

Logarithmes

- Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$$\ln 72; \ln \frac{1}{8}; \frac{1}{8} \ln 256.$$

- Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:

$$\ln 250; \ln 200; \ln 1,25; \ln 10^{-4}.$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

$$a =$$

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et a un nombre réel strictement positif.

Calculer la somme :

$$S =$$

Exercice 4

Etudier les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2).$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2}).$

c. $\lim_{x \rightarrow -3} \ln(3-2x-x^2).$

d. $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(\frac{2x+3}{x+1}).$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\frac{2x+3}{x+1}).$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x).$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x+1}.$

Exercice 5 : recherche d'asymptotes.

Indiquer l'ensemble de définition de la fonction f , puis étudier les limites aux bornes de cet ensemble.

Préciser les asymptotes à la courbe représentant f .

$$f(x) = \frac{3 \ln x + 1}{x}.$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

a. $\ln x =$

b. $\ln \frac{1}{x} = 3.$

- c. $\ln x^3 = 27$.
- d. $\ln(2x+1) = \ln(-2x-3)$.
- e. $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$.

Exercice 7

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y=2 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 \end{cases}$$

Exercice 8

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur l'ensemble D .

- a. $f(x) = \ln(-x)$ $D =]-\infty; 0[$.
- b. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ $D =]0; +\infty[$.
- c. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $D =]-\infty; -1[$.

Exercice 9 - Equation du troisième degré dans le corps des complexes

On considère dans l'ensemble des complexes le polynôme :

$$P(z) = z^3 + (2i-5)z^2 + 7(1-i)z - 2 + 6i$$

- 1- Sachant que a étant un réel, on a $P(a) = 0$. Déterminez a.
- 2- Trouvez toutes les solutions de $P(z) = 0$. En déduire une factorisation de $P(z)$.

Exercice 10 - Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

- 1. $\ln x > 2$
- 2. $2\ln x - 1 < 5$
- 3. $\ln(2x-1) - \ln(2x+1) \leq \ln(x+2)$

Exercice 11 - Equations et logarithmes népériens



Exercice 12 - Résoudre des équations logarithmiques

- 1. $\ln x = 3$
- 2. $\ln(3x) = 0$
- 3. $\ln(2x-1) = 3$
- 4. $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1$
- 5. $\ln(x^2) = 4$

Exercice 13 - Simplifier des logarithmes népériens

Simplifier :

$$a = \ln(e^5)$$

$$b = \ln(e^{2\sqrt{e}})$$

$$c = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{4}\right)$$

$$d = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)^3$$

$$e = \frac{1}{3}\ln e^{27}$$

Exercice 14 - Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$

$$a = \ln 18$$

$$b = \ln \frac{1}{8}$$

$$c = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$d = \ln(2e^3)$$

$$e = 4\ln(\sqrt{6}) - 6\ln(12)$$

Exercice 15 -Logarithme népérien ($\ln$)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- $\ln(3-5x) = 0$
- $2\ln(x-4) = \ln x - 2\ln 2$
- $\ln(x+4) + \ln(x+1) = \ln 6$
- $\ln(|x+4|) + \ln(|x+1|) = \ln 6$
- $\ln^3 x + 2\ln^2 x - \ln x - 2 = 0$
- $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) < 0$
- $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{3}{2}$

Exercice 16 -Prise d'initiative et nombres complexes

Lequel de ces deux nombres est le plus grand ?

e^π ou π^e .

Indication :

On peut faire une conjecture à la calculatrice mais on donnera une vraie démonstration.

Exercice 17 -Signe d'une fonction

soit g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln(x)$
quel est le signe de g pour $x > 0$?

Exercice 18 -Dérivée

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $g(x) = 1 - x^2 - \ln(x)$

1. calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de la fonction g
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 19 -Logarithme népérien et simplifications

- 1) simplifier $\frac{\ln e}{\ln e^2 - \ln(\frac{1}{e})}$
- 2) Déterminer le plus petit entier n tel que $1,05^n \geq 1,5$
- 3) Chaque année, la population d'une ville diminue de 3%. Au bout de combien d'année, la population de cette ville aura-t-elle diminué de plus de 30%.

Exercice 20 - Bac et logarithmes

Partie A :

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - x \ln x$.

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que $g'(x) = -\ln x$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g .

Partie B :

soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{e^n}{n^n}$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice ;
 - a. le sens de variation de la suite (u_n) ;
 - b. la limite éventuelle de la suite (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.
 - a. Montrer que $v_n = n - n \ln(n)$.
 - b. En utilisant la partie A, déterminer le sens de variation de la suite (v_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 21 - comparaison entre x^2 et 2^x

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(2^x) - \ln(x^2)$.

1. Démontrer que $f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$.
2. Calculer $f(2)$ et $f(4)$.
3. Calculer la dérivée f' de f .

En déduire les variations de f .

4. A l'aide des questions 2 et 3, préciser le signe de f .
5. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $2^n \geq n^2$.

