

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 :

Soit le nombre complexe $z = \sqrt{2}(1-i)$.

Déterminer le module et l'argument de z . en déduire sous la forme cartésienne $a+ib$, le nombre complexe z^{33}

Exercice 2 :

On donne les deux nombres complexes $z_1 = 1-i\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{2}(-1+i)$.

Déterminer le module et l'argument de chacun des deux nombres z_1 et z_2 ainsi que le module et l'argument de leur produit $z_1 \times z_2$.

Exercice 3 :

- 1) Calculer les racines carrées de nombre complexe $-1-4i\sqrt{3}$.
- 2) Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation $z^2 - iz + i\sqrt{3} = 0$.

Exprimer chacune des racines sous forme trigonométrique. On désigne par z' la racine de module 1, z'' l'autre racine. Calculer le module et l'argument de $p = z' \times z''$ et $q = \frac{z'}{z''}$.

Exercice 4 :

On considère le nombre complexe suivants $z_1 = -(\sqrt{3}+i)$ et $z_2 = 1+i$.

On pose $z_0 = \frac{z_1}{z_2}$.

- 1) Déterminer le module et l'argument de z_0 .
- 2) Ecrire z_0 sous la forme $A+iB$. En utilisant les résultats précédents calculer $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

Exercice :

I) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

- 1) $(1+i)z^3 - 3z^2 + (7-i)z - 5 - 10i = 0$ sachant que cette dernière admet une solution imaginaire.
- 2) $2(1+i)z^3 + (4-2i)z^2 + (i-5)z + 3 = 0$
- 3) $(1-i)z^3 + 3z^2 - (4-i)z + 5(1+i) = 0$
- 4) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$
- 5) $z^6 - (1-2i)z^3 - 1 - i = 0$

II) Linéariser $\cos^4 \theta$; $\cos^3 \theta$ et $\sin^4 \theta$.

III) Vérifier que $2-i$ est une racine cubique de $2-11i$. Donner ensuite les trois cubiques de $2-11i$

Exercice 5 :

Soit l'équation $(E): z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2-2i = 0$

- 1) Démontrer que i est solution de (E) et terminer la résolution de (E) dans $\mathbb{C}$.
- 2) Démontrer que les trois solutions de (E) sont les premiers termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme i dont on donnera la raison et le quinzième ($15^{\text{ème}}$) terme.
- 3) Déterminer n pour que u_n soit élément de $\mathbb{N}$.

Exercice 6 :

Soit z le nombre complexe défini par $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$.

Soit $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

- 1) Montrer que $S = \bar{T}$ et que $\text{im}(S) > 0$
- 2) Calculer $S+T$ et ST ; en déduire S et T .

Exercice 7 :

Soit $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$

- 1) Montrer que l'équation admet une solution unique réelle z_1 . Terminer la résolution de cette équation on appellera z_2 et z_3 les solutions de cette équations non réelles vérifiant : $|z_2| > |z_3|$. Ecrire z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
- 2) Soit M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_2 et z_3 . Ecrire $\frac{z_2}{z_3}$ sous forme trigonométrique.

En déduire que le triangle $OM_2 M_3$ est rectangle en O .

Exercice 8 :

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$$

- 1) Montrer que si z_0 est solution de l'équation $f(z) = 0$ alors $\bar{z}_0$ et $\frac{1}{z_0}$ sont aussi solution de cette équation.
- 2) Calculer $f(1+i)$ et résoudre $f(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

- 3) Ecrire $f(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficient réel.

Exercice 9 :

Soit z le nombre complexe défini par $z = \sqrt{3} + i$. Comment doit-on choisir le nombre entier relatif n pour que z^n soit un nombre imaginaire pur ?

Exercice 10 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + 1 = 0$; on pose $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Montrer que les solutions de l'équation précédente sont les six premiers termes d'une suite géométrique de premier terme .

- 2) On désigne par A,B,C,D,E,F les points d'affixes respectives $2\alpha, 4\alpha^3, 4\alpha^5, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^3}, \frac{2}{\alpha^5}$.

