) de f .
- 5) Trace la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 6) a) Montre que $\forall x \in [3; 4]$, on a : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq f'(x) \leq 1 + \sqrt{3}$.
b) En déduis que $\forall x \in [3; 4]$, on a : $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \sqrt{3} \leq f(x) \leq \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} + \sqrt{3}$.
- 7) a) Soit $I = [2; +\infty[$. Trouve $f(I)$.
b) Soit $g : I \rightarrow f(I)$
 $x \mapsto f(x)$
Montre que g est une bijection.
c) Calcule $(g^{-1})'(3)$.
d) Construis dans le même repère que (C_f) la courbe (Γ) de g^{-1} (où g^{-1} est la bijection réciproque de g).
- 8) Soit h la fonction définie par $h(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ et (C_h) sa courbe représentative.
a) Calcule $g(x - 1)$.
b) Exprime h à l'aide de g .

Problème 22

Soit la fonction f définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f .
- 2) Etudie la parité et la périodicité de f puis en déduis un intervalle d'étude D_E .
- 3) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{3(1-2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$.
- 4) Etudie le signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis en déduis les variations de f sur D_E .
- 5) Détermine les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.
- 6) En déduis le tracé de (C_f) sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie.

Problème 23

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$ et (C) sa courbe représentative.

- 1) Détermine D_f . Justifie que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
- 2) a) Démontre que : $\forall x \in D_f$, on a $f'(x) = \frac{\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})-1}{(1-\cos x)^2}$.
b) Dresse le tableau de variations de f sur $[-\pi; \pi]$.
c) Vérifie que sur cet intervalle, (C) présente une seule branche infinie, dont on précisera la nature.
- 3) a) Trace (C) et précise les coordonnées des points où la tangente est parallèle à (OI) .
b) Détermine une équation des tangentes aux points d'abscisses $-\pi$ et π .

Problème 24

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ où a, b, c et d sont des réels et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Trouve les réels a, b, c et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (C_f) passe par les points $A(2, 3), B(4, 7)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
- 2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1; b = -1; c = -5$ et $d = -3$
- a) Etudie la fonction f .
- b) Etudie la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.
- c) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[4; +\infty[$ réalise une bijection de $[4; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- d) Calcule $g(5), g(6)$ et $(g^{-1})'(\frac{15}{2})$.
- 3) Montre que (C_f) admet un centre de symétrie que l'on déterminera.
- 4) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β .
- 5) a) Montre que $\forall x \in [4; 5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

- b) En déduis que $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$.
- 6) Trace (Cf) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ainsi que (Cg^{-1}) la courbe de g^{-1} .

Problème 25

Partie A : Soit f la fonction numérique définie sur $Df =]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

- 1) Montre que la dérivée de f garde un signe constant sur Df .
- 2) Etudie les variations de f (limite et sens de variation).
- 3) En déduis que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1; 2[$.

Partie B : On se propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $]1; 2[$

- 1) Montre que l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.
- 2) On appelle g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$
(On a donc $g(\alpha) = \alpha$ et $1 \leq \alpha \leq 2$)
 - a) Montre que si x est élément de $]1; 2[$ alors $g(x)$ est aussi élément de $]1; 2[$.
 - b) Justifie la dérivabilité de g sur $]0; +\infty[$. Calcule la dérivée de g puis montre que pour tout $x \in [1; 2]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 - c) En déduis que pour tout $x \in [1; 2]$, on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

Problème 26

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x - 2$.

- 1) Etudie les variations de g sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.
- 3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 4) En utilisant le sens de variation de g , montre que $\forall x \in [0; 1], |g(x)| \leq 2$.

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

- 1) Détermine le domaine de définition de f , puis calcule la limite aux bornes de D_f .

- 2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \cdot g(x)$

b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

- 3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) .

b) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D) .

- 4) Montre que $f(\alpha) = \frac{3(1-\alpha)}{\alpha^2 + 1}$

- 5) Trace (C) et (D) .

PARTIE C :

- 1) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

- 2) Montre que $\forall x \in [0; 1]$, on a : $x \leq f(x) \leq 1$.

- 3) Montre que $\forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, on a : $\frac{\sqrt{2}}{8} \leq \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \leq \frac{4}{9}$.

- 4) En utilisant la 4^e de la partie A, en déduis que $\forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{8}{9}$.

- 5) en utilisant l'inégalité des accroissements finis à f sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, montre que $|f(x) - 1| \leq \frac{8}{9}|x - 1|$.