

Bac Math & Science

Problème 4

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 2 + 4 \ln x$.

- 1.a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- 1.b) Dresser le tableau de variation de g .
- 2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 2.b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . Vérifier que $1,1 < \alpha < 1,2$.
- 2.c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{2 \ln x}{x^2}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1.a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et interpréter graphiquement.
- 1.b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1))$. En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.
- 1.c) Étudier la position relative de (C) et Δ .
- 2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
- 2.b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2}{2\alpha^2}$.
- 2.c) Dresser le tableau de variation de f .
- 3.a) Donner l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 1. Vérifier que T est perpendiculaire à Δ .
- 3.b) Montrer que la courbe (C) coupe (Ox) en un point B autre que A d'abscisse β telle que $1,3 < \beta < 1,4$.
- 3.c) Représenter la courbe (C) et les droites Δ et (T) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 3.d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $2x^3 - (m+1)x^2 - 2 \ln x = 0$.
- 4) Soit S l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x = 1$ et $x = \beta$.
- 4.a) Justifier que : $S = - \int_1^\beta f(x) dx$.
- 4.b) En utilisant une intégration par parties, calculer $I = \int_1^\beta \frac{\ln x}{x^2} dx$. Calculer S en fonction de β .