Représenter ces six points dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que ces six points sont éléments d'un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICES SUR LA NOTION DE LA PROBABILITE

Exercice 1 :

Dans un jeu de 32 cartes, on choisit au hasard quatre cartes (tirages sans remise), trouver la probabilité de chacun des événements suivants :

- 1) Il y a eu au moins un roi parmi les quatre cartes.
- 2) Les quatre cartes sont de la même couleur.
- 3) Les quatre cartes sont de couleurs différentes.
- 4) Les quatre cartes sont formées de trois cartes d'une même couleur et une carte d'une autre couleur.

Exercice 2 :

90 billets de loteries sont numérotés 10 ; 11 ; 12 ; ... ; 99. Les billets gagnants sont terminés par 0 ou 5. Possédant quatre billets, quelle est la probabilité :

- 1) D'avoir un seul billet gagnant.
- 2) D'avoir au moins un billet gagnant.

Exercice 3 :

Dans un sac se trouve quatre pièces de 10francs, trois pièces de 25francs et une pièce de 50francs.

- 1) On tire au hasard une à une (simultanément) deux pièces du sac :
 - a) Quel est le nombre de tirage possibles ?

- b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux pièces de même couleur ?
- 2) On tire maintenant toujours au hasard une à une et simultanément trois pièces de ce sac :
 - a) Quel est le nombre de tirage possibles ?
 - b) Quelle est la probabilité d'obtenir la somme de 85 ?
 - c) Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une pièce de 10francs ?
- 3) Reprendre 1) et 2) avec le cas d'un tirage une à une sans remise.
- 4) Reprendre 1) et 2) avec le cas d'un tirage une à une avec remise.

Exercice 4 :

On dispose d'un jeu de bellotte de 32 cartes : 16 comporte 8cœurs, 8carreaux, 8piques et 8 trèfles.

- 1) Je tire une première carte, je note la carte tirée et je la remets dans le jeu et je procède de même trois autres fois (quatre tirages)
 - a) Combien il y a-t-il de façon de tirer ces quatre cartes ?
 - b) Combien de tirage commence par un cœur ?
 - c) Combien de tirage ne contienne qu'un cœur ?
- 2) Je tire quatre cartes à la fois sans tenir compte de l'ordre
 - a) Combien il y a-t-il de tirage distinct ?
 - b) Combien de tirage ne contienne qu'un cœur ?

Exercice 5 :

- 1) Sur un bateau on dispose pour faire des signaux de 4 pavillons dont deux rouges, un bleu et un vert :
Combien de signaux différents peut -on former en alignant verticalement ces quatre pavillons ?
- 2) Même question si l'on dispose de trois rouges, un bleu et un vert tous aligner verticalement.
- 3) Même question si l'on aligne quatre rouges, deux bleu et deux verts.

Exercice 6 :

- 1) Déterminer le nombre de mots de quatre lettres que l'on peut former avec les lettres de mots « conflit ».
- 2) Combien de ces mots contiennent seulement les consonnes ?
- 3) Combien de ces mots commence et se termine par une consonne ?
- 4) Combien de ces mots commencent par une voyelle ?
- 5) Combien de ces mots commence par f et se termine par f ?

Exercice 7 :

Dans une chaine de fabrication, une pièce doit passer sur cinq machines A, B, C, D, E.

- 1) Combien y a-t-il de trajets possibles si l'ordre de passage sur les diverses machines est indifférent ?
- 2) Combien de trajets si la pièce doit passer en A avant B et D et en C avant E ?

Exercice 8 :

- 1) Un sac contient 24 grains de haricots : 8 rouges et 16 blancs. On tire au hasard trois grains dans le sac. Quelle est la probabilité d'obtenir trois rouges ? celle d'obtenir trois blancs ? celle d'obtenir un rouge et deux blancs ?
- 2) Le sac contient n grains rouges et $2n$ grains blancs. On tire trois grains. Quelle est la probabilité P_n d'obtenir un rouge et deux blancs ? la suite P_n est-elle convergente ?

Exercice 9 :

Dans une urne il y a trois boules blanches et deux boules noires. On tire au hasard deux boules l'une après l'autre.

- 1) Quelle est la probabilité de l'évènement A : « la première est blanche la seconde est noire » dans chacun des deux cas suivants :
 - a) On tire on ne la remet pas dans l'urne.
 - b) On tire la boule, on ne la remet pas dans l'urne après ce tirage
- 2) Quelle est la probabilité de l'évènement B : « les deux boules sont de couleurs différentes » dans chacun de ces deux cas ci-dessus.

