

Logarithme népérien

Exercice 1 :

$$\ln 72 = \ln(2^3 \times 3^2) = 3\ln 2 + 2\ln 3 ;$$

$$\ln \frac{1}{8} = -\ln 8 = -\ln(2^3) = -3\ln 2 ;$$

$$\frac{1}{8}\ln 256 = \frac{1}{8}\ln(2^8) = \frac{8}{8}\ln(2) = \ln 2 .$$

$$\ln 250 = \ln(2 \times 5^3) = \ln 2 + 3\ln 5$$

$$\ln 200 = \ln(5^2 \times 2^3) = 2\ln 5 + 3\ln 2$$

$$\ln 1,25 = \ln(125 \times 10^{-2}) = \ln(5^3 \times 5^{-2} \times 2^{-2}) = 3\ln 5 - 2\ln 5 - 2\ln 2 = \ln 5 - 2\ln 2$$

$$\ln 10^{-4} = -4\ln(5 \times 2) = -4\ln 5 - 4\ln 2 .$$

Exercice 2 :

Simplifier les expressions suivantes :

$$a =$$

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel non nul et a un nombre réel strictement positif.

$$S =$$

Exercice 4 :

Etudier les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty .$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2}) = 0 .$

c. $\lim_{x \rightarrow -3} \ln(3-2x-x^2) = -\infty .$

d. $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(\frac{2x+3}{x+1}) = +\infty .$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\frac{2x+3}{x+1}) = \ln 2 .$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x) = 0.$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x+1} = +\infty.$

Exercice 5 :

$$f(x) = \frac{3 \ln x + 1}{x}.$$

$$D_f =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

a. $x =$

b. $x =$

c. $x =$

d.

$$\ln(2x+1) = \ln(2x-3)$$

$$\ln(2x+1) - \ln(2x-3) = 0$$

$$\ln\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right) = 0$$

$$\frac{2x+1}{2x-3} = 1$$

$$2x+1 = 2x-3$$

$$x = -1.$$

e.



Posons $X =$

$$(\ln x)^2 - 2 \ln x - 3 = X^2 - 2X - 3 = 0.$$

$$X^2 - 2X - 3 = (X-1)^2 - 4 = (X-1)^2 - 2^2 = (X-1-2)(X-1+2) = 0$$

$$(X-3)(X+1) = 0.$$

$$X =$$

$$S = \{e^{-1}, e^3\}.$$

Exercice 7 :

$$\begin{cases} x+y=2 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ \ln \frac{x}{y} = \ln 3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ \frac{x}{y}=3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x= \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y+y=2 \\ x= \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x= \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Exercice 8 :

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur l'ensemble D .

a.



b.

$$f(x) = \ln(\sqrt{x}) \quad D =]0; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x}.$$

c.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad D =]-\infty; -1[$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$$

Exercice 9 :

Si a est un zéro de $P(z)$ alors on doit avoir :

$$a^3 + (2i-5)a^2 + 7(1-i)a - 2 + 6i = 0$$

soit

$$a^3 - 5a^2 + 7a - 2 + i(2a^2 - 7a + 6) = 0$$

soit le système d'équations

$$\begin{cases} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 = 0 \\ 2a^2 - 7a + 6 = 0 \end{cases}$$

On constate facilement que 2 vérifie simultanément les deux équations c'est la valeur cherchée.

On écrit donc, b et c étant des complexes

$$\begin{aligned} (z-2)(z^2 + bz + c) \\ = z^3 + bz^2 + cz - 2z^2 - 2bz - 2c \\ = z^3 + z^2(b-2) + z(c-2b) - 2c \end{aligned}$$

