

Friedrich Wilhelm Bessel

(1784 – 1846)

Inégalité de Bessel :

Soit E un ev et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille orthonormale de E et x un vecteur de E , alors :

$$\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Bac Math&Science

Exercice

- ① Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$
- ① a Étudier la dérivabilité de f à droite en 1.
 - ① b Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- ② Dresser le tableau de variation de f .
- ③ ① a Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
- ③ b Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- ④ On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé.
- ④ a Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C) .
 - ④ b Construire les courbes (C) et (C') .
- ⑤ Soit la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.
- ⑤ a Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $g(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$,
 - ⑤ b Montrer que g réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle K à préciser.
 - ⑤ c Montrer que : $[g(y) = x, y \in [0, \frac{\pi}{2}[\iff \cos y = \frac{2x}{1+x^2}, x \in [1, +\infty[$.
 - ⑤ d Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et pour tout $x \in K$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{x^2+1}$.
- ⑥ On pose $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} g^{-1}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*$.
- ⑥ a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $g^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq g^{-1}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$.
 - ⑥ b En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.