M- Touré

EXERCICES DE MATHEMATIQUES
Nombres Complexes – Arithmétique

T.S.E : Exercices et Solutions

Par

HAMIDOU KONE

ACADEMIE D'ENSEIGNEMENT
LYCEE PRIVE LE DEFI
LE PROVISEUR
P.duP. DEFI
BAMAKO RIVE GAUCHE

« Dans l'économie de l'intelligence, l'épargne est ruineuse » P. VALERY.

Scanné avec CamScanner

Exercice 1:

- 1°- Déterminer une condition que doit vérifier z pour que $Z = \frac{z+i}{z-i}$ soit réel.

2°- Soit dans $\mathbb{C}$: $Z = \frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}$. On pose $z = x + iy$ avec $z \neq 1$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que :

a) Z soit réel ; b) Z soit imaginaire pur.

- Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$; $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$; $z_C = 1 + \sqrt{3}\,i$ et $z_D = 1 - 2i$.

1) Placer les points A, B, C, D et préciser la nature du quadrilatère ABCD.

2) Vérifier que $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. Que peut-on dire des droites (AB) et (BD) ?

3) Donner l'équation du cercle de diamètre [BD].

II - Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$. Soit la fonction f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z différent de A, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right)$ (1)

1°- Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$.

Montrer qu'il existe un seul point D tel que f(D) = C.

2°- Déterminer la nature du triangle ABC.

3°- A l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et B :

$OM' = \frac{BM}{AM}$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (modulo 2π).

4°- En déduire et construire les ensembles de points suivants :

a) L'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit situé sur le cercle (Γ) de centre O et rayon 1.

b) L'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

Exercice 2:

A - Soit le polynôme complexe P tel que :

$P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$.

1°- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ est équivalente à l'équation

$Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$ (E) avec $Z = z + \frac{1}{z}$;

2°- Résoudre l'équation (E) et en déduire la résolution de $P(z) = 0$.

B - Soit le polynôme complexe $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

1°- Montrer que si z_0 est solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\bar{z}_0$ et $\frac{1}{z_0}$ sont aussi solutions de $P(z) = 0$.

2°- Calculer $P(1+i)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$.

C - Soit le polynôme $f(z) = z^5 - z^4 + 9z^3 - 7z^2 + 18$.

1°- Montrer que $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

2°- Calculer $f(1+i)$.

3°- Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet deux racines imaginaires pures

Scanné avec CamScanner

que l'on déterminera.

4°- Achever la résolution de $f(z) = 0$.

D - On considère l'équation d'inconnue z,

(E) : $z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0$.

1°- Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2°- Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

3°- Achever la résolution dans $\mathbb{C}$ de (E).

4°- On désigne par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la $4^{ème}$ solution de (E). Montrer que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

Exercice 3:

A - Soit z un complexe de module 1.

1°- Montrer que l'équation $z^5 = \bar{z}$ est équivalente à l'équation $z^6 = 1$.

2°- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \bar{z}$.

B - On considère le complexe $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

1°- Calculer z^2. Déterminer le module et un argument de z^2 puis en déduire le module et un argument de z.

2°- Déterminer les entiers n tels que z^n soit un imaginaire pur.

C - Soit z un complexe de module 1 et d'argument θ. On pose : $Z = z + 1 + \frac{2z+1}{z^2+z+1}$.

1°- Pour quelles valeurs de z, Z est-il défini ?

2°- $\bar{z}$ étant le conjugué de z, montrer que $Z = z + 1 + \frac{2+\bar{z}}{z+\bar{z}+1}$.

En déduire, en fonction de θ, la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z.

3°- Déterminer θ pour que Z soit réel.

Exercice 4:

I - Soit les complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

1) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) Soit $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Ecrire z_3 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

II- Soit a un nombre complexe non nul. On considère le polynôme $P_a(z)$ tel que : $P_a(z) = z^3 - 6az^2 + 12a^2z - 7a^3$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_1(z) = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_a(z) = 0$ (*On pourra poser* $z = aZ$).

c) Soit T_a le triangle dont les sommets ont pour affixes les solutions de l'équation $P_a(z) = 0$. Montrer que T_1 est équilatéral, puis en déduire que T_a est équilatéral $\forall a \in \mathbb{C}$.

III - On considère le polynôme complexe $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$.

1°- Factoriser P(z) en produit de 2 polynômes du 2è degré à coefficients complexes.

Scanné avec CamScanner

2°- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$.
3°- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
4°- En utilisant la forme factorisée de $P(z)$ montrer que $P(z)$ est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

Exercice 5:

I- 1) Calculer le module et un argument de $z_n = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
Pour quelles valeurs de n, z_n est-il un nombre réel ?
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par A_n le point d'affixe z_n. Déterminer les réels a et b tels que
$$a\overrightarrow{OA_1} + b\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} = \vec{0}.$$

II- On considère les complexes $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u = 1 + j$.
1-Etablir les deux égalités suivantes : $1 + j + j^2 = 0$; $j^3 = 1$.
2- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u^{2n+1} = -j^{n+2}$.
3- Pour tout entier n exprimer u^{2n} en fonction de n et de j.
4- Calculez u^{24} et u^{31} ; on les donnera sous la forme $x+iy$ avec x et y deux nombres réels.

III - Soit l'équation (E) : $z^2 + (i-2)z^2 + 3(1-i)z + 2i - 2 = 0$.
1°- Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1.
2°- Déterminer les deux autres solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.
3°- Déterminer le complexe z tel que $|z_1 - z| = |z_2 - z| = |z_3 - z|$, avec z_1, z_2, z_3 les solutions de (E).

Exercice 6:

I - Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'.
On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ ou x, x', y, y' sont des nombres réels.
1°- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \mathcal{R}e(z'\bar{z}) = 0$.
2°- Montrer que les points O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow \mathcal{I}m(z'\bar{z}) = 0$.
3°- N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?
4°- On suppose z non nul ; P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$. On recherche l'ensemble des M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.
a) Montrer que $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -\bar{z}^2\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$.
b) En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

II - Soit dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, le point A l'affixe $1 - i$ et le point C d'affixe $2 + 3i$. On considère la fonction f définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \frac{(5-i)z - 13 - 13i}{(5-i)z - 4 + 6i}$.

1°- Déterminer l'ensemble de définition D de f.

Scanné avec CamScanner

2°- a) Montrer que $\forall z \in D$, on a $f(z) = \frac{z-2-3i}{z-1+i}$;

b) En déduire que si M est le point du plan complexe d'affixe z, $\forall z \in D - \{2+3i\}$ on a : $\arg f(z) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3°- a) Déterminer, puis représenter l'ensemble (E) des points M du plan complexe d'affixe z tels que f(z) soit imaginaire pur.

b) Déterminer, puis représenter l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.

4°- On appelle B et D les points d'intersection de (E) et (Γ).

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

III - On considère l'application f du plan P−{O} dans P−{O} qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{1}{\bar{z}}$. On appelle U et V les points d'affixes respectives 1 et i.

1) Démontrer que, pour $z \neq 0$, $\arg(z') = \arg(z)\ [2\pi]$. En déduire que, $\forall M \in P - \{O\}$ les points M et M' = f(M) appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

2) Déterminer l'ensemble des points M tels que f(M) = M.

3) M est un point distinct de O, U et V ; on admet que M' est aussi distinct de O, U et V. Etablir que : $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i}\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right) = -i\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$

4) Soit M le point d'affixe z différent de i et de 1. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\frac{z-1}{z-i}$ est un réel non nul.

Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

Exercice 7:

I - Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°- Soit l'équation (E) : $z^3 - 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que (E) s'écrive $(z-2)(z^2+az+b) = 0$.

b) Résoudre (E).

2°- On note $(\mathcal{H})$ l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant l'égalité $z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2$. On pose : $z = x + iy$;

a) Montrer que : M appartient à $(\mathcal{H}) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$.

b) Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2 ; $-3 - i\sqrt{5}$ et $-3 + i\sqrt{5}$. Vérifier que A, B et C appartiennent à $(\mathcal{H})$.

3°- Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer les affixes des points A', B' et C', images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera les affixes sous forme algébrique).

b) On note M'(z') l'image de M(z) par la rotation r. On pose : $z' = x' + iy'$ et soit $(\mathcal{H}')$ l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de $(\mathcal{H})$.

-Exprimer x et y en fonction de x' et y' ;

-En utilisant la question 2°) a) prouver que : M' appartient à $(\mathcal{H}') \Leftrightarrow x'y' = -2$.

