

Livre de L'élève

NB : Ce livre est vendu à 300 FCFA !

&

L'explication du livre est gratuite
sur whatsapp

volume 1

Collection

COMPRENDRE LES NOMBRES COMPLEXES EN 24 HEURES

**Nombres
Complexes**

(10 exercices corrigés)

Terminales

C & D

Mathématiques



Sous la direction de **Mr VIKA Danny & Mr NKODIA Fleury**

EDUCATION

facebook : Bureau du Centre Académique - BCA

PREMIERE PARTIE : ENONCE DES EXERCICES

EXERCICE N°1

Donner la forme algébrique des complexes suivants :

- 1) $Z = 6 + i - (2 + 4i)$; 2) $Z = (1 + 2i)(-4 + 3i)$; 3) $Z = (1 + 4i)^2(2 - 3i)$
4) $Z = \frac{3+5i}{1-2i}$; 5) $Z = \frac{4+2i(1+i)}{2-3i}$; 6) $Z = \frac{1+2i}{3+i} + \frac{5}{3-i}$; 7) $Z = \left(\frac{5-2i}{3-2i}\right)\left(\frac{1-2i}{2+3i}\right)$

EXERCICE N°2

Soit z_0 le nombre complexe défini par : $z_0 = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$.

- 1) Ecrire z_0 sous la forme $a + ib$ où a et b sont des constantes réels.
- 2) Calculer z_0^2 , z_0^3 et z_0^{15} .
- 3) Montrer que $z_0^{3n+2} = -2^{3n+1}(1 + i\sqrt{3})$
- 4) Calculer z_0^{20} .

EXERCICE N°3

Soit U un nombre complexe définie par : $U = (-3 - i\sqrt{3})^{1515}$ et $V = (\sqrt{2} + i\sqrt{6})^{2400}$

- 1) Ecrire le nombre complexe $a = -3 - i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ sous forme la trigonométrique.
- 2) Montrer que U est imaginaire pur et V est un réel.

EXERCICE N°4

On considère le nombre complexe $P = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.

- 1) Calculer P^2
- 2) Déterminer la forme algébrique de P^2 . Déduire le module et l'argument de P .
- 3) Montrer que $[\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)]^{2004} = -2^{3006}$

EXERCICE N°5

On considère dans $\mathbb{C}$ trois complexes définis par : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ et $Z = z_1^3 \times z_2$.

- 1) Déterminer la forme algébrique de Z .
- 2) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .
- 3) Déterminer la forme trigonométrique et exponentielle de Z .
- 4) Justifier alors que : $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

5) Vérifier que la relation $\cos^2 \frac{17\pi}{12} + \sin^2 \frac{17\pi}{12} = 1$.

6) En déduire $\tan \frac{17\pi}{12}$.

EXERCICE N°6

Soit $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$; $z_2 = -2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme algébrique.

2) On pose $Z = \frac{z_1}{z_2}$. Déterminer :

a) Les parties réelle et imaginaire de Z .

b) La forme trigonométrique de Z .

c) Les valeurs de $\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right)$ et $\sin \left(\frac{5\pi}{12} \right)$.

EXERCICE N°7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z^2 - 3z - 5 = 0$; b) $z^2 + 3 = 0$; c) $z^2 - (2\sqrt{3})z + 4 = 0$; d) $z^2 + 8z + 16 = 0$

e) $z^2 - (1 + 2i)z + \frac{1}{2} + i = 0$; f) $z^2 + 4i = 0$; g) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$

EXERCICE N°8

1) Déterminer les racines carrées des complexes suivants : $a = 16 - 30i$; $b = -33 + 56i$

2) Trouver les racines cubiques du nombre complexe $a = -4\sqrt{3} + 4i$

EXERCICE N°9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation * suivante : $4Z^2 + 8|Z|^2 - 3 = 0$

EXERCICE N°10

Trouver dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les nombres Z_1, Z_2 et Z_3 tels que :

