

Groupe Facebook MATHÉMATIQUES DU LYCÉE



FAIRE DES MATHÉMATIQUES
UN JEU
APPRENDRE LES MATHÉMATIQUES
AUTREMENT



Exercice 1. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$ suivante : $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$

❶ Montrer que i est solution de l'équation

❷ Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

❸ Résoudre alors cette équation.

Resolution 1.

❶ On vérifie que i est solution de l'équation :

$$i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$$

donc i est bien solution de l'équation. On peut donc factoriser par $(z-i)$.

❷ On développe et on identifie à la première forme :

$$(z-i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic = az^3 + (b-ia)z^2 + (c-ib)z - ic$$

On identifie, et l'on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -4 - i \\ c - ib = 13 + 4i \\ -ic = -13i \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \end{cases}$$

❸ L'équation devient donc : $(z-i)(z^2 - 4z + 13) = 0$

On a donc $z-i$ ou $z^2 - 4z + 13 = 0$. On calcule $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$.

On obtient donc 2 solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i \text{ ou } z_2 = \frac{4-6i}{2} = 2-3i.$$

On a alors l'ensemble solution $\mathcal{S} = \{i; 2-3i; 2+3i\}$.