4°- Placer les points A, B, C, A', B', C', et les courbes $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}')$ dans le repère.

Scanné avec CamScanner

II -Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(0;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 2cm, on considère l'application f qui à tout nombre complexe $z \neq 1$, associe le nombre complexe $f(z) = \frac{2-iz}{1-z}$.

A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe $-2i$.

1) On pose $z = x + iy$ avec x et y des réels.
   a. Ecrire f(z) sous forme algébrique. En déduire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que f(z) soit réel.
   b. Vérifier que A et B appartiennent à (E) et construire (E).
2) On pose $z' = f(z)$.
   a. Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer, pour $z' \neq i$, z en fonction de z'. L'application f est-elle bijective ?
   b. M est le point d'affixe z $(z \neq 1)$ et M' celui d'affixe z' $(z' \neq i)$. Montrer que $OM = \frac{M'C}{M'D}$, où C et D sont les points d'affixes respectives 2 et i.
   c. Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.
   d. Montrer que si M est un point de l'axe réel, différent de O et de A alors M' appartient à la droite (CD).

Exercice 8:

I - Déterminer le module et un argument de chacun des complexes puis les écrire sous forme trigonométrique : $z_1 = 2(\sin x + i\cos x)$;

$z_2 = 2e^{\frac{i\pi}{2}}(-\cos x + i\sin x)$; $z_3 = \frac{\cos 2x + i\sin 2x}{2\cos 3x - 2i\sin 3x}$; $z_4 = 1 - \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$;

$z_5 = (1 + \cos x + \cos 2x) + i(\sin x + \sin 2x)$; $z_6 = \frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$, $\theta \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$z_7 = \sin\theta + 2i\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\theta \in]0;2\pi[$ $z_8 = 1 + \cos x - i\sin x$, $x \in]0;\pi[$.

II - Soit le nombre complexe $z_0 = e^{\frac{i2\pi}{5}}$. On pose $\alpha = {z_0} + {z_0}^4$ et $\beta = {z_0}^2 + {z_0}^3$.

1- Démontrer que $1 + z_0 + {z_0}^2 + {z_0}^3 + {z_0}^4 = 0$.

2- Calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha \times \beta$ puis en déduire que α et β sont solutions de l'équation (E) : $z^2 + z - 1 = 0$.

3- Exprimer α et β respectivement en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ puis préciser le signe de α et celui de β.

4- Résoudre (E) et en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

III - On considère dans le plan complexe les points A, B, M et M' d'affixes respectives : $2-4i$, $-i$, z et z' avec $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$.

1°/ Exprimer les coordonnées (x',y') de M' en fonction de celles (x,y) de M.

2°/ Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que :
   a) z' soit réel ;
   b) z' soit imaginaire pur.

3°/ On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$.

Scanné avec CamScanner

Vérifier que $ZZ' = -3+4i$ puis calculer $|ZZ'|$.

4°/ a) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.

b) Déterminer r pour que M et M' soient sur le même cercle. (BAC 2014)

Exercice 9:

I - 1°/ Linéariser les expressions suivantes :

$A = sin^4x.cos^3x$; $B = cos^4x.sin^7x$;

$C = sin^5x + cos^6x$; $D = cos^5(2x)$.

2°/ Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

$E = \sin 7x$; $F = \sin 2x.\cos 5x$.

3°/ - Soit z un nombre complexe tel que : $1 + z^4 + z^8 = 0$.

Démontrer que z est une racine $12^{ème}$ de l'unité.

II - 1°- z et z' étant des nombres complexes, montrer que :

$(z+z')(z-z')(z+iz')(z-iz') = z^4 - z'^4$.

2°- Soit (E) l'équation $(z-a)^4 = (z-b)^4$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où a et b sont deux complexes donnés distincts.

a) Résoudre l'équation (E).

On pose : $z_1 = \frac{a+b}{2}$; $z_2 = \frac{a+b+i(b-a)}{2}$; $z_3 = \frac{a+b+i(a-b)}{2}$.

b) On désigne par A, B, M_1, M_2 et M_3 les images respectives de a, b, z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

Représenter ces points dans le cas où $a = 2$ et $b = -1+i$.

c) Démontrer que A, M_2, B, M_3 sont les sommets d'un carré.

3°- On se propose de démontrer que, dans le cas général A, M_2, B, M_3 sont les sommets d'un carré de centre M_1.

a) Montrer que les segments $[AB]$ et $[M_2M_3]$ ont pour milieu M_1.

b) Montrer que le quadrilatère AM_2BM_3 a deux cotés consécutifs de même longueur et perpendiculaires.

c) Déduire des questions a) et b) la nature du quadrilatère AM_2BM_3.

Exercice 10:

A - Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm, on considère les nombres complexes $z_0 = 6+6i$ d'image ponctuelle A_0, $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ et $z_n = z_0a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dont l'image ponctuelle est A_n.

1-a) Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique.

b) Ecrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{6}}$.

2-Exprimer z_3 et z_7 en fonction de a^2. En déduire leurs formes exponentielles.

3-Placer les points images ponctuelles A_0, A_1, A_3, A_7.

Scanné avec CamScanner

B - Pour tout entier naturel n on pose $|z_n| = r_n$.

1- Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

2-En déduire la nature de la suite (r_n) tout en précisant sa raison q et la valeur exacte de son premier terme r_0.

3-Déterminer la valeur exacte de $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

4-Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leq 10^{-3}$.

Exercice 11: (*BAC* 2000)

I-1- $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme r_0 réel et de raison $\frac{2}{3}$.
Exprimer l'expression du terme général r_n en fonction de n.

2- $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$.
Exprimer l'expression du terme général θ_n en fonction de n.

3- On pose $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Déterminer les complexes z_0, z_1 et z_2 sachant que $z_0 z_1 z_2 = 8$.

4- Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 3cm on appelle M_n le point d'affixe $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n\in\mathbb{N}$.
a)Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
b)Calculer $\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$ en fonction de n.

5- On pose $I_n = \sum_{k=0}^{n}\|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\|$. Calculer I_n en fonction de n puis déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

II - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, 2i et z.

1-Que représente géométriquement $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|$ et $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$?

2-On suppose que le point C d'affixe z est défini par : $BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA$; $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \alpha$, et $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ avec $\alpha \in]-\pi;0]$. Calculer $\sin\alpha$.

3-Démontrer que $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$. En déduire z et vérifier que le triangle ABC est isocèle. On fera une figure.

Exercice 12:

I - 1) Déterminer les racines sixièmes de l'unité sous forme algébrique.
2) Calculer $(1-i)^6$.
3) Déduire des questions précédentes les solutions, sous forme algébrique, de l'équation d'inconnue z : $8z^6 + i = 0$. (*BAC* 2005)

II - 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2^{\alpha+1}\cos\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$.
On donnera les solutions sous forme exponentielle.
2) On désigne par A et B les points images des solutions de cette équation dans le plan muni d'un repère orthonormal.
Déterminer α pour que le triangle OAB soit équilatéral.

Scanné avec CamScanner

III - Soit f une fonction polynôme définie par $f(z) = z^4 + 1$.
Déterminer les racines quatrièmes de -1 puis en déduire que f peut s'écrire comme un produit de deux fonctions polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Exercice 13:

I - On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; pour $n \in \mathbb{N}$ on pose,
$\forall z \in \mathbb{C}$, $h_n(z) = (1-z)z^n$.

1°- Résoudre l'équation $h_n(z) = h_0(z)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2°- On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases}$ (1).

a) Montrer que l'équation $|z| = |1-z|$ a une infinité de solutions.

b) Soit z_0 l'une de ces solutions ; calculer en fonction du module ρ et de l'argument θ de z_0, l'argument de $1-z_0$, le module et l'argument de $z_0^n(1-z_0)$.

c) En déduire que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$.
Quel est l'ensemble solution du système ? (*BAC 2014*)

II - Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

1°- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2°- On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i\frac{(-1)^n \pi}{6}}$ définie pour $n \geq 1$.

a) Vérifier que z_1 est solution de (E).

b) Ecrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan et tracer les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.

3°- Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right)$.

4°- Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3. Pour la suite de l'exercice on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5°- On note $l_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$;

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $l_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.

b) Déterminer le plus petit entier tel que $l_n \geq 1000$. (***Compo. 2015 S.T.I***)

Exercice 14:

I - Soit A le point d'affixe $2i$ et f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}.$$

1°- Démontrer que f admet deux points invariants.

2°- Démontrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

3°- Démontrer que la droite de repère $(O, \overrightarrow{e_2})$, privée de A, est globalement invariante par f.

