

Limite de fonctions

Exercice 1 - Limite de fonctions

Voici quelques limites à calculer. Ce sont toutes des formes indéterminées et on se limitera aux fonctions polynômes, rationnelles (quotient de deux polynômes) ou comportant des racines carrées.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-1}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+100}{x^2+x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2+x+1} - x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x-4}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x-1} - 2x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x-1} - x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3}$

Exercice 2 - Une limite classique

On rappelle que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Soit n entier naturel.

Etudier la limite suivante : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(nt)}{t}$.

Exercice 3 :

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

- a) Démontrer que pour tout réel $A \geq 0$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs f(x) pour x assez grand.
- b) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Exercice 4 :

g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

- a) Démontrer que pour tout réel α , l'intervalle $]0; \alpha[$ contient toutes les valeurs g(x) pour x assez grand.
- b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.
- c) Interpréter graphiquement cette limite pour la courbe représentative (φ) de g dans un repère orthonormé.

Exercice 5 :

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} + 2.$$

- a) Démontrer que $f(x) > 100$ pour x assez grand.
- b) Démontrer que pour tout réel $A > 2$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs f(x) pour x assez grand.
- c) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Exercice 6 :

g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

- a) Démontrer que pour tout réel $\alpha > 1$, l'intervalle $]1; \alpha[$ contient toutes les valeurs g(x) pour x assez grand.
- b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.
- c) Interpréter graphiquement cette limite pour la courbe (φ) de g dans un repère orthonormé.

Exercice 7 :

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2\sin(x) - x^2.$$

- a) Utiliser la courbe de h affichée ci-dessous pour conjecturer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.
- b) Démontrer ces conjectures.

Exercice 8 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

- a) Vérifier que l'étude de la limite de la fonction f en $+\infty$, avec les règles opératoires, mène à une forme indéterminée.
- b) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 9 :

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

Étudier la limite de la fonction g : a) en $+\infty$; b) en 3.

Exercice 10 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^4 + 3x + 1.$$

- a) Vérifier que l'étude de la limite de la fonction f en $+\infty$, avec les règles opératoires, mène à une forme indéterminée.
- b) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 11 :

f est la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4x+5}{x+1}$$

Étudier la limite de la fonction f :

- a. en $+\infty$. b. en -1 .

Exercice 12 :

Soit $f : x \rightarrow -(x-3)^2$, définie pour tout réel x et $g : x \rightarrow -2 + \frac{1}{2x}$ définie pour tout réel $x \neq 0$.

- Tracer les courbes représentatives des fonction f et g entre les abscisses 0 et 10.
- Relever graphiquement à partir de quelle valeur de x on a :
a) $f(x) < -10$ b) $g(x) \in]-2; 0[$
- Conjecturer les limites de f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 13 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2\sin(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cos(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3\cos(x)}{(x+1)^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

Exercice 14 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\sqrt{x+1}}$$

Exercice 15 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+e^x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$$