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = -3 + i \\ i\bar{Z}_2 = 1 - 2i \\ Z_2 \times Z_3 = -1 - 2i \end{cases}$$

DEUXIEME PARTIE : CORRIGE DES EXERCICES

SOLUTION EXERCICE N°1 Donnons la forme algébrique des complexes suivants :

- 1) $Z = 6 + i - (2 + 4i) = (6 - 2) + i(1 - 4) = 4 - 3i$
- 2) $Z = (1 + 2i)(-4 + 3i) = -4 + 3i - 8i - 6 = (-4 - 6) + i(3 - 8) = -10 - 5i$
- 3) $Z = (1 + 4i)^2(2 - 3i) = (1 + 4i)(1 + 4i)(2 - 3i) = (1 + 4i + 4i - 16)(2 - 3i) = (-15 + 16i)(2 - 3i) = -30 + 45i + 32i + 48 = 18 + 77i$
- 4) $Z = \frac{3+5i}{1-2i} = \frac{(3+5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i+5i-10}{1+2i-2i+4} = \frac{-7+11i}{5} = -\frac{7}{5} + i\frac{11}{5}$
- 5) $Z = \frac{4+2(1+i)}{2-3i} = \frac{6+2i}{2-3i} = \frac{(6+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{12+18i+4i-6}{4+6i-6i+9} = \frac{6+22i}{13} = \frac{6}{13} + i\frac{22}{13}$
- 6) $Z = \frac{1+2i}{3+i} + \frac{5}{3-i} = \frac{(1+2i)(3-i)+5(3+i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-i+6i+2+15+5i}{9-3i+3i+1} = \frac{20+10i}{10} = 2 + i$
- 7) $Z = \left(\frac{5-2i}{3-2i}\right)\left(\frac{1-2i}{2+3i}\right) = \frac{(5-2i)(1-2i)}{(3-2i)(2+3i)} = \frac{5-2i-2i-4}{6+9i-4i+6} = \frac{1-4i}{12+5i} = \frac{(1-4i)(12+5i)}{(12+5i)(12-5i)} = \frac{12+5i-48i+20}{144-60i+60i+25} = \frac{32-43i}{169} = \frac{32}{169} - \frac{43}{169}i$

SOLUTION EXERCICE N°2

1) Soit $z_0 = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}} = \frac{(5+3i\sqrt{3})(1+2i\sqrt{3})}{(1-2i\sqrt{3})(1+2i\sqrt{3})} = \frac{5+10i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-18}{1+2i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}+12} = \frac{-13+13i\sqrt{3}}{13}$

D'où

$z_0 = -1 + i\sqrt{3}, \text{ avec } a = -1, b = \sqrt{3}.$

2) Calcul de z_0^2 et z_0^3 puis z_0^{15} .

Soit $|z_0| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et $\arg z_0 = \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \\ \sin \theta = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Alors on a :

- $z_0^2 = \left[(2)^2; 2 \times \frac{2\pi}{3}\right] = \left[4; \frac{4\pi}{3}\right] = 4 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 4 \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 4 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D'où $z_0^2 = 2(-1 - i\sqrt{3}) = 2\bar{z}_0$.

- $z_0^3 = z_0^2 \times z_0 = 2(-1 - i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3}) = 2(1 - i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 3) \Rightarrow z_0^3 = 8$
- $z_0^{15} = (z_0^3)^5 = (8)^5 \Rightarrow z_0^{15} = 32768$.

3) Soit $z_0^{3n+2} = z_0^{3n} \times z_0^2 = (z_0^3)^n \times z_0^2 = (8)^n(-2 - 2i\sqrt{3}) = -2(2^3)^n(1 + i\sqrt{3}) = -(2)(2)^{3n}(1 + i\sqrt{3})$

Donc $z_0^{3n+2} = -2^{3n+1}(1 + i\sqrt{3})$.

4)

On a : $z_0^{20} = -2^{19}(1 + i\sqrt{3}) = 2^{19}(-1 - i\sqrt{3}) = 2^{19}\bar{z}_0$.

