

ENRICHISSEMENT SUR LES COMPLEXES

Exercice 1: BAC 2019

1) Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

a) Calcule $P(-1)$.

b) Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b).$$

c) Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Unité graphique : 2 cm.

On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = -1$,

$$Z_B = 2 + i\sqrt{3}, Z_C = 2 - i\sqrt{3} \text{ et } Z_G = 3.$$

a) Réalise une figure et place les points A, B, C et G.

b) Calcule les distances AB, BC et AC. En déduis la nature du triangle ABC.

c) Calcule un argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$. En déduis la nature du triangle GAC.

Exercice 2 : BAC 2018

I- On considère la fonction f de la variable complexe z définie par :

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i.$$

1) Vérifie que $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

3) Ecris les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sous forme trigonométrique.

II- Détermine la nature des transformations suivantes dans le plan complexe et détermine leurs éléments caractéristiques :

1) $z' = z + 1 - 2i$

2) $z' = iz + 1$

3) $z' = 3z - 1 + i$

4) $z' = (1 + i)z - 1 + i.$

Exercice 3: BAC 2014

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - \sqrt{3}i)Z - i = 0$ (E)

1) a- Détermine le réel y tel que iy soit une solution de (E).

b- Détermine les réels a et b tels que pour tout complexe z ;

$$Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - \sqrt{3}i)Z - i = (Z - i)(Z^2 + aZ + b).$$

2) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

b- En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique et trigonométrique.

Exercice 4 : BAC 2013

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

- a) $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$
 b) $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$
 2) Soit P le polynôme de la variable complexe Z tel que :
 $P(Z) = Z^4 - (1 + \sqrt{2})Z^3 + (2 + \sqrt{2})Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + 1$
 a) Vérifie que pour tout Z non nul on a :

$$\frac{P(Z)}{Z^2} = \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + \sqrt{2}$$

 b) En utilisant ce qui précède ; résoudre l'équation $P(Z)=0$.

Exercice 5: BAC 2012

- A- On pose $a = \sqrt{3} - i$; $b = -\sqrt{3} - i$ et $c = \frac{a^2}{b^3}$
 1) Donner le module et un argument de c.
 2) Donner la forme trigonométrique de $t = ab$.
 B- Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; on considère le polynôme d'inconnu z :
 $P(z) = z^3 - 4iz^2 - 6z + 4i$.
 1) Calculer $P(2i)$
 2) Déterminer les complexes a et b tels que pour tout complexe z on ait :
 $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$.
 3) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$. On désigne par z_1 la solution imaginaire pure et par z_2 et z_3 les deux autres solutions.
 b- Comparer z_1 et z_2+z_3 .

Exercice 6: BAC 2011

- 1) compléter le tableau suivant :

Nombre complexe	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Z_A			$4e^{\frac{i\pi}{2}}$
Z_B		$4(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$	
Z_C	$2\sqrt{3} - 2i$		

- 2) Placer les points A ; B et C d'affixes respectives les nombres complexes Z_A ; Z_B et Z_C dans un repère orthonormé (O; $\vec{u}$; $\vec{v}$).
 3) Calculer les affixes Z et Z' des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sous forme algébrique puis exponentielle.
 4) Montrer que $Z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}Z$.

Exercice 7: BAC 2008

Soient les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$.

- 1) Déterminer le module et un argument des complexes z_1 ; z_2 et z_3 .
 En déduire que les points M_1 ; M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1 ; z_2 et z_3 appartiennent à un même cercle que l'on déterminera. Faire la représentation graphique.
 2) On pose $z_4 = -2z_1(\frac{z_2}{z_3})^2$. Mettre z_4 sous la forme algébrique.
 3) Déterminer les racines carrées de z_4 .

- 4) On pose $z_5 = -4z_1z_3$. Déterminer les racines quatrièmes de z_5 . Faire la représentation graphique dans le plan.
- 5) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$; l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
b- Ecrire chacune des solutions sous forme exponentielle.

Exercice 8: BAC 2007

- 1) On considère dans le plan les points A ; B et C d'affixes respectives : $a = 1 + i$;
 $b = 1 + (1 + \sqrt{3})i$ et $c = (1 + \sqrt{3})i$.
a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants : $a - b$; $c - a$ et $c - b$.
b) En déduire la nature du triangle ABC.
- 2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Soit les points $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $C(0; -1)$.
On considère l'application s du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z$.
a) Déterminer les affixes des points A' ; B' et C' images respectives des points A ; B et C par s .
b) Construire dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points A ; B et C et leurs images A' ; B' et C' par s .

Exercice 9: BAC 2005

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes associés au plan affine $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; on donne les complexes z_1 et z_2 définis par : $z_1 = \frac{i-13}{-12+14i}$ et $z_2 = \frac{2i+1}{1-3i}$

- a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique : $a + ib$; puis déterminer le module et un argument de chacun d'eux.
- b) On désigne par A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2 ; déterminer le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ et en déduire la nature du triangle AOB.

Exercice 10: BAC 2004

- 1) Soit dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes d'équation d'inconnue z , $(E) : z^2 - (\sqrt{3} + i)z + (1 + i\sqrt{3}) = 0$.
a) Calculer $(1 - i\sqrt{3})^2$.
b) On pose $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $b = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$; écrire a et b sous forme trigonométrique.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) puis vérifier que ses solutions s'expriment simplement en fonction de a et b .
- 3) Représenter dans le plan les points images des complexes a et b et en déduire la représentation des points images des solutions de (E) .

Exercice 11: BAC 2002

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :
$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1 + i)x - 2y + z = 2 - 2i \end{cases}$$
- 2) $(x; y; z)$ étant la solution du système ci-dessus ; on désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives x ; y et z .
 - a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{z-x}{z-y}$.
 - b) En déduire la nature du triangle ABC puis le construire dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 12: BAC 2000

- 1) a- Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C} ; z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i = 0$.
Sachant qu'elle admet des solutions imaginaires pures.
- b- Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$; les solutions z_1 ; z_2 et z_3 de l'équation proposée ont pour images respectives les points A ; B et C. Placer ces points dans $(\mathcal{P})$.
- c- Déterminer le nombre complexe z_4 dont l'image est le point D, quatrième sommet du parallélogramme ABCD.
- 2) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des complexes z_1 ; z_2 et z_3 .
- 3) a- Calculer $(2 + i)^2$
- b- Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, iz^2 - iz - 1 + i = 0$.

Exercice 13: BAC 1986

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par : $f(z) = z^3 + (1 - 5i)z^2 - 2(5 + i)z + 8i$.

- 1) Calculer $f(2i)$; en déduire une factorisation de $f(z)$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $f(z) = 0$ et calculer le module et argument de chacune des solutions.
- 3) Soient z_1 ; z_2 et z_3 les solutions de $f(z) = 0$ avec z_2 seule racine d'argument $\frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi$.
Etablir que : $(z_1 ; z_2 ; z_3)$ et $(z_3 ; z_2 ; z_1)$ sont des suites géométriques dont on déterminera la raison.