Exercice 10 :

On veut élire un comité de quatre personnes choisit parmi douze.

- 1) De combien de manières peut-on former ce comité ?
- 2) De combien de manière si Monsieur X refuse de siéger avec Monsieur Y ?
- 3) De combien de manière si Monsieur Z ne veut siéger qu'en présence de Monsieur T ?
- 4) Parmi les douze personnes, il y a sept hommes et cinq femmes, combien de manière de former un comité composé de deux hommes et deux femmes ? et si en plus Monsieur A ne veut pas siéger avec Madame B ?

Exercice 11 :

On écrit sur 26 cartons les 26 lettres de l'alphabet. On tire simultanément 5 de ces cartons.

- 1) Combien y a-t-il de tirages différents ?
- 2) Combien de tirage contiennent 3 consonnes et 2 voyelles ?
- 3) Combien de tirage contiennent la lettre B ?
- 4) Combien de tirage contiennent les lettres A et B ?
- 5) Combien de tirage contiennent au moins une voyelle ?

Exercice 12 :

Dans une urne se trouve six boules blanches numéroté de 1 à 6 et cinq boules rouges numéroté de 1 à 5.

On extrait au hasard et simultanément quatre boules de l'urne ; on admet que tous les tirages de quatre boules sont équiprobables. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « les quatre boules sont blanches ».

B : « il y a, parmi les quatre boules, au moins une boule blanche ».

C : « parmi les quatre boules, il y a exactement une boule blanche et exactement une numéroté 3 ».

Exercice 13 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On en tire trois simultanément, on suppose l'équiprobabilité des tirages de trois cartes. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

A : « obtenir exactement un cœur »

B : « obtenir exactement un valet »

C : « obtenir exactement un cœur et un valet ».

Exercice 14 :

Un jour tire l'une après l'autre quatre cartes d'un jeu de 52 cartes (tirage sans remise).

- 1) Quelle est la probabilité P_1 pour que les quatre cartes soient des piques ?
- 2) Quelle est la probabilité P_2 pour que les quatre cartes soient des cœurs ?
- 3) Quelle est la probabilité P_3 pour qu'il ait un cœur exactement ?
- 4) Quelle est la probabilité P_4 pour qu'il ait un cœur et un pique ?

Exercice 15 :

Vingt chevaux sont au départ d'une course. Seule nous intéresse l'arrivée des trois premiers chevaux.

- 1) Je joue trois numéros. Quelle est la probabilité pour que je gagne « dans l'ordre » ; « dans le désordre » ?
- 2) Je joue maintenant cinq numéros. Quelle est la probabilité pour que je gagne le tiercé dans l'ordre ; dans le désordre ?

Exercice 16 :

Une urne contient cent billets numérotés de 1 à 100.

- 1) On extrait un billet de l'urne. Sachant que chaque billet a la probabilité d'être extrait, quelle est la probabilité d'obtenir un billet dont le numéro est terminé par le chiffre 2 ?
- 2) On tire deux billets de l'urne simultanément. Donner le nombre de tirages différents possibles.
- 3) Ces billets sont utilisés pour une tombola. Chaque billet dont le numéro est terminé par un chiffre 2 donne droit à un lot. On extrait simultanément deux billets de l'urne. Les événements élémentaires attachés à cette expérience sont équiprobables.

Soit A l'événement : « gagner un lot et un seul ».

Soit B l'événement : « gagner deux lots »

Soit C l'événement : « gagner au moins un lot ».

Calculer la probabilité des événements A, B, C.

Exercice 17 :

On considère deux dés cubiques :

- Un dé rouge dont trois faces sont numérotées 0, deux faces sont numérotées 1 et une face est numérotée 2 ;
- Un dé vert dont ces faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On lance le dé rouge puis le dé vert et on lit successivement les chiffres inscrits sur les faces supérieures.

Soit E l'ensemble des éventualités liées à cette expérience (on pourra considérer E comme le produit cartésien de deux ensembles que l'on précisera les faces d'un dé étant des objets physiquement distincts).

Définir l'ensemble E en compréhension.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le produit des chiffres obtenus.

- 1) a) Déterminer $X \in$ en extension.
b) Quelle est la distribution de cette variable aléatoire ?
- 2) Quelle est la probabilité pour cette variable aléatoire prenne une valeur impaire ?

