

Problème

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Partie 1

Soit f la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x$.

1. (a) Démontrer que la droite (OJ) est une asymptote à la courbe (C) .
 (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ces résultats.
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.
 (b) En déduire les variations de f .
 (c) Dresser le tableau de variation de f .
3. Construire (C) dans le repère (O, I, J) .

Partie 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(t) dt$.
2. On pose $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$.
 (a) Interpréter graphiquement A_n . (b) Vérifier que $A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln n}{n}$. (c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.
3. (a) Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$. Démontrer que :

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \right], \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- (b) En déduire que : $\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \leq A_n \leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$
4. On pose $S_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$.
 (a) Démontrer que : $A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$. (b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

Partie 3

Sachant que pour tout entier naturel non nul n , $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

1. (a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n , $\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.
 (b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$S_n = \frac{1}{12n^4} [n(n+1)]^2 - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{1}{3}.$$

- (c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$.

2. (a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n , $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.
 (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.