SOLUTION EXERCICE N°3 :

1) Forme trigonométrique

$$a = -3 - i\sqrt{3}, |a| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}; \arg a = \begin{cases} \cos \theta = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\theta = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi. \quad \text{D'où} \quad \boxed{a = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)}.$$

$$b = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, |b| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}; \arg b = \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} > 0 \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\theta = \left(\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi. \quad \text{D'où} \quad \boxed{b = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)}.$$

2) Montrons que U est imaginaire pur et V est un réel.

$$U = (-3 + i\sqrt{3})^{1515} = a^{1515} = \left[2\sqrt{3}; \frac{7\pi}{6}\right]^{1515} = \left[(2\sqrt{3})^{1515}; 1767,5\pi\right] \\ = (2\sqrt{3})^{1515} [\cos(1767,5\pi) + i \sin(1767,5\pi)] = (2\sqrt{3})^{1515} [0 + i(-1)].$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{U = -i(2\sqrt{3})^{1515} \in i\mathbb{R}}$$

$$V = (\sqrt{2} + i\sqrt{6})^{2400} = b^{2400} = \left[2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]^{2400} = \left[(2\sqrt{2})^{2400}; 800\pi\right] \\ = (2\sqrt{2})^{2400} [\cos(800\pi) + i \sin(800\pi)] = (2\sqrt{2})^{2400} [-1 + i(0)] = -((2\sqrt{2})^4)^{600}$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{V = -((2\sqrt{2})^4)^{600} = -(64)^{600} \in \mathbb{R}}$$

SOLUTION EXERCICE N°4

$$1) \quad P = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow P^2 = [\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)]^2 \\ = [\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)][\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)] = (\sqrt{3} + 1)^2 + 2i(\sqrt{9} - 1) - (\sqrt{3} - 1)^2 \\ = 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4i - 3 + 2\sqrt{3} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{P^2 = 4\sqrt{3} + 4i = 4(\sqrt{3} + i)}$$

3) On cherche d'abord le module et un argument de P^2 tels que :

$$|P^2| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (4)^2} = \sqrt{64} = 8 \quad \text{et} \quad \arg P^2 = \begin{cases} \cos \theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \\ \sin \theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \theta = \arg P^2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi. \quad \text{D'où} \quad \boxed{P^2 = 8 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)}$$

Déduisons le module et un argument de W .

$$\text{On sait que } |P^2| = 8 \Leftrightarrow |P|^2 = 8 \Leftrightarrow \boxed{|P| = 2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \arg P^2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \Rightarrow 2\arg(P) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\arg P = \frac{\pi}{12} + k\pi}.$$

4) Démonstration

$$\begin{aligned}
 [\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)]^{2004} &= \left[(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1))^3 \right]^{668} \\
 &= \left[(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1))^2 (\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)) \right]^{668} \\
 &= \left[4(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)) \right]^{668} = [8(2 + 2i)]^{668} \\
 &= \left[(8(2 + 2i))^2 \right]^{334} = [64(2 + 2i)(2 + 2i)]^{334} \\
 &= [(512i)]^{334} = [(2i)^9]^{334} = (2i)^{9 \times 334} = (2i)^{3006} = i^{3006} 2^{3006}, \text{ or } i^{3006} = ((i^2))^{1503} = -1
 \end{aligned}$$

Donc :
$$[\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)]^{2004} = -2^{3006}$$

SOLUTION EXERCICE N°5

1) Forme algébrique de Z .

$$\begin{aligned}
 Z = z_1 \times z_2 &\Rightarrow Z = (1 + i)^3 (-1 + i\sqrt{3}) = (1 + 2i - 1)(1 + i)(-1 + i\sqrt{3}) \\
 &= (-2 + 2i)(-1 + i\sqrt{3}) \\
 &= 2 - 2i\sqrt{3} - 2i - 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