Et par identification

$$2i-5 = b-2 \text{ et } b = 2i-3$$

$$-(2-6i) = -2c \text{ et } c = 1-3i$$

On est conduit à résoudre l'équation du second degré à coefficients complexes :

$$z^2 + (2i-3)z + 1-3i = 0$$

$$\Delta = (2i-3)^2 - 4(1-3i) = -4 - 12i + 9 - 4 + 12i = 1$$

D'où les deux racines

$$z' = \frac{3-2i+1}{2} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{3-2i-1}{2}$$

$$z' = 2-i \quad \text{et} \quad z'' = 1-i$$

donc

$$P(z) = (z-2)(z-(2-i))(z-(1-i))$$

Exercice 10 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$1. \ln x > 2$$

$$\ln x > \ln e^2$$

$$x > e^2$$

$$2. 2\ln x - 1 < 5$$

$$2\ln x < 6$$

$$\ln x < 3$$

$$\ln x < \ln e^3$$

$$x < e^3$$

$$3. \ln(2x-1) - \ln(2x+1) \leq \ln(x+2)$$

$$\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right) \leq \ln(x+2)$$

$$\frac{2x-1}{2x+1} \leq x+2$$

$$2x-1 \leq (x+2)(2x+1)$$

$$2x-1 \leq 2x^2+x+4x+2$$

$$2x-1-2x^2-x-4x-2 \leq 0$$

$$-3x-3-2x^2 \leq 0$$

$$2x^2+3x+3 \leq 0$$

Exercice 11 :

Résoudre les équations suivantes :

$$1. \ln(4x^2-1) = \ln(x+2)$$

$$4x^2-1 = x+2$$

$$4x^2-x-3=0$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = 1 + 4 \times 4 \times 3 =$$

$\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes .

$$x_1 = \frac{1+7}{8} ; x_2 = \frac{1-7}{8}$$

$$x_1 =$$

Exercice 12 :

Résoudre les équations suivantes :

$$1. \ln x = 3 \Leftrightarrow x =$$

Exercice 13 :

Simplifier :

$$a = \ln(e^5) = 5\ln e = 5$$

$$b = \ln(e^2\sqrt{e}) = \ln(e^2e^{\frac{1}{2}}) = \ln(e^{\frac{5}{2}}) = \frac{5}{2}\ln e = \frac{5}{2}$$

$$c = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{4}\right) = \ln(\sqrt{e}) - \ln 4 = \frac{1}{2}\ln e - \ln 2^2 = \frac{1}{2} - 2\ln 2$$

$$d = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)^3 = -3\ln e^2 = -6\ln e = -6$$

$$e = \frac{1}{3}\ln e^{27} = \frac{27}{3}\ln e = 9\ln e = 9$$

Exercice 14 :

Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$$a = \ln 18 = \ln(2 \times 3^2) = \ln 2 + 2\ln 3.$$

$$b = \ln \frac{1}{8} = \ln \frac{1}{2^3} = -\ln 2^3 = -3\ln 2$$

$$c = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln \sqrt{3} - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2.$$

$$d = \ln(2e^3) = \ln 2 + 3\ln e = 3 + \ln 2.$$

$$\begin{aligned} e &= 4\ln(\sqrt{6}) - 6\ln(12) = 4 \times \frac{1}{2}\ln(6) - 6\ln(12) = 2\ln(3 \times 2) - 6\ln(2^2 \times 3) \\ &= 2\ln 3 + 2\ln 2 - 12\ln 2 - 6\ln 3 = -10\ln 2 - 4\ln 3. \end{aligned}$$

Exercice 15 :

1. $\ln(3-5x) = 0$ équivaut à $3-5x = e^0 = 1$. Donc $5x = 2$ et $x = 2/5$.

2. On peut transformer l'équation de la manière suivante :

$$2\ln(x-4) = \ln(x) - 2\ln(2) = \ln(x) - \ln(4)$$

En utilisant la propriété $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$, on obtient :

$$\ln((x-4)^2) = \ln\left(\frac{x}{4}\right)$$

Cela équivaut à $(x-4)^2 = \frac{x}{4}$, soit $x^2 - 15x + 16 = 0$.

On résout cette équation du second degré en x et on vérifie que les solutions obtenues sont bien positives et différentes de 4.

3. $\ln(x+4) + \ln(x+1) = \ln(6)$ équivaut à $\ln((x+4)(x+1)) = \ln(6)$, donc $(x+4)(x+1) = 6$.

On résout cette équation du second degré en x et on vérifie que la solution obtenue est bien positive.

