

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1 - Etude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 5 - \frac{8}{x+2}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On note α cette solution.

Exercice 2 - Fonction continue qui ne s'annule jamais

Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule jamais est de signe constant.

Exercice 3 - Tangente et unicité d'une solution

Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution dans $] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} [$.

Exercice 4 - Continuité et théorème du point fixe

Montrer que toute application continue d'un segment dans lui-même admet un point fixe :

Exercice 5 - Montrer qu'il y a une unique racine

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$.

Montrer que f possède une unique racine puis en donner un encadrement d'amplitude 0, 01.

Exercice 6 - Etude d'un polynôme

. Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de P .
2. En déduire le nombre de racines de P .
3. Retrouver directement ces racines en factorisant $P(x)$.

Exercice 7 - Théorème des valeurs intermédiaires

Montrer que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 8 - Racine et théorème des valeurs intermédiaires

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

Montrer que f possède une unique racine.

Exercice 9 :

La fonction de Heaviside, notée H , du nom d'un physicien anglais (1850-1925) est couramment utilisée en automatisme.

Pour tout réel x , $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction H .

b) Sur quels intervalles, les plus grands possibles, la fonction H est-elle continue ?

Exercice 10 :

La partie entière d'un nombre réel x , notée $E(x)$, est l'unique entier relatif n tel que :

$$n \leq x < n+1$$

1. Déterminer :

a. $E(2,6)$ b. $E(0,3)$ c. $E(4)$ d. $E(-1,2)$

2. Déterminer $E(x)$ pour tout réel x de l'intervalle :

a) $[0;1[$ b) $[1;2[$ c) $[-1;0[$ d) $[-2;-1[$

3.a) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction E sur l'intervalle $[-5;5[$.

b) Étudier graphiquement la continuité de la fonction E sur l'intervalle $[-5;5[$.

c) De façon plus générale, en quels nombres réels la fonction E est-elle discontinue ?

Exercice 11 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \geq 2 \\ e^{x-2}-4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

a. Expliquer pourquoi la fonction f est continue sur l'intervalle $]2; +\infty[$, puis sur l'intervalle $] -\infty; 2[$.

b. Expliquer pourquoi :

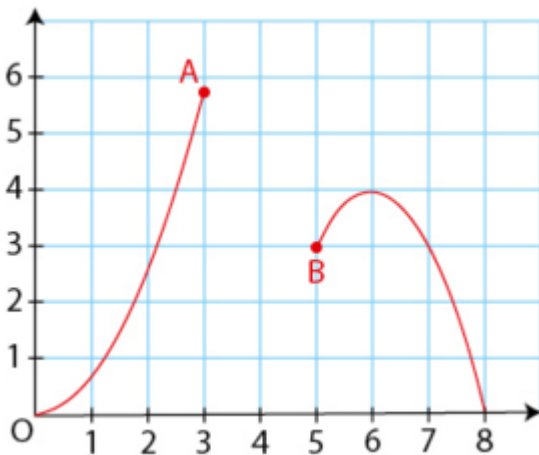
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$$

Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

c) Conclure pour la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 :

Un designer a dessiné une partie d'un logo dans le repère ci-dessous.



Ce logo est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 8]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \geq 2 \\ e^{x-2}-4 & \text{si } x < 2 \end{cases} \cdot f(x) = \begin{cases} 0,64x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ ax+b & \text{si } 3 < x < 5 \\ 4-(x-6)^2 & \text{si } 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

a) Déterminer les nombres réels a et b afin que la fonction f soit continue sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

b) Déterminer le nombre dérivé en 3 de la fonction polynôme $x \rightarrow 0,64x^2$, puis de la fonction affine $x \rightarrow 1,38x + 9,9$.

La fonction f est-elle dérivable en 3 ?

c) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 5.

Exercice 13 :

(v_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par $v_n = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$.

a) Proposer une suite (u_n) et une fonction f telles que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $v_n = f(u_n)$.

b) Démontrer que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 14 :

f est la fonction définie sur $I=[1 ; 2]$ par :

$$f(x) = 5 - \frac{16}{3+x}$$

a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I et dresser son tableau de variations.

b) Vérifier que pour tout réel x de I , $f(x) \in I$.

2. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) :
- est décroissante ;
 - est minorée par 1.
- b) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel l .
- c) Expliquer pourquoi l est solution dans I de l'équation $f(x) = x$.

Déterminer l .

Exercice 15 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x.$$

Voici le tableau de variations de la fonction f .

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-19	$\nearrow$	13	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

- a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β dans $\mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$.
- b) Donner la valeur exacte de β et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α à l'aide de la calculatrice.