D'où
$$Z = 2[(1 - \sqrt{3}) + i(-1 - \sqrt{3})].$$

2) Déterminons le module et argument de z_1 et z_2 .

$$z_1 = (1 + i)^3 \Rightarrow |z_1| = \left(\sqrt{(1)^2 + (1)^2} \right)^3 = |z_1| = 2\sqrt{2} \text{ et } \arg z_1 = 3 \times \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\arg z_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ et } z_2 = -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = |z_2| = 2 \text{ et}$$

$$\arg z_2 = \begin{cases} \cos \theta = \frac{-1}{2} < 0 \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \arg z_2 = \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

3) Déterminons la forme trigonométrique de Z .

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } |Z| &= |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2} \text{ et } \arg Z = (\arg z_1 + \arg z_2) + 2k\pi \Rightarrow \\
 \arg Z &= \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) + 2k\pi = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi.
 \end{aligned}$$

Donc
$$Z = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

4) En comparant les formes trigonométriques et algébriques de Z trouvées dans 1) et 3) on a :

$$4\sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) = 2[(1 - \sqrt{3}) + i(-1 - \sqrt{3})]$$

Alors par identification on a :
$$\begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \frac{17\pi}{12} = 1 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \sin \frac{17\pi}{12} = -1 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ Donc } \begin{cases} \cos \frac{17\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{17\pi}{12} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

5) En considérant les valeurs trouvées précédemment dans 4) on a procédé comme suite :

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{17\pi}{12} + \sin^2 \frac{17\pi}{12} &= \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{8} + \frac{(-1-\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})}{8} \\ &= \frac{(1-2\sqrt{3}+3)+(1+2\sqrt{3}+3)}{8} = \frac{8}{8} = 1\end{aligned}$$

Donc $\cos^2 \frac{17\pi}{12} + \sin^2 \frac{17\pi}{12} = 1$

6) On a : $\tan \frac{17\pi}{12} = \frac{\sin \frac{17\pi}{12}}{\cos \frac{17\pi}{12}} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(-1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{-1-2\sqrt{3}-3}{(1)^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{-4-2\sqrt{3}}{-2} = 2 + \sqrt{3}$

SOLUTION EXERCICE N°6

1) Ecrivons z_1 et z_2 sous la forme algébrique.

On a : $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$

On a : $z_2 = -2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

2) a) Les parties réelle et imaginaire de Z .

On a : $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})} = \frac{((\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}+i\sqrt{2}))}{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}+i\sqrt{2}+i^2\sqrt{2}}{2+2i-2i+2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$

Donc $\mathcal{R}_e(Z) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\mathcal{I}m(Z) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

b) La forme trigonométrique de Z .

On a : $|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = 1$ et $\arg Z = (\arg z_1 - \arg z_2) + 2k\pi \Rightarrow$

$\arg Z = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi.$ D'où $Z = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$

c) En comparant les formes trigonométriques et algébriques de Z trouvées dans a) et b) on a :

$1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Alors par identification on a : $\begin{cases} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

SOLUTION EXERCICE N°7 :

a) $2z^2 - 3z - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49 > 0$

D'où $z = \frac{3-\sqrt{49}}{2 \times 2} = -1$ ou $z = \frac{3+\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5}{2}$. Donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{ -1; \frac{5}{2} \right\}$

b) $z^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \pm 3i^2 \Leftrightarrow z = i\sqrt{3}$ ou $z = -i\sqrt{3}$. Donc $S_{\mathbb{C}} = \{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$

c) $z^2 - (2\sqrt{3})z + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(4) = 12 - 16 = -4 < 0$

D'où $z = \frac{2\sqrt{3} \pm i\sqrt{-4}}{2} = \sqrt{3} - i$ ou $z = \frac{2\sqrt{3} + i\sqrt{-4}}{2} = \frac{6+2i}{4} = \sqrt{3} - i$. Donc $S_{\mathbb{C}} = \{\sqrt{3} - i; \sqrt{3} - i\}$

d) $z^2 + 8z + 16 = 0 \Rightarrow \Delta = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