4. $\ln(|x+4|) + \ln(|x+1|) = \ln(6)$ signifie que $|(x+4)(x+1)| = 6$, c'est-à-dire que $(x+4)(x+1) = 6$ ou $(x+4)(x+1) = -6$. On résout ces deux équations et on vérifie que les solutions obtenues sont bien positives.

5. On peut réécrire l'équation sous la forme $\ln^3 x - \ln x = 2 - \ln^2 x$.

En posant $y = \ln x$, cela équivaut à $y^3 - y = 2 - y^2$, soit $y^3 - y^2 + y - 2 = 0$.

On peut factoriser cette expression en $(y-2)(y^2 + y + 1) = 0$, donc $y = 2$ ou $y = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$. On vérifie que ces trois valeurs de y correspondent à des solutions de l'équation initiale.

6. $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) < 0$ équivaut à $\frac{2x-3}{5x+1} < 1$ (car $\ln$ est une fonction strictement croissante).

On résout cette inéquation et on trouve $1/3 < x < -1/5$.

7. On peut réécrire l'équation sous la forme $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{3}{2}$.

On pose $y = \ln x$ et on note $f(y) = y - (1/y)$.

L'équation devient $f(y) < 3/2$.

On étudie la fonction $f(y)$: elle est dérivable sur $]0, +\infty[$, sa dérivée est $f'(y) = 1 + \frac{1}{y^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, $f(1) = 0$. On en déduit que l'équation $f(y) < \frac{3}{2}$ est équivalente à $y < f^{-1}(\frac{3}{2})$.

On calcule $f^{-1}(y)$ en résolvant l'équation $y = x - \frac{1}{x}$ en x :

$$y = x - (1/x) \Leftrightarrow x^2 - yx - 1 = 0$$

La solution positive est $x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$, donc $f^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$.

On calcule $f^{-1}(\frac{3}{2})$ et on trouve $f^{-1}(\frac{3}{2}) = \frac{\ln(3 + \sqrt{5})}{2}$.

Finalement, les solutions de l'inéquation sont les x tels que $\ln x < \frac{\ln(3 + \sqrt{5})}{2}$, c'est-à-dire

$$0 < x < e^{\frac{\ln(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2}} \approx 3,57.$$

x	$-\infty$	$\ln \frac{1}{2}$	$+\infty$
f'		0	
f	$\ln 3$	$\ln 2,5$	$+\infty$

x	0	1	e^4	$+\infty$
$\ln x$	$ $	0	+	+
$-\ln x + 4$	$ $	+	+	-
f'	$ $	$ $	+	-
f	$ $	$ $	$\frac{1}{8}$	0

Exercice 16 :

On peut comparer ces deux nombres en regardant la fonction $f(x) = x^{1/x}$, pour $x > 0$.

On a $f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}-1}(1 - \ln(x))}{x^2}$, donc f est croissante sur $]0, e[$ et décroissante sur $]e, +\infty[$.

En particulier, $f(e^{1/e}) \approx 1,44$ est le maximum de f sur $]0, +\infty[$.

On a donc :

$$\pi^e = e^{e \ln \pi} = (e^{\ln \pi})^e = \pi^e = \left(\pi^{\frac{1}{\pi}}\right)^{e\pi} = (\pi^{e\pi})^{\frac{1}{e\pi}} > (e^{\pi})^{\frac{1}{e\pi}} = e^{\frac{\pi}{e}}$$

La dernière égalité est justifiée par le fait que $f(x) > f(e)$ pour $0 < x < e^{1/e}$ et que $f(x) < f(e)$ pour $x > e^{1/e}$.

Finalement, on a :

$$\pi^e > e^{\frac{\pi}{e}}$$

Le nombre π^e est donc plus grand que $e^{\frac{\pi}{e}}$.