4°- a) Démontrer que : $|z' - 2i| \times |z - 2i| = 9$.

b) En déduire l'image par f du cercle (C) de centre A et de rayon R.

c) Déterminer R pour que (C) soit globalement invariant par f.

Scanné avec CamScanner

II - Soient A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que : $zz' = 1$.

1°- a) Déterminer et construire l'image par f du point C d'affixe $1 + i$.

b) Démontrer que pour tout point M et son image M', la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$ et que $OM \times OM' = OA^2$.

2°- a) Vérifier que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$.

b) Soit I le milieu de [MM']. Démontrer que $IA \times IB = IM^2$.

Exercice 15:

I - Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application qui à tout point M de $\mathcal{P}$ d'affixe $z \neq -2i$ associe le point M' d'affixe $Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

1°- On pose $z = x + iy$, x et y étant deux réels.

a) Déterminer les parties réelle et imaginaire de Z en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que Z soit réel.

c) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire.

2°- On appelle A et B deux points d'affixes respectives $2 - i$ et $-2i$.

a) Retrouver les ensembles (E) et (F) par une méthode géométrique.

b) Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et en déduire que les points M' d'affixes Z, lorsque le point M d'affixe z parcours le cercle de centre B et rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et le centre.

II – Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm. On donne les points A, B et C d'affixes respectives

$$a = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad b = \bar{a} \quad ; \quad c = 3.$$

Partie A :

1°- Placer les points A, B et C.

2°- Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

3°- Ecrire les nombres complexes a, b et c sous forme exponentielle.

Partie B :

Soit f l'application qui, à tout point M de $\mathcal{P}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = f(z) = \frac{1}{3} iz^2$. On note A', B' et C' les points associés respectivement par f aux points A, B et C.

1°- a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

b) Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A' .

c) Placer les points A', B' et C'.

2°- Déterminer les points invariants par f, c'est-à-dire les points d'affixes z tels que $z' = z$. On donnera leurs affixes sous forme algébrique.

3°- Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. *(Compo. 2014 – 2015 R.D.)*

Scanné avec CamScanner

Exercice 16:

I - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^5-(z-1)^5=0$.

II - Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; on considère l'équation d'inconnue complexe z

(E): $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$

1. Soit z une solution de (E).
   a. Montrer que $|1+iz|=|1-iz|$.
   b. En déduire que z est réel.
2. Exprimer $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.
3. Soit z un nombre réel. Pour tout $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on pose $z=\tan\beta$.
   a. Ecrire l'équation portant sur β traduisant (E) puis la résoudre.
   b. Déterminer les solutions de (E).

III – $\mathbb{C}^*$ est l'ensemble des nombres complexes non nuls.

On définit de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ l'application f par: $f(z)=\frac{1}{z}$.

1. Déterminer les parties réelles et imaginaires des images de $\alpha=1+i$ et de $\beta=1+e^{\frac{i\pi}{3}}$.
2. a. Déterminer les éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $f(z)=z$.
   b. Déterminer les éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $f(z)=\bar{z}$.
   c. Déterminer le module et un argument de $f(z)$ en fonction de ceux de z.
   d. Déterminer les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction de celles de z.
3. En étudiant $f\circ f$, montrer que f est bijective.
4. Montrer que $f(z)-1=\frac{1}{z}(1-z)$.
   En déduire que si $|z-1|=1$ alors $|f(z)|=|f(z)-1|$
5. On définit $Q(z)=\frac{z-a}{z-b}$. Montrer que $Q(z)Q(f(z))$ est un réel à déterminer.
6. Dans le plan complexe, A(1), M(z) et M'(f(z)). Donner une construction de M', si M est sur le cercle de centre A et de rayon 1.

Exercice 17:

I - 1. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\sum_{k=1}^{2002}(-i)^k$.

2. Déterminer sous forme exponentielle le nombre complexe z tel que:
   $|z|\times|-1+i|=|2i+2|$ et $\arg\left[z\times\left(1-\sqrt{3}\right)\right]=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que:
   a. $\arg(z^2-4)\equiv\arg(z+2)\ [\pi]$;
   b. $\arg(\bar{z}-3+i)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
4. Soient x, y et z trois nombres complexes de module 1 tels que:
   $x+y+z=1$ et $xyz=1$
   a. Montrer que: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.
   b. En déduire x, y et z.

Scanné avec CamScanner

II- On considère l'application f du plan qui, à tout point M d'affixe z distincte de $2i$, associe le point d'affixe : $z' = \frac{z+i}{z-2i}$.

1. Pour $z \neq 2i$, on pose $z = 2i + re^{i\theta}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Ecrire $z' - 1$ à l'aide de r et θ.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, A est le point d'affixe $2i$.
   a. Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z pour lesquels $|z' - 1| = 3$.
   b. Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\arg(z' - 1) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$.
   c. Représenter les ensembles E_1 et E_2.

Exercice 18:

I- Soient les points $A(-1+i)$; $B(-1-i)$; $C(2i)$; $D(2-2i)$.

1. Etudier la nature des triangles ACD et BCD.
2. Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.
3. Déduis en le centre, le rayon et une équation de ce cercle.
4. Fais la figure complète.

II- On se propose de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

On considère le nombre complexe $a = e^{\frac{i2\pi}{5}}$.

1. Calculer a^5.
2. Démontrer que : $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.
3. Montrer que : $a^3 = (\bar{a})^2$ et $a^4 = \bar{a}$.
4. En déduire que : $(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
6. Calculer $a + \bar{a}$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 19:

I- Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On se propose de démontrer l'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

1. On pose $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$. Démontrer que $|\mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2)| \leq r_1 r_2$.
2. En déduire que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. **(Indication :** on pourra utiliser $|z_1 + z_2|^2)$
3. Trouver une relation entre α_1 et α_2 pour qu'on ait $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

II- z étant un nombre complexe, on note (S) le système $\begin{cases} |z| = |z-6| \\ \arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Donner le module et un argument des trois complexes suivants :
   $a = \sqrt{3} + i$; $b = -2 + 2i$; $c = 3 + 3i$.
2. Parmi les complexes a, b et c, lesquels sont solutions du système (S) ?
   (Justifier la réponse).
3. M étant le point d'affixe z, A celui d'affixe 6, traduire géométriquement les deux contraintes de (S).
4. Résoudre le système (S).

Scanné avec CamScanner

Exercice 20:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z $(z \neq 1)$ associe le point M' d'affixe z' telle que $f(z) = z' = \frac{-iz-2}{z+1}$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$, $c = -i$.

1. Soit C' l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C' sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}i$.
3. Pour tout nombre complexe $z \neq -1$, on pose : $p = |z+1|$ et $p' = |z'+i|$.
   a. Démontrer que $pp' = \sqrt{5}$.
   b. Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors M' appartient à un cercle (Γ'), dont on précisera le centre et le rayon.
4. On considère le nombre complexe $\omega = \frac{z-2i}{z+1}$, $z \neq -1$.
   a. Interpréter géométriquement le module et l'argument du nombre complexe ω.
   b. Montrer que $z' = -i\omega$.
   c. Déterminer géométriquement l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul. Donner une équation de (F).
   d. Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F).
5. Représenter les ensembles (Γ), (F) et (Γ') en prenant 2cm pour unité graphique.

Exercice 21:

Soit l'équation $(E): z^5 = 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2. Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle et en déduire que : $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.
3. Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$.

   En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
4. Soit l'équation $(E'): (z-1)^5 = (z+1)^5$, $z \in \mathbb{C}$.

   a) Démontrer que si z_0 est solution de (E'), alors $\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right| = 1$.

   En déduire que les solutions de (E') sont imaginaires pures.

   b) Résoudre (E').

Exercice 22:

I- Soit un nombre complexe $z = e^{\frac{i2\pi}{7}}$. On pose $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Démontrer que a et b sont deux complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive.
2. Calculer $a+b$ et ab. En déduire a et b.

II- 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$.

2. Placer les points images des solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

Scanné avec CamScanner

III- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm.

1-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

On pose $a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{3}-i$. Ecrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b dans le repère.

2-Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image de A par la rotation r.

3-Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image de B par h. Placer B' sur la figure.

4-Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle.

On désigne par c l'affixe du point C.

a) Justifier les égalités suivantes :

$c\bar{c}=R^2$; $(c-2i)(\bar{c}+2i)=R^2$; $\left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$.

b) En déduire que $c-\bar{c}=2i$ puis que $c+\bar{c}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Déduire alors l'affixe c du point C et le rayon R.