D'où $z = z_0 = \frac{-8}{2} = -4$. $S_{\mathbb{C}} = \{-4\}$

e) $z^2 - (2+i)z + \frac{1}{2} + i = 0 \Rightarrow \Delta = (-2-i)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{2} + i\right) = 3 + 4i - 2 - 4i = 1 > 0$

D'où $z = \frac{2+i-\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}(-1+i)$ ou $z = \frac{2+i+\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}(1+i)$. Donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{1}{2}(-1+i); \frac{1}{2}(1+i) \right\}$

f) $z^2 + 4i = 0 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{2}i \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{(1+i)^2} \Leftrightarrow z = 1+i$ ou $z = -1-i$.

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{1 + i; -1 - i\}$

g) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0 \Rightarrow \Delta = (3 - 4i)^2 - 4(1)(-1 + 5i) = -7 + 24i + 4 - 20i$
 $\Rightarrow \Delta = -3 + 4i$. Cherchons d'abord les racines carrées de Δ

Posons $Z = x + iy$ et $\Delta = -3 + 4i$, $|\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |u| = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = \text{Re}(\Delta) = -3 & (2) \\ 2xy = \text{Im}(\Delta) = 4 & (3) \end{cases}$$

En faisant la somme des équations (1) + (2), on obtient $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

En faisant la différence des équations (1) - (2), on obtient $2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = -2$

D'après l'équation (3), on a : $2xy = 4 \Leftrightarrow xy = 2 > 0$

Donc x et y sont de même signe, d'où les racines carrées de $\Delta = -3 + 4i$ sont :

$$\sqrt{\Delta} = 1 + 2i \text{ ou } \sqrt{\Delta} = -1 - 2i$$

Alors $z = \frac{3+4-(1+2i)}{2} = 1 + i$ ou $z = \frac{3+4+(1+2i)}{2} = 2 + 3i$. Donc $S_{\mathbb{C}} = \{1 + i; 2 + 3i\}$

EXERCICE N°8

Déterminons les racines carrées des complexes suivants : $a = 16 - 30i$; $b = -33 + 56i$

Posons $Z = x + iy$ et $a = 16 - 30i$, $|a| = \sqrt{(16)^2 + (-30)^2} = \sqrt{1156} = 34$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |a| = 34 & (1) \\ x^2 - y^2 = \text{Re}(a) = 16 & (2) \\ 2xy = \text{Im}(a) = -30 & (3) \end{cases}$$

En faisant la somme des équations (1) + (2), on obtient $2x^2 = 50 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -5$

En faisant la différence des équations (1) - (2), on obtient $2y^2 = 18 \Leftrightarrow y = 3$ ou $y = -3$

D'après l'équation (3), on a : $2xy = -30 \Leftrightarrow xy = -15 < 0$

Donc x et y sont de même signe, d'où les racines carrées de $a = 16 - 30i$ sont :

$$\sqrt{a} = 5 - 3i \text{ ou } \sqrt{a} = -5 + 3i$$

Posons $Z = x + iy$ et $b = -33 + 56i$, $|b| = \sqrt{(-33)^2 + (56)^2} = \sqrt{4225} = 65$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b = 65 & (1) \\ x^2 - y^2 = \text{Re}(b) = -33 & (2) \\ 2xy = \text{Im}(b) = 56 & (3) \end{cases}$$

En faisant la somme des équations (1) + (2), on obtient $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$

En faisant la différence des équations (1) - (2), on obtient $2y^2 = 98 \Leftrightarrow y = 7$ ou $y = -7$

D'après l'équation (3), on a : $2xy = 56 \Leftrightarrow xy = 28 > 0$

Donc x et y sont de même signe, d'où les racines carrées de $b = -33 + 56i$ sont :

$$\sqrt{b} = 4 + 7i \text{ ou } \sqrt{b} = -4 - 7i$$

Trouvons les racines cubiques du nombre complexe $u = -4\sqrt{3} + 4i$

Soit $u = -4\sqrt{3} + 4i$, $|a| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (4)^2} = 8$ et $\arg a = \begin{cases} \cos \theta = \frac{-4}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{2} < 0 \\ \sin \theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \theta = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