Exercice 17 :

g est dérivable sur son ensemble de définition en tant que somme de

fonctions dérivables sur cet intervalle .

$$g'(x) = 4x - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - \frac{1}{x} \geq 0$$

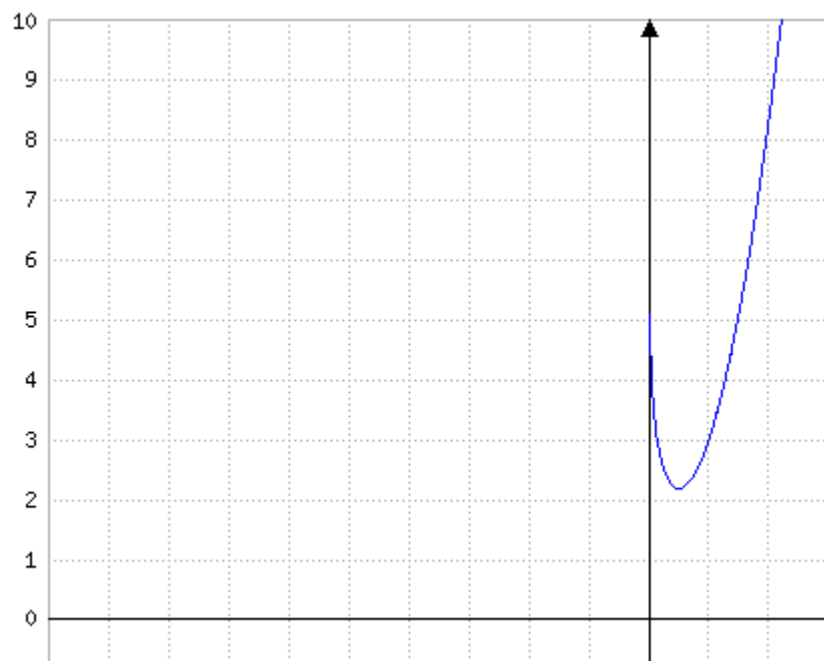
$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(2x-1)}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x+1)(2x-1) \geq 0$$

X	-0,5	0	0,5	
X	-	-	+	+
2x+1	-	+	+	+
2x-1	-	-	-	+
g'(x)	-	+	-	+

Conclusion : sur $\boxed{\times}$, f est croissant sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.



Exercice 18 :

1. Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de la fonction g .

$$g'(x) = -2x - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 - 1}{x}$$

Le signe de g' est celui de $-2x^2 - 1$.

$$-2x^2 - 1 = -2\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$-2x^2 - 1 < 0 \quad \text{sur } \boxed{\times} .$$

donc g est strictement décroissante sur $\boxed{\times}$.

2. Calculer g(1). En déduire le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$g(1) = 1 - 1^2 - \ln 1$$

$$g(1) = 0$$

g est strictement décroissante sur $\boxed{x}$ et $g(1) = 0$.

Conclusion : g est positive ou nulle sur $]0;1]$ et négative sur $[1;+\infty[$.

Exercice 19 :

1) simplifier $\frac{\ln e}{\ln e^2 - \ln(\frac{1}{e})}$

$$\frac{\ln e}{2\ln e + \ln e}$$

$$\frac{\ln e}{3\ln e}$$

$$\frac{1}{3}$$

2) Déterminer le plus petit entier n tel que $1,05^n \geq 1,5$

La fonction ln est strictement croissante sur $\boxed{x}$..

$$\ln(1,05^n) \geq \ln(1,5)$$

$$n \ln(1,05) \geq \ln(1,5) \quad (\ln 1,05 < 0)$$

$$n \leq \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,05)}$$

3) Chaque année, la population d'une ville diminue de 3%. Au bout de combien d'année, la population de cette ville aura-t-elle diminué de plus de 30%

Exercice 20 :

Partie A:

1. Limites de la fonction g en 0 et $+\infty$:

Pour la limite en 0, on peut utiliser le développement de Taylor de $\ln(x)$ au premier ordre, qui est

$$\ln(x) = x - 1 + o(x) \text{ près de } x=0.$$

Ainsi, en utilisant ce développement dans la définition de g, on obtient:

$$g(x) = x - x \ln(x) = x - x(x - 1 + o(x)) = x - x^2 + o(x^2)$$

Comme x^2 est une infinitésimale de plus haut ordre que x, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{o(x^2)} = 0$, ce qui implique que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Pour la limite en $+\infty$, on peut utiliser le lemme de L'Hôpital.

En effet, on a:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

En appliquant le lemme de L'Hôpital, on obtient:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{-1}{\ln^2(x)}} = 0.$$

Donc, la limite de g en $+\infty$ est 0.