Hamidou Jolie

Scanné avec CamScanner

Exercice1:

I – 1) Déterminons une condition sur z pour que $Z = \frac{z+i}{z-i}$ soit réel.

Z est réel $\Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} \Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}+i) = (z-i)(\bar{z}-i) \Leftrightarrow$
$z\bar{z} + iz + i\bar{z} - 1 = z\bar{z} - i\bar{z} - iz - 1 \Leftrightarrow z + \bar{z} = -(z+\bar{z}) \Leftrightarrow 2(z+\bar{z}) = 0$
$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow$ z est imaginaire pur.

Z est un réel $\Leftrightarrow$ z est imaginaire pur.

2) $Z = \frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}$; $z = x + iy$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Déterminons l'ensemble (E) des points M tels que :

a) Z soit réel :

Z est réel $\Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{2+z}{1-z} \Leftrightarrow (2+\bar{z})(1-z) = (2+z)(1-\bar{z})$
$\Leftrightarrow 2 - 2z + \bar{z} - z\bar{z} = 2 - 2\bar{z} + z - z\bar{z} \Leftrightarrow 3(z-\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$
$\Leftrightarrow$ z est réel. Donc l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que Z soit réel est l'axe réel privé du point de coordonnées (1; 0).

b) Z soit imaginaire pur :

Z est imaginaire pur si et seulement si $Z + \bar{Z} = 0 \Leftrightarrow \frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}} + \frac{2+z}{1-z} = 0 \Leftrightarrow$
$(2+\bar{z})(1-z) + (2+z)(1-\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2z + \bar{z} - z\bar{z} + 2 - 2\bar{z} + z - z\bar{z} = 0$
$\Leftrightarrow 4 - 2z\bar{z} - (z+\bar{z}) = 0$. Posons $z = x + iy \Rightarrow z\bar{z} = x^2 + y^2$ et $z + \bar{z} = 2x$.
$4 - 2z\bar{z} - (z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2(x^2+y^2) - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$. L'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur est le cercle de centre $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$.

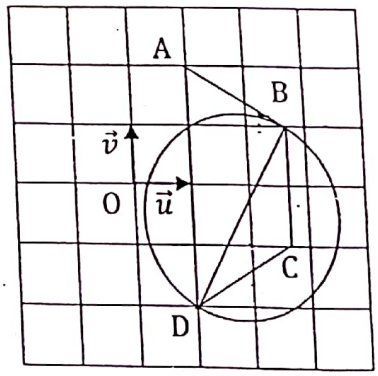
II – 1) Plaçons les points $A(1+2i)$, $B(1+\sqrt{3}+i)$, $C(1+\sqrt{3}-i)$, $D(1-2i)$.

Le quadrilatère ABCD est un trapèze.

2) Vérifions que $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$.

$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1-2i-1-\sqrt{3}-i}{1+2i-1-\sqrt{3}-i} = \frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i} =$
$= \frac{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{3+i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$.

On a : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3} \Rightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires.



3) Équation du cercle de diamètre [BD].

Un point $M(x;y)$ appartient au cercle de diamètre [BD] $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DM} = 0 \Leftrightarrow$
$(x-1-\sqrt{3})(x-1) + (y-1)(y+2) = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - (2+\sqrt{3})x + y^2 + y - 1 + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\left(x - \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 3.}$$

Scanné avec CamScanner

III – 1) Déterminons D tel que f(D) = C.

$z_A = -1$, $z_B = 3i$, $z_C = 2 - i$, M(z) , M'(z') et $z' = i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right)$ (1)

$f(D) = C \Leftrightarrow z_C = i\left(\frac{z_D - 3i}{z_D + 1}\right) \Leftrightarrow 2 - i = i\left(\frac{z_D - 3i}{z_D + 1}\right) \Leftrightarrow (2-i)(z_D + 1) = iz_D + 3$

$(2-2i)z_D = 1 + i \Leftrightarrow z_D = \frac{1+i}{2-2i} \Leftrightarrow \boxed{z_D = \frac{1}{2}i}$ (unique valeur de z_D).

2) Déterminons la nature du triangle ABC

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3i+1}{2-i+1} = \frac{1+3i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{9+1} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow AB = AC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$

Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

3) Montrons que $OM' = \frac{BM}{AM}$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (modulo 2π).

$z' = i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right) \Leftrightarrow |z'| = \left|i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right)\right| \Leftrightarrow |z'| = |i| \times \frac{|z-3i|}{|z+1|} \Leftrightarrow$

$OM' = 1 \times \frac{BM}{AM} \Leftrightarrow OM' = \frac{BM}{AM}$.

$\arg(z') = \arg(i) + \arg\left(\frac{z-3i}{z+1}\right) [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z') = \arg(i) + \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) [2\pi]$

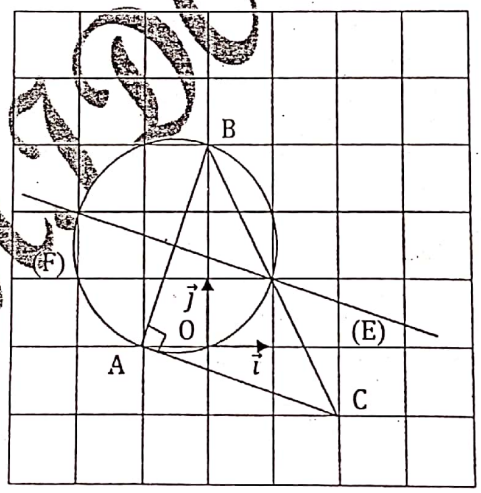
$\Leftrightarrow (\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (modulo 2π).

4) En déduisons les ensembles de points (E) et (F).

a) M' situé sur le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1 $\Rightarrow OM' = 1 \Leftrightarrow$ $\frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM \Rightarrow$ l'ensemble (E) est la médiatrice du segment [AB].

b) z' est réel $\Leftrightarrow \arg(z') = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}$ [*modulo* π] $\Rightarrow$ l'ensemble (F) est le cercle de diamètre [AB].



Exercice 2:

A - $P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$.

1) Montrons que $P(z) = 0 \Leftrightarrow Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$ avec $Z = z + \frac{1}{z}$.

On remarque $z = 0$ n'est pas une racine de P(z) ; donc $P(z) = 0 \Leftrightarrow$

$z^2 - (1+\sqrt{2})z + (2+\sqrt{2}) - (1+\sqrt{2})\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow$

$z^2 + \frac{1}{z^2} - (1+\sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2 - \sqrt{2} = 0.$

Scanné avec CamScanner

On sait que $z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2$ d'où $\frac{P(z)}{z^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2 + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2} = 0$; En posant $Z = z + \frac{1}{z}$

On a bien $Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$. (E)

(On pourrait remplacer Z par sa valeur dans (E) et on aura P(z) = 0)

2) Résolvons (E). $\Delta = (1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = (1 - \sqrt{2})^2$

$Z_1 = \frac{1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; $Z_2 = \frac{1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}}{2} = 1$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 1$ ou $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2} \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$ ou $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

$z^2 - z + 1 = 0$:

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$

$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$:

$\Delta = 2 - 4 = -2 = 2i^2$

$z_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$

$z_2 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$

$P(z) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{S = \left\{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} ; \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right\}}$.

Sous forme exponentielle : $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $z_4 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

B – $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

1°- Montrons que si z_0 est solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\overline{z}_0$ et $\frac{1}{z_0}$ sont aussi solutions de $P(z) = 0$.

z_0 solution de $P(z) = 0 \Leftrightarrow P(z_0) = 0 \Leftrightarrow \overline{P(z_0)} = 0 \Leftrightarrow$

$\overline{z_0^4 - 3z_0^3 + \frac{9}{2}z_0^2 - 3z_0 + 1} = 0 \Leftrightarrow \overline{z}_0^4 - 3\overline{z}_0^3 + \frac{9}{2}\overline{z}_0^2 - 3\overline{z}_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$P(\overline{z}_0) = 0 \Rightarrow \overline{z}_0$ est solution de $P(z) = 0$.

$z_0 = 0$ n'étant pas solution de $P(z) = 0 \Rightarrow z_0 \neq 0 \Rightarrow$

$P\left(\frac{1}{z_0}\right) = \left(\frac{1}{z_0}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{z_0}\right)^3 + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{z_0}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{z_0}\right) + 1 = \frac{1}{z_0^4}\left(1 - 3z_0 + \frac{9}{2}z_0^2 - 3z_0^3 + z_0^4\right)$

$P\left(\frac{1}{z_0}\right) = \frac{P(z_0)}{z_0^4}$ $P(z_0) = 0 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{z_0}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_0}$ est solution de $P(z) = 0$.