On a : $Z^3 = [\rho; \alpha]^3$. Posons $Z^3 = u \Rightarrow [\rho^3; 3\alpha] = \left[8; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right] \Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[3]{8} \\ \alpha = \frac{5\pi + 12k\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = ((2)^3)^{1/3} \\ \alpha = \frac{5\pi + 12k\pi}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \alpha = \frac{5\pi + 12k\pi}{18} \end{cases} \text{ D'où } Z_k = \rho e^{i\alpha} \text{ avec } k \in \{0; 1; 2\}$$

Donc les racines cubiques de $u = -4\sqrt{3} + 4i$ sont : $\left\{ 2e^{i\frac{5\pi}{18}}; 2e^{i\frac{17\pi}{18}}; 2e^{i\frac{29\pi}{18}} \right\}$

SOLUTION EXERCICE N°9

Soit l'équation * suivante : $4Z^2 + 8|Z|^2 - 3 = 0$

Posons $Z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|Z|^2 = x^2 + y^2$

On alors :

$$4(x^2 - y^2 + 2ixy) + 8(x^2 + y^2) = 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4y^2 + 8ixy + 8x^2 + 8y^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$12x^2 + 4y^2 - i(8xy) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + 4y^2 + 8xy = 3 \\ 8xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + 4y^2 + 8xy = 3 \quad (1) \\ xy = 0 \quad (2) \end{cases}$$

D'après (2), on a : $xy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

- Pour $x = 0$ dans (1), on a : $4y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4}$ c'est-à-dire : $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Pour $y = 0$ dans (1), on a : $12x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

D'où les solutions de cette équation * dans $\mathbb{C}$ sont : $\left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$

SOLUTION EXERCICE N°10

Trouvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les nombres Z_1, Z_2 et Z_3 .

Soit le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = -3 + i & (1) \\ i\overline{Z_2} = 1 - 2i & (2) \\ Z_2 \times Z_3 = -1 - 2i & (3) \end{cases}$$

D'après (2), on a : $i\overline{Z_2} = 1 - 2i \Leftrightarrow \overline{Z_2} = i(-2 - i) \Leftrightarrow \overline{Z_2} = -2 - i \Leftrightarrow$

$Z_2 = \overline{-2 - i} = -2 + i$ (4). En remplaçant (4) dans (1) et (3), on obtient

$$\begin{cases} Z_1 - 2 + i = -3 + i \\ (-2 + i)Z_3 = -1 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = -3 + 2 \\ i(1 + 2i)Z_3 = -(1 + 2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = -1 \\ iZ_3 = i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = -1 \\ Z_3 = i \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} Z_1 = -1 \\ Z_2 = -2 + i \\ Z_3 = i \end{cases}$ dans $\mathbb{C}$

Livre de L'eleve

Ce livre intitulé " Comprendre les Nombres Complexes en 24 h " a été écrit par l'équipe éducative du BCA sous la direction de Mr VIKA Danny & Mr NKODIA Fleury dans le but de hisser le niveau de l'élève à une dimension salubre en Mathématiques.

Chef Conseiller du BCA :
MR VOUMBI GERVY



EDUCATION

Pour les encadrements en présentiel, à domicile & en ligne,
veillez contacter la direction du B.CA

Tél ou Whatsapp : +242 06 713 32 41 / 06 741 73 10 / 05 583 17 64

Nos Adresses (Pointe-Noire/République du Congo) :

Site N°1 : Sis au Quartier Vindoulou

Site N°2 : Sis au Quartier Makayabou-418

Site N°3 : Sis au Quartier Kouï-Kou

NB : Tous droits de ce dit livre sont réservés au BCA Education.