2. Calcul de la dérivée de g(x) et justification de la dérivabilité de g sur l'intervalle $\boxed{0, 1}$:

On peut calculer la dérivée de g(x) en utilisant la formule de dérivation de la différence. On a:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)' - (x \ln(x))' \\ &= 1 - (x \ln(x))' \\ &= 1 - (x)' \ln(x) - x(\ln(x))' \\ &= 1 - \ln(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $g'(x) = -\ln(x)$.

Pour montrer que g est dérivable sur l'intervalle $\boxed{0, 1}$, il suffit de montrer que la limite du taux d'accroissement de g(x) quand x tend vers a pour tout $a > 0$ existe et est finie. On a:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) - (x \ln(x) - a \ln(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \ln(x)}{1 - \ln(a)} = \frac{1 - \ln(a)}{1 - \ln(a)} = 1. \end{aligned}$$

Donc, la fonction g est dérivable sur l'intervalle $\boxed{0, 1}$.

3. Tableau de variations de la fonction g:

Pour dresser le tableau de variations de g(x), on peut utiliser sa dérivée g'(x). On a:

- g'(x) est définie et strictement négative sur $\boxed{0, 1}$.
- g'(x) est décroissante sur $\boxed{0, 1}$.
- Le signe de g'(x) change en $x=1$, donc g(x) atteint son minimum en $x=1$.

On obtient alors le tableau de variations suivant pour g(x):

x	0	1	+	%5Cinfty
g'(x)	-	0	-	0
g(x)	0	-1/e	+	1

Partie B:

1. Conjecture de sens de variation et de limite de la suite (u_n) :

a. Pour conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) , on peut calculer les premiers termes de la suite et observer s'ils augmentent ou diminuent. On a:

$$u_1 = e/1^1 \approx 2.718$$

$$u_2 = e^2/2^2 \approx 3.678$$

$$u_3 = e^3/3^3 \approx 1.909$$

$$u_4 = e^4/4^4 \approx 0.581$$

$$u_5 = e^5/5^5 \approx 0.164$$

$$u_6 = e^6/6^6 \approx 0.040$$

On peut remarquer que la suite diminue et atteint des valeurs de plus en plus petites.

b. Pour conjecturer la limite de la suite (u_n) , on peut observer que les termes de la suite décroissent vers 0 à mesure que n augmente.

On peut également utiliser la règle de Stolz-Cesàro pour montrer que la limite de u_n est 0. En effet, on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{(n+1)^{n+1} - n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n+1}/(n+1)^{n+1} - e^n/n^n}{(n+1)^{n+1} - n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n+1}n^n - n^{n+1}e^n}{(n+1)^{n+1}(n^n) - (n^n)(n+1)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n e^n}{n^n(n+1)} \frac{e}{(1+1/n)^{n+1} - 1} \\ &= \frac{e}{e-1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} \\ &= \frac{e}{e-1} \frac{1}{e} = 0. \end{aligned}$$

Donc, la limite de (u_n) est 0.

2. Calcul de la suite (v_n) et détermination de son sens de variation :

a. On peut calculer v_n en utilisant la formule de $\ln(u_n)$.

On a :

$$v_n = \ln(u_n) = n \ln(e) - n \ln(n) = n(1 - \ln(n)).$$

b. Pour déterminer le sens de variation de la suite (v_n) , on peut étudier le signe de sa dérivée

$$v'_n = 1 - \ln(n) - n(-1/n^2) = 1 + 1/n - \ln(n).$$

On observe que la dérivée est positive pour $n=1$ et décroissante sur $]1; +\infty[$, donc la suite (v_n) est décroissante sur $]1; +\infty[$.

3. Montrer que la suite (u_n) est bornée :

On peut montrer que la suite (u_n) est bornée en utilisant l'inégalité de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout $x > -1$ et tout entier naturel n. On a :

$$u_n = \frac{e^n}{n^n} = \left(1 + \frac{e-1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{e-1}{n} \cdot n\right) = e.$$

Ainsi, la suite (u_n) est majorée par e et donc bornée.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite:

On peut utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass pour montrer que la suite (u_n) admet une limite. En effet, comme on a montré que la suite (u_n) est bornée, elle admet une sous-suite convergente.