2°- Calculons $P(1 + i)$ puis résolvons dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$.

$(1 + i)^4 = 2i \times 2i = -4$; $(1 + i)^3 = 2i(1 + i) = -2 + 2i$ d'où

$P(1 + i) = (1 + i)^4 - 3(1 + i)^3 + \frac{9}{2}(1 + i)^2 - 3(1 + i) + 1$

$= -4 - 3(-2 + 2i) + \frac{9}{2}(2i) - 3 - 3i + 1 = -9i - 6 + 6 + 9i = 0$

$P(1 + i) = 0 \Rightarrow$ les solutions de $P(z) = 0$ sont : $z_0 = 1 + i$; $\overline{z}_0 = 1 - i$;

$\frac{1}{z_0} = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{2}$ et $\frac{1}{\overline{z}_0} = \frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{2} \Rightarrow$ $\boxed{S = \left\{1 + i ; 1 - i ; \frac{1 - i}{2} ; \frac{1 + i}{2}\right\}}$.

C – $f(z) = z^5 - z^4 + 9z^3 - 7z^2 + 18$.

1°- Montrons que $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

$\overline{f(z)} = \overline{z^5 - z^4 + 9z^3 - 7z^2 + 18} = \overline{z}^5 - \overline{z}^4 + 9\overline{z}^3 - 7\overline{z}^2 + 18 = f(\overline{z})$.

Scanné avec CamScanner

2°- Calculons $f(1+i)$.

$f(1+i) = (1+i)^5 - (1+i)^4 + 9(1+i)^3 - 7(1+i)^2 + 18$

$f(1+i) = -4(1+i) + 4 + 9(-2+2i) - 7(2i) + 18 = -4i + 18i - 18 - 14i + 18$

$\boxed{f(1+i) = 0.}$

3°- Montrons que l'équation $f(z) = 0$ admet deux racines imaginaires pures.

Soit bi une racine imaginaire de $f(z) = 0$, avec $b \in \mathbb{R}^*$. On a $f(bi) = 0 \Leftrightarrow$

$(bi)^5 - (bi)^4 + 9(bi)^3 - 7(bi)^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow ib^5 - b^4 - 9ib^3 + 7b^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow$

$-b^4 + 7b^2 + 18 + i(b^5 - 9b^3) = 0$

$\begin{cases} -b^4 + 7b^2 + 18 = 0 \\ b^5 - 9b^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3(b^2 - 9) = 0 \quad (1) \\ -b^4 + 7b^2 + 18 = 0 \quad (2) \end{cases}$

$(1) : b^3(b^2 - 9) = 0 \Rightarrow b = 0$; $b = 3$ ou $b = -3$; seuls 3 et -3 vérifient (2)

$f(z) = 0$ admet donc deux racines imaginaires pures $\boxed{-3i \text{ et } 3i.}$

4°- Achevons la résolution de $f(z) = 0$.

On a $f(1+i) = 0 \Leftrightarrow \overline{f(1+i)} = 0 \Leftrightarrow f(\overline{1+i}) = 0 \Leftrightarrow f(1-i) = 0 \Rightarrow f(z)$ est divisible ou factorisable par $(z-1-i)(z-1+i)(z-3i)(z+3i)$.

$f(z) = (z-1-i)(z-1+i)(z-3i)(z+3i)(az+b)$. Déterminons a et b.

$f(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 9)(az + b) = (z^4 - 2z^3 + 11z^2 - 18z + 18)(az + b)$

$z^5 - z^4 + 9z^3 - 7z^2 + 18$ | $z^4 - 2z^3 + 11z^2 - 18z + 18$

$-z^5 + 2z^4 - 11z^3 + 18z^2 - 18z$ | $z + 1$

$0 + z^4 - 2z^3 + 11z^2 - 18z + 18$

$-z^4 + 2z^3 - 11z^2 + 18z - 18$

0

$a = 1$ et $b = 1$. Les racines de $f(z) = 0$ sont $1+i$; $1-i$; $3i$; $-3i$ et -1.

$f(z) = 0 \Rightarrow \boxed{S = \{1+i\ ;\ 1-i\ ;\ 3i\ ;\ -3i\ ;\ -1\}}$

D - (E) : $z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0$.

1°- Montrons que (E) admet une solution imaginaire pure z_0.

Soit $z_0 = ib$, $b \in \mathbb{R}^*$: $(ib)^4 + 5(ib)^3 + (11 - 3i)(ib)^2 + (10 - 10i)(ib) - 8i = 0$.

$b^4 - 5ib^3 - (11 - 3i)b^2 + 10ib + 10b - 8i = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} b^4 - 11b^2 + 10b = 0 \quad (1) \\ -5b^3 + 3b^2 - 10b - 8 = 0 \quad (2) \end{cases}$; $(1) : b^4 - 11b^2 + 10b = 0 \Leftrightarrow$

$b(b^3 - 11b + 10) = 0$; $b = 0$ ne vérifie pas (2) $\Rightarrow b^3 - 11b + 10 = 0$;

une racine évidente de cette équation est $b = 1$ et 1 vérifie l'équation (2); la racine imaginaire pure est donc $\boxed{z_0 = i.}$

2°- Montrons que l'équation (E) admet une solution réelle : soit a cette solution.

$a^4 + 5a^3 + (11 - 3i)a^2 + (10 - 10i)a - 8i = 0 \Leftrightarrow$

$a^4 + 5a^3 + 11a^2 + 10a - i(3a^2 + 10a + 8) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^4 + 5a^3 + 11a^2 + 10a = 0 \ (1) \\ 3a^2 + 10a + 8 = 0 \quad (2) \end{cases}$; $(2) : 3a^2 + 10a + 8 = 0$; $a_1 = -2$ et $a_1 = -\frac{4}{3}$

Seul -2 vérifie l'équation (2); la solution réelle de (E) est donc $\boxed{a = -2.}$

Scanné avec CamScanner

3°- Achevons la résolution dans $\mathbb{C}$ de (E).

L'équation (E) est équivalente à $(z-i)(z+2)(az^2+bz+c)=0 \Leftrightarrow$ $[z^2+(2-i)z-2i]\,(az^2+bz+c)=0$; déterminons az^2+bz+c.

$$\begin{array}{l|l} z^4+5z^3+(11-3i)z^2+(10-10i)z-8i & z^2+(2-i)z-2i \\ -z^4+(-2+i)z^3+2iz^2 & \hline z^2+(3+i)z+4 \\ \hline 0+(3+i)z^3+(11-i)z^2+(10-10i)z & \\ \quad -(3+i)z^3-(7-i)z^2+(-2+6i)z & az^2+bz+c=z^2+(3+i)z+4 \\ \hline 0+4z^2+(8-4i)z-8i & \\ \quad -4z^2-(8-4i)z+8i & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Résolvons $z^2+(3+i)z+4=0$: $\Delta=(3+i)^2-16=-8+6i$

Soit $\delta=x+iy$ une racine carrée de Δ ; on a

$$\begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ 2xy=6 \\ x^2+y^2=\sqrt{64+36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ xy=3 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ xy=3 \end{cases};$$

les racines carrées de Δ sont donc $\delta_1=1+3i$ et $\delta_2=-1-3i$

$z_1=\frac{-3-i+1+3i}{2}=-1+i$; $z_2=\frac{-3-i-1-3i}{2}=-2-2i$

L'ensemble solution de l'équation (E) est $\boxed{S=\{i\,;-2\,;-1+i\,;-2-2i\}.}$

4°- $z_0=i$; $z_1=-1+i$; $z_2=-2$; $z_3=-2-2i$.

Montrons que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique.

$\frac{z_1}{z_0}=\frac{-1+i}{i}=1+i$; $\frac{z_2}{z_1}=\frac{-2}{-1+i}=1+i$; $\frac{z_3}{z_2}=\frac{-2-2i}{-2}=1+i$. On a :

$\frac{z_1}{z_0}=\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_3}{z_2}=1+i=q \Rightarrow z_0, z_1, z_2$ et z_3 sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q=1+i$.

Exercice 3:

A - $|z|=1$.

1°- Montrons que: $z^5=\bar{z} \Leftrightarrow z^6=1$.

