

Problème

Page 1/2

Partie 1

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1-x)^n e^{2x}$ et $(\mathcal{C}_{f_n})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{ cm}$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
2. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_{f_n})$ au voisinage de $+\infty$.
3. Calculer $f'_n(x)$, puis dresser le tableau de variation des fonctions f_1 et f_2 .
4. (a) Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_{f_1})$ et $(\mathcal{C}_{f_2})$.
(b) Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $(\mathcal{C}_{f_1})$ et $(\mathcal{C}_{f_2})$.

Partie 2

On considère la fonction F définie sur $] -\infty, 0]$ par : $F(x) = \int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} dt$

1. (a) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $] -\infty, 0[$ et que $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$
(b) Étudier les variations de F .
2. (a) Montrer que $(\forall x < 0), \frac{1}{2} \int_x^0 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_x^0 f_1(t) dt$
(b) En utilisant une intégrale par parties, montrer que : $\int_x^0 f_1(t) dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$
(c) On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \ell$, montrer que $\frac{3}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{4}$.

Partie 3

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

1. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), U_n > 0$.
(b) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
(c) En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),$

$$U_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}U_n$$

(b) En déduire la surface du domaine limité par : $(\mathcal{C}_{f_1})$ et $(\mathcal{C}_{f_2})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
3. Montrer que $(\forall n \geq 2), \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n-1}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$.
4. Soit a un réel positif tel que $a \neq U_1$. On considère les suites $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\begin{cases} V_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}V_n \\ V_1 = a \end{cases} \quad \text{et} \quad d_n = |V_n - U_n|$$

- (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$, puis démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$.
- (b) Montrer que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

Partie 4

Page 2/2

On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*), W_n = \frac{2^n}{n!} U_n$.

1. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \leq 1$.

(b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$, puis en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$.

2. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$.

(b) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \left(\frac{3}{2} - x\right) e^{2x}$, puis montrer que $W_1 = \frac{1}{2}(e^2 - 3)$.

(c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),$

$$W_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right)$$

(d) En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}$.

Exercice 2

On considère l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n e^{1-t}}{n!} dt, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Calculer $I_n(x)$.

2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} ($n \geq 2$).

3. Calculer $I_n(x)$ en fonction de n .

4. Déterminer, pour n fixé, la limite de $I_n(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On pose $J_n = I_n(1) = \int_0^1 \frac{t^n e^{1-t}}{n!} dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n!}$.

6. On pose $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Montrer, en utilisant le calcul de $I_n(x)$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n \leq e \leq U_n + \frac{1}{n!}.$$

7. Calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

On définit la fonction F par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

1) Déterminer le domaine de définition de F .

2) Étudier la parité de F et calculer les limites aux bornes.

3) En utilisant la relation de Chasles, calculer $F'(x)$.

4) Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(On cherchera à majorer $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.)