Exercice 18 :

On considère un sac contenant quatre boules blanches et deux boules rouges indiscernable au toucher.

Une expérience consiste à tirer au hasard et simultanément trois du sac et à observer les couleurs obtenues.

- 1) Soit X la variable aléatoire qui à chaque expérience associe le nombre de boules rouges tirées
 - a) Donner en extension l'ensemble image de l'ensemble des éventualités liées à l'expérience par la variable aléatoire X .
 - b) Quelle est la distribution de cette variable aléatoire ?
 - c) Quelle est la probabilité de l'événement : « on tire au moins une boule rouge » ?

Exercice 19 :

Dans un sac il y a neuf boules indiscernables au toucher :

- Trois boules rouges numérotées 1, 2, 3.
- Quatre boules verts numérotées 4, 5, 6, 7.
- Deux boules blanches numérotées 8, 9.

Soit E l'expérience : « on tire au hasard et successivement, trois boules que l'on place côte à côte sur une table et on observe la couleur et le numéro de chaque boule »

- 1) Définir en compréhension l'ensemble E des éventualités et trouver le nombre de ces éléments.

On considère la probabilité définie sur $P(E)$, relativement à l'expérience E .

- 2) Quelle est la probabilité des événements suivants :
 - a) « les trois boules sont rouges » ?
 - b) « les trois boules sont de même couleur » ?
 - c) « les trois boules sont de couleur différente » ?
 - d) Il y a une boule blanche entre une boule rouge et une verte.
- 3) Citer parmi les événements précédents deux événements incompatibles (justifier verbalement).

Exercice 20 :

On considère un sac contenant dix-huit cartons.

Trois cartons portent le chiffre six (6).

Trois cartons portent le chiffre cinq (5).

Trois cartons portent le chiffre quatre (4).

Trois cartons portent le chiffre trois (3).

Trois cartons portent le chiffre deux (2).

Trois cartons portent le chiffre un (1).

Les cartons sont indiscernables au toucher.

- 1) On considère l'expérience qui consiste à tirer au hasard et simultanément trois cartons du sac et à observer les chiffres inscrits. Après avoir défini l'ensemble des éventualités liées à cette expérience. Trouver la probabilité pour que l'on puisse former le nombre 421 à l'aide des trois cartons tirés.
- 2) On considère trois dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'expérience qui consiste à jeter simultanément ces trois dés et lire les chiffres inscrits sur les faces supérieurs. Après avoir défini l'ensemble des éventualités liées à cette expérience. Trouver la probabilité pour que l'on puisse former le nombre 421 à l'aide des trois chiffres obtenus.

Exercice 21 :

On considère un sac contenant n boules blanches ($n \in \mathbb{N}^*$) et une boule noire indiscernable au toucher.

- 1) Soit :
 - E_1 l'expérience : « on tire au hasard et simultanément deux boules et on observe les couleurs obtenues ».
 - E_n l'ensemble des éventualités liées à l'expérience E_1 .
 - P_n la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E_n)$ relativement à l'expérience E_1 .

On considère les événements :

A : « on a tiré la boule noire »

B : « on a tiré deux boules blanches »

- a) Comparer les événements A et B. Calculer $P_n(A)$ puis $P_n(B)$ en fonction de n .
- b) Soit U_n $n \in \mathbb{N}^*$, la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = P_n(B)$.
 - Etudier le sens de variation de U_n .
 - Cette suite a-t-elle une limite ?
 - Expliquer intuitivement ces résultats.
- c) Combien faut-il placer de boules blanches au minimum dans le sac pour que l'on ait 99 chances sur 100 de tirer deux boules blanches ?
- 2) Soit :
 - E_2 l'expérience : « on tire au hasard une boule du sac, on observe sa couleur, on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule du sac, on observe sa couleur ».
 - F_n l'ensemble des éventualités liées à l'expérience E_2 .
 - q_n la probabilité définie sur $\mathcal{P}(F_n)$ relativement à l'expérience E_2 .

On considère les événements A et B définis dans le 1).

- a) Calculer $q_n(A)$ et $q_n(B)$ en fonction de n .
- b) Soit V_n $n \in \mathbb{N}^*$, la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = q_n(B)$.

- Etudier le sens de variation de V_n .
- Cette suite a-t-elle une limite ?
- Expliquer intuitivement ces résultats.

c)