$z=0 \Rightarrow z^5=\bar{z} \Leftrightarrow zz^5=z\bar{z}$; $|z|^2=1 \Rightarrow z\bar{z}=1 \Rightarrow zz^5=1 \Leftrightarrow z^6=1$.

2°- Résolution de l'équation $z^5=\bar{z}$.

Les solutions sont les racines 6^e de l'unité : $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{6}}=e^{i\frac{k\pi}{3}}$. $z_0=1$.

$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_3=e^{i\pi}=-1$;

$z_4=e^{i\frac{8\pi}{6}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_5=e^{i\frac{10\pi}{6}}=e^{i\frac{5\pi}{3}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{S=\left\{1\,;\ -1\,;\ \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\,;\ \frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\,;\ -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\,;\ -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}.}$$

Scanné avec CamScanner

B - $z = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

1°- $z^2 = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})i$

$= (\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}) + 2(6-2)i$

$= (2\sqrt{2})(2\sqrt{6}) + 8i = 4\sqrt{12} + 8i = 8\sqrt{3} + 8i \Leftrightarrow \boxed{z^2 = 8\sqrt{3} + 8i}$

$z^2 = 8(i+\sqrt{3}) \Rightarrow |z^2| = 8|\sqrt{3}+i| = 8 \times 2 = 16.$

$\arg z^2 = \theta$: $\cos\theta = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{8i}{16} = \frac{i}{2} \Rightarrow$.

$$\boxed{|z^2| = 16 \text{ et } \arg z^2 = \frac{\pi}{6}}$$

$z^2 = 16\,e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow z$ est une racine carrée de $16\,e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z = \sqrt{16}\,e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow z = 4\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\pi\right)} \Rightarrow \boxed{|z| = 4 \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{12}\ [\pi].}$

2°- Déterminons n tels que z^n soit imaginaire pur.

$z^n = 4^n\,e^{i\left(\frac{n\pi}{12}\right)}$.

$z^n \in i\mathbb{R} \Rightarrow \arg z^n \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow n \arg z \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{n\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \boxed{n = 6 + 12k, k \in \mathbb{N}.}$

C - $Z = z + 1 + \frac{2z+1}{z^2+z+1}$; $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

1°- Déterminons les valeurs de z pour les quelles Z est défini.

Z est défini si et seulement si $z^2 + z + 1 \neq 0$.

Posons $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$

$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{Z \text{ est défini si } z \neq \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z \neq \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$

2°- • Montrons que $Z = z + 1 + \frac{2+\bar{z}}{z+\bar{z}+1}$.

$Z = z + 1 + \frac{2z+1}{z^2+z+1} = z + 1 + \frac{z\left(2+\frac{1}{z}\right)}{z\left(z+1+\frac{1}{z}\right)}$; $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z}z = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$;

d'où $Z = z + 1 + \frac{2+\bar{z}}{z+\bar{z}+1}$.

• Déduisons la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z en fonction de θ.

$Z = z + 1 + \frac{2+\bar{z}}{z+\bar{z}+1} = \frac{z^2 + z\bar{z} + z + z + \bar{z} + 1 + 2 + \bar{z}}{(z+\bar{z})+1} = \frac{z^2 + 1 + 2(z+\bar{z}) + 3}{(z+\bar{z})+1} = \frac{z^2 + 2(z+\bar{z}) + 4}{(z+\bar{z})+1}$.

$z + \bar{z} = 2\cos\theta$ et $z^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + i\,2\sin\theta\cos\theta$; d'où

$Z = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta + 4\cos\theta + 4}{2\cos\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta + 4\cos\theta + 4}{2\cos\theta + 1} + i\,\frac{\sin 2\theta}{2\cos\theta + 1}$

$$\boxed{X = \frac{\cos 2\theta + 4\cos\theta + 4}{2\cos\theta + 1} \text{ et } Y = \frac{\sin 2\theta}{2\cos\theta + 1}.}$$

3°- Déterminons θ pour que Z soit réel.

Z est réel $\Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow \sin 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta = k\pi \Leftrightarrow \boxed{\theta = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.}$

Exercice 4:

I - $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

Scanné avec CamScanner

1) Ecriture de z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

2) Ecriture de z_3 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (1)

$z_3 = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ (2)

3) En déduisons les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

$(1) = (2) \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}}$.

II - $P_a(z) = z^3 - 6az^2 + 12a^2z - 7a^3$.

a) Résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_1(z) = 0$.

$P_1(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0$; 1 est une racine de cette équation $\Rightarrow$ $P_1(z)$ est factorisable par $z-1$; on a $P_1(z) = (z-1)(z^2 - 5z + 7)$.

Résolvons $z^2 - 5z + 7 = 0$: $\Delta = -3 \Rightarrow$ les racines carrées de Δ sont $-i\sqrt{3}$ et $i\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $z_1 = \frac{5-i\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = \frac{5+i\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{S = \left\{1\,;\,\frac{5-i\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{5+i\sqrt{3}}{2}\right\}}$.

b) Résolution dans $\mathbb{C}$ $P_a(z) = 0$.

$P_a(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 - 6az^2 + 12a^2z - 7a^3 = 0$. Posons $z = aZ$; on obtient donc $(aZ)^3 - 6a(aZ)^2 + 12a^2(aZ) - 7a^3 = 0 \Leftrightarrow a^3(Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 7) = 0$.

$a \neq 0$ donc $Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 7 = 0 \Leftrightarrow P_1(Z) = 0 \Rightarrow Z_1 = 1$; $Z_2 = \frac{5-i\sqrt{3}}{2}$; $Z_2 = \frac{5+i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de $P_a(z) = 0$ sont donc $z_1 = a$; $z_2 = a\left(\frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right)$ et $z_3 = a\left(\frac{5+i\sqrt{3}}{2}\right)$; $\boxed{S = \left\{a\,;\,a\left(\frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right)\,;\,a\left(\frac{5+i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}}$.

c) Soit $A(1)$; $B\left(\frac{5+i\sqrt{3}}{2}\right)$; $C\left(\frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right)$ les sommets du triangle T_1.

$AB = |z_B - z_A| = \left|\frac{5+i\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$; $AC = |z_C - z_A| \Leftrightarrow$

$AC = \left|\frac{5-i\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$; $BC = |z_C - z_B| = \left|\frac{5-i\sqrt{3}}{2} - \frac{5+i\sqrt{3}}{2}\right| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

$AB = AC = BC = \sqrt{3} \Rightarrow T_1$ est équilatéral.

- Soit $A(a)$; $B\left(a\frac{5+i\sqrt{3}}{2}\right)$; $C\left(a\frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right)$ les sommets du triangle T_a.

$AB = \left|a\left(\frac{5+i\sqrt{3}}{2}\right) - a\right| = \left|a\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\right| = |a|\sqrt{3}$;

$AC = \left|a\left(\frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right) - a\right| = \left|a\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)\right| = |a|\sqrt{3}$; $BC = |-ia\sqrt{3}| = |a|\sqrt{3}$

$AB = AC = BC = |a|\sqrt{3} \Rightarrow T_a$ est équilatéral pour tout complexe a non nul.

III - $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$.

1°- Factorisons $P(z)$ en produit de deux polynômes du second degré.

Scanné avec CamScanner

$P(z) = (z^2+3z)^2 - i^2(3z+5)^2 = (z^2+3z)^2 - (3iz+5i)^2$

$P(z) = (z^2+3z-3iz-5i)(z^2+3z+3iz+5i)$

$P(z) = [z^2+(3-3i)z-5i][z^2+(3+3i)z+5i]$.

2°- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$.

$\Delta = (3(1+i))^2 - 4(5i) = 18i - 20i = -2i$; les racines carrées de $-2i$ sont $\delta_1 = 1-i$ et $\delta_1 = -1+i$. Les solutions de l'équation sont donc

$z_1 = \frac{-3-3i+1-i}{2} = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$ et $z_2 = \frac{-3-3i-1+i}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2-i$.

3°- En déduisons les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

$P(z)$ est de la forme $(z^2+bz+c)(z^2+\bar{b}z+\bar{c}) \Rightarrow$ les solutions de l'équation $z^2+bz+c=0$ sont les conjugués des solutions de $z^2+\bar{b}z+\bar{c}=0$, d'où les solutions de $P(z)=0$ sont $\boxed{-1-2i\ ;\ -2-i\ ;\ -1+2i\ ;\ -2+i.}$

4°- Montrons que $P(z)$ est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

$P(z) = (z+1+2i)(z+2+i)(z+1-2i)(z+2-i)$

$= (z+1+2i)(z+1-2i)(z+2+i)(z+2-i)$

$= [(z+1)^2-(2i)^2][(z+1)^2-i^2] = (z^2+2z+5)(z^2+4z+5)$

$\boxed{P(z) = (z^2+2z+5)(z^2+4z+5).}$

Exercice 5:

I - 1) Module et argument de $z_n = (1+i\sqrt{3})^n$, $n\in\mathbb{N}$.