On peut également utiliser la propriété des suites adjacentes pour déterminer la limite de (u_n) .

Pour cela, on construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n \leq u_n \leq b_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

On peut prendre par exemple:

- $a_n = 0$ pour tout n , et $b_n = e$ pour tout n (on a montré que $u_n \leq e$ pour tout n).

- On a

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n/a_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^2 / ((n+1)^{n+1} \times e^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e / (1+1/n)^{n+1} \\ &= e/e^2 \\ &= 1/e. \end{aligned}$$

Donc, la suite (u_n) converge vers la limite commune des deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) , qui est 0.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2,718	1,847	0,744	0,213	0,047	0,00865	0,00178	0,000178	0,000002

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
g		0 ↗ 1 ↘ $-\infty$	

Exercice 21 :

1. Démonstration de $f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$:

On a $f(x) = \ln(2^x) - \ln(x^2) = x \ln 2 - 2 \ln x$ par les propriétés des logarithmes.

2. Calcul de $f(2)$ et $f(4)$:

On a $f(2) = 2 \ln 2 - 2 \ln 4 = 2 \ln 2 - \ln(16) = 2 \ln 2 - 4 \ln 2 = -2 \ln 2$.

De même, on a $f(4) = 4\ln 2 - 2\ln 16 = 4\ln 2 - 4\ln 2 = 0$.

3. Calcul de la dérivée f' de f :

On peut calculer la dérivée de $f(x)$ en utilisant la formule de dérivation de la différence et les propriétés des logarithmes. On a:

$$f'(x) = (x\ln 2 - 2\ln x)' = x'\ln 2 - (2\ln x)' = \ln 2 - \frac{2}{x}.$$

4. Signe de $f(x)$:

Pour déterminer le signe de $f(x)$, on peut étudier le signe de sa dérivée $f'(x)$:

- $f'(x)$ est définie et strictement négative sur $\boxed{\times}$.

- $f'(x)$ est décroissante sur $\boxed{\times}$.

On en déduit que la fonction f est décroissante sur $\boxed{\times}$.

En particulier, pour tout $x > 2$, on a $f(x) < f(2) = -2\ln 2$.

5. Ensemble des entiers n pour lesquels $2^n \geq n^2$:

On peut réécrire cette inégalité sous la forme d'une exponentielle: $n^2 \leq 2^n$.

On remarque que les deux membres de l'inégalité sont des fonctions croissantes de n pour $n > 0$, donc l'inégalité est vraie pour un nombre fini d'entiers.

On peut ensuite vérifier pour chacun des entiers n si l'inégalité est vraie.

Par exemple, pour $n=1$, on a $2^1 \geq 1^2$, donc l'inégalité est vraie pour $n=1$.

De même, pour $n=2$, on a $2^2 = 4 \geq 2^2$, donc l'inégalité est vraie pour $n=2$.

Pour $n=3$, on a $2^3 = 8 \geq 3^2 = 9$, donc l'inégalité est vraie pour $n=1, 2$ et 3 .

On peut poursuivre le raisonnement pour les valeurs suivantes de n , jusqu'à trouver le plus grand entier satisfaisant l'inégalité:

- Pour $n=4$, on a $2^4 = 16 \geq 4^2 = 16$, donc l'inégalité est vraie pour $n=1, 2, 3$ et 4 .

- Pour $n=5$, on a $2^5 = 32 \geq 5^2 = 25$, donc l'inégalité est vraie pour $n=1, 2, 3, 4$ et 5 .

- Pour $n=6$, on a $2^6 = 64 \geq 6^2 = 36$, donc l'inégalité est vraie pour $n=1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

- Pour $n=7$, on a $2^7 = 128 \geq 7^2 = 49$, donc l'inégalité est vraie pour $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 .

On peut ensuite remarquer que pour tout entier $n \geq 8$, on a $2^n > n^2$, donc l'inégalité n'est plus vraie.

Ainsi, l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $2^n \geq n^2$ est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

x	0	2	$\frac{2}{\ln 2}$	4	$+\infty$	
Signe de f'		-	-	0	+	+
Variations de f	