Posons $z = 1+i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = 2$ et $\arg z = \theta$ avec $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $\theta = \frac{\pi}{3}$ d'où $\arg z = \frac{\pi}{3}$. $z_n = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]^n = \left[2^n, \frac{n\pi}{3}\right]$ $\boxed{|z_n| = 2^n \text{ et } \arg z_n = \frac{n\pi}{3};\ n\in\mathbb{N}}$

$z_n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) = 2^n\cos\frac{n\pi}{3} + i2^n\sin\frac{n\pi}{3}$.

z_n est réel si et seulement si $Im(z_n) = 0 \Leftrightarrow 2^n\sin\frac{n\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{3} = 0 \Rightarrow$

$\frac{n\pi}{3} = k\pi \Rightarrow \boxed{n = 3k, k\in\mathbb{N}.}$

2) A_n est le point d'affixe z_n. D'où $a\overrightarrow{OA_1} + b\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$az_1 + bz_2 + z_3 + z_4 = 0$. $z_1 = 1+i\sqrt{3}$; $z_2 = (1+i\sqrt{3})^2 = -2+2i\sqrt{3}$;

$z_3 = (-2+2i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = -8$; $z_4 = -8(1+i\sqrt{3}) = -8-i8\sqrt{3}$.

$a(1+i\sqrt{3}) + b(-2+2i\sqrt{3}) - 8 - 8 - i8\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a - 2b - 16 = 0 \\ a\sqrt{3} + 2b\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 16 \\ a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2a = 24 \\ a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = \frac{8-12}{2} = -2 \end{cases}$; $\boxed{a = 12 \text{ et } b = -2}$

II - $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $u = 1+j$.

1- Etablissons les égalités $1+j+j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.

$1+j+j^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = 0$

$j^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{3i\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8} - \frac{3i\sqrt{3}}{8} = 1$

Scanné avec CamScanner

2- Démontrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u^{2n+1} = -j^{n+2}$.

Soit $P(n) : u^{2n+1} = -j^{n+2}$;

- vérifions $P(0)$: $u^{0+1} = -j^{0+2} \Leftrightarrow u = -j^2 \Leftrightarrow 1 + j = -j^2 \Leftrightarrow 1 + j + j^2 = 0$

$\Rightarrow P(0)$ est vraie ;

- supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire montrons que si $u^{2n+1} = -j^{n+2}$ alors $u^{2n+3} = -j^{n+3}$.

$u^{2n+3} = u^{2n+1}.u^2 = -j^{n+2}(1+j)^2 = -j^{n+2}(-j^2)^2 = -j^{n+2}(j^3)(-j) = -j^{n+3}$;

d'où $u^{2n+1} = -j^{n+2} \Rightarrow u^{2n+3} = -j^{n+3}$

conclusion : pour tout entier naturel n, on a $\boxed{u^{2n+1} = -j^{n+2}.}$

3- Exprimer u^{2n} en fonction de n et de j.

$u^{2n+1} = u^{2n}.u = -j^{n+2} \Leftrightarrow u^{2n} = \frac{-j^{n+2}}{1+j} = \frac{-j^{n+2}}{-j^2} = j^{n+2-2} = j^n \Leftrightarrow \boxed{u^{2n} = j^n}$

4- Calculons u^{24} et u^{31}.

$u^{24} = u^{2\times 12} = j^{12} = j^{4\times 3} = (j^3)^4 = (1)^4 = 1$

$u^{31} = u^{2\times 15+1} = -j^{15+2} = -j^2(j^3)^5 = -j^2 = 1 + j = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

III - $(E) : z^3 + (i-2)z^2 + 3(1-i)z + 2i - 2 = 0$.

1°- Démontrons que l'équation (E) admet une solution réelle z_1.

Soit $z_1 = a$. On a : $a^3 + (i-2)a^2 + 3(1-i)a + 2i - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$a^3 + a^2 i - 2a^2 + 3a - 3ai + 2i - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$a^3 - 2a^2 + 3a - 2 + i(a^2 - 3a + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^3 - 2a^2 + 3a - 2 = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - a^2 - a^2 + 3a - 2 = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^3 - a^2 - (a^2 - 3a + 2) = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - a^2 = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^2(a-1) = 0 \quad (1) \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow a = 0$ ou $a = 1$. Seul $a = 1$ vérifie (2)

$\Rightarrow$ la racine réelle de (E) est donc $\boxed{z_1 = 1.}$

2°- Déterminons des deux autres solutions de (E) .

$z^3 + (i-2)z^2 + 3(1-i)z + 2i - 2$ est factorisable par $z - 1 \Rightarrow$

$(z-1)(Az^2 + Bz + C) = z^3 + (i-2)z^2 + 3(1-i)z + 2i - 2 \Leftrightarrow$

$(z-1)(Az^2 + Bz + C) = Az^3 + Az^2 + Cz - Az^2 - Bz - C$

$(z-1)(Az^2 + Bz + C) = Az^3 + (B-A)z^2 + (C-B)z - C.$

$Az^3 + (B-A)z^2 + (C-B)z - C = z^3 + (i-2)z^2 + 3(1-i)z + 2i - 2$

$\begin{cases} A = 1 \\ B - A = i - 2 \\ C - B = 3 - 3i \\ -C = 2i - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = i - 2 + A \\ C = B + 3 - 3i \\ C = 2 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 + i \\ C = 2 - 2i \end{cases}$; l'équation devient

$(z-1)[z^2 - (1-i)z + 2 - 2i] = 0$; $z = 1$ ou $z^2 + (i-1)z + 2 - 2i = 0$

$\Delta = (i-1)^2 - 4(2-2i) = -1 - 2i + 1 - 8 + 8i = -8 + 6i$;

Les racines carrées de Δ sont $\delta_1 = 1 + 3i$ et $\delta_1 = -1 - 3i$, d'où

$z_2 = \frac{1 - i - 1 - 3i}{2} = -2i$; $z_3 = \frac{1 - i + 1 + 3i}{2} = 1 + i.$

Scanné avec CamScanner

3°- Déterminons le complexe z tel que : $|z_1 - z| = |z_2 - z| = |z_3 - z|$.

Posons $z = x + iy \Rightarrow z_1 - z = 1 - x - iy$; $z_2 - z = -x - i(2 + y)$;

$z_3 - z = 1 - x + i(1 - y)$. Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} |z_1 - z| = |z_2 - z| \\ |z_1 - z| = |z_3 - z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 + y^2 = x^2 + (2+y)^2 \\ (1-x)^2 + y^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (1-x)^2 + y^2 = x^2 + (2+y)^2 \ (1) \\ y^2 = (1-y)^2 \ (2) \end{cases}$$; résolvons l'équation (2) :

$y^2 = (1-y)^2 \Leftrightarrow 1 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow$ l'équation (1) donne :

$(1-x)^2 + \frac{1}{4} = x^2 + \frac{25}{4} \Leftrightarrow -2x + \frac{5}{4} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{5}{2} + \frac{i}{2}}$

Exercice 6:

I - M(z) et M'(z') avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1°- Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \mathcal{R}e(z'\bar{z}) = 0$

$\overrightarrow{OM}(z)$ et $\overrightarrow{OM'}(z')$; $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow \frac{z}{z'} \epsilon i\mathbb{R}$

$\frac{z'}{z} = \frac{x'+iy'}{x+iy} = \frac{(x'+iy')(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}(x'+iy')(x-iy) = \frac{1}{x^2+y^2}(z'\bar{z})$.

$(x^2 + y^2) \epsilon \mathbb{R}$; d'où $\frac{z'}{z} \epsilon i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z'\bar{z}) = 0$

2°- Montrons que les points O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow \mathcal{I}m(z'\bar{z}) = 0$.

O, M et M' alignés $\Leftrightarrow \frac{z'}{z} \epsilon \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2}(x'+iy')(x-iy) \epsilon i\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\mathcal{I}m[(x'+iy')(x-iy)] = 0 \Rightarrow \mathcal{I}m(z'\bar{z}) = 0$

3°- N a pour affixe $z^2 - 1 \Rightarrow N(z^2 - 1)$

Déterminons l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux.

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{z_N}{z_M} \epsilon i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z^2-1}{z} \epsilon i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(x+iy)^2 - 1}{x+iy} \epsilon i\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\frac{x^2 - y^2 + 2xyi - 1}{x+iy} \epsilon i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(x^2 - y^2 - 1 + 2xyi)(x-iy)}{x^2+y^2} \epsilon i\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\left[\frac{x(x^2-y^2-1) + 2xy^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2y - y(x^2-y^2-1)}{x^2+y^2}\right] \epsilon i\mathbb{R} \Leftrightarrow x(x^2 - y^2 - 1) + 2xy^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x[x^2 - y^2 - 1 + 2y^2] = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - y^2 - 1) = 0$;

$x = 0$ ou $x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$

L'ensemble des points M est la réunion de l'axe imaginaire et du cercle de centre O et de rayon 1.

4°- $z \neq 0$; $P\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)$.

a) Montrons que $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -\bar{z}^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$.

$\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = \left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\overline{\left(z^2\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\right)} = -\bar{z}^2\left(1 - \frac{1}{z^2}\right).\overline{\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)} =$

$= -\bar{z}^2\left|1 - \frac{1}{z^2}\right|^2 = -\bar{z}^2\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$, $(car\ Z\bar{Z} = |Z|^2)$.

b) Ensemble des M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.

O, N et P sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_P}{z_N} \epsilon \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{z^2} - 1}{z^2 - 1} \epsilon \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right)}{(z^2-1)\left(\overline{z^2-1}\right)} \epsilon \mathbb{R} \Leftrightarrow$

Scanné avec CamScanner

$\frac{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}}{|z^2-1|^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m\left[\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}\right]=0 \Leftrightarrow \mathcal{I}m\left(-\bar{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \mathcal{I}m(-\bar{z}^2)=0$, $\left(car\ \left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2 \in \mathbb{R}\right)$.

$\mathcal{I}m(-\bar{z}^2)=0 \Leftrightarrow \mathcal{I}m(-x^2+y^2+2ixy)=0 \Leftrightarrow 2xy=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $y=0$.

L'ensemble des points M est la réunion des axes du repère privée de l'origine O du repère.

II - $A(1-i)$ et $C(2+3i)$; $f(z)=\frac{(5-i)z-13-13i}{(5-i)z-4+6i}$

1°- Ensemble de définition D de f :

f est définie si et seulement si $(5-i)z-4+6i \neq 0 \Leftrightarrow z \neq \frac{4-6i}{5-i} \Leftrightarrow$

$z \neq \frac{(4-6i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{20+4i-30i+6}{25+1}=1-i$; $D=\mathbb{C}-\{1-i\}$.

2°- a) Montrons que $\forall z \in D$, on a $f(z)=\frac{z-2-3i}{z-1+i}$.

$f(z)=\frac{(5-i)z-13-13i}{(5-i)z-4+6i}=\frac{z-\frac{13+13i}{5-i}}{z-\frac{4-6i}{5-i}}=\frac{z-(2-3i)}{z-(1-i)}=\frac{z-2-3i}{z-1+i}$

b) En déduisons que, $\forall z \in D-\{2+3i\}$, $\arg f(z)=(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC})+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\arg f(z)=\arg\left(\frac{z-2-3i}{z-1+i}\right)=\arg\left(\frac{z_M-z_C}{z_M-z_A}\right)=(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC})+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3°- a) Déterminons, l'ensemble (E) des points M du plan tels que f(z) soit imaginaire pur.

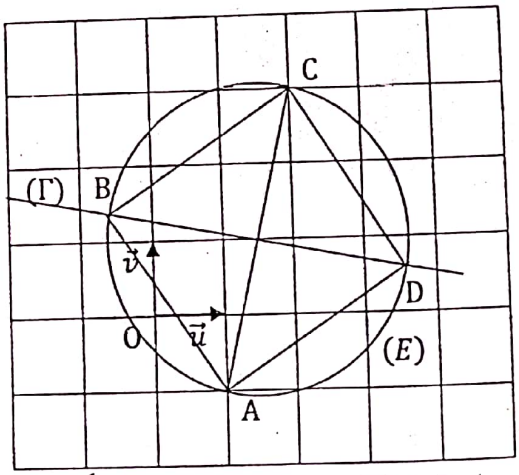
f(z) est imaginaire pur si et seulement si $\arg f(z)=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC})=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \Rightarrow$ l'ensemble cherché est le cercle de diamètre [AC].

b) Déterminons l'ensemble (Γ) des points M tels que $|f(z)|=1$.

$\left|\frac{z_M-z_C}{z_M-z_A}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{MC}{MA}=1 \Leftrightarrow MC=MA \Rightarrow$ l'ensemble des points M est la médiatrice du segment [AC].

4°- Le quadrilatère ABCD est un carré.



III - M(z) et M'(z') $f: M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z'=\frac{1}{\bar{z}}$, avec $M \neq O$ et $M' \neq O$.

1) Démontrons que pour $z \neq 0$, $\arg(z')=\arg(z)\ [2\pi]$.

$\arg z'=\arg\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=-\arg\bar{z}=\arg z\ (2\pi)$.

Scanné avec CamScanner

En déduirons que, $\forall M \epsilon P - \{O\}$: $\arg z' = \arg(z_{M'} - z_O) = \arg(z_M - z_O) \Leftrightarrow (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{O\,M'}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})\ 2k\pi$ d'où les points O, M, M′ sont alignés sur une demi droite d'origine O.

2) Déterminons l'ensemble des points M tels que f(M) = M :

$z' = \frac{1}{\bar{z}}$ on pose $z = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow zz' = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

L'ensemble cherché est un cercle de centre O et de rayon 1.

3) Etablissons que : $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i}\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$.

$$\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{\frac{1}{\bar{z}}-1}{\frac{1}{\bar{z}}-i} = \frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}} = \frac{\bar{z}-1}{i\bar{z}-1} = \frac{1}{i}\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right) = \frac{i}{i^2}\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right) = -i\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}.$$

$$= i\left(-\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)} \text{ CQFD.}$$

En déduisons une relation entre $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$.

$$\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = \arg(-i) + \arg\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)} = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = -\left[\frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\right].$$

4) M(z) avec $z \neq i$ et $z \neq 1$.

Démontrons que M est sur la droite (UV) si et seulement si $\frac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul.

$M \epsilon (UV) \Leftrightarrow \overrightarrow{UM}$ colinéaire à $\overrightarrow{VM} \Leftrightarrow \frac{z_M - z_U}{z_M - z_V} \epsilon \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z-1}{z-i} \epsilon \mathbb{R}^*$ CQFD.

Déterminons l'image par f de la droite (UV) privée des points U et V.

U(1) et $z' = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow z' = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow f(U) = U$

V(i) et $z' = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow z' = \frac{1}{-i} = i \Rightarrow f(V) = V$

L'image de la droite (UV) privée des points U et V est la droite (UV) privée des points U et V.

Exercice 7:

I -1°- (E) : $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

a) Déterminons les réels a et b tels que (E) s'écrive $(z-2)(z^2 + az + b) = 0$.

On trouve $a = 6$ et $b = 14$ après division euclidienne (ou autre méthode).

b) Résolvons (E).

(E) est équivalente à $(z-2)(z^2 + 6z + 14) = 0$.

$z^2 + 6z + 14 = 0$; $\Delta' = 9 - 14 = -5 \Rightarrow z_1 = -3 - i\sqrt{5}$, $z_1 = -3 + i\sqrt{5}$

$$\boxed{S = \{2,\ -3 - i\sqrt{5},\ -3 + i\sqrt{5}\}.}$$

2°- $(\mathcal{H})$ l'ensemble des points M(z) tel que $z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2$; $z = x + iy$.

a) Montrons que : M appartient à $(\mathcal{H}) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$.

$M(x+iy)\epsilon(\mathcal{H}) \Leftrightarrow (x+iy)^2 - 4 = 4 - (x-iy)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - y^2 + 2ixy - 4 = 4 - x^2 + 2ixy + y^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4.$

b) A, B et C les points d'affixes respectives 2 ; $-3 - i\sqrt{5}$ et $-3 + i\sqrt{5}$.

Vérifions que A, B et C appartiennent à $(\mathcal{H})$.

Scanné avec CamScanner

$A\binom{2}{0} \Rightarrow 2^2 = 4 \Rightarrow A\epsilon(\mathcal{H})$;

$B\binom{-3}{-\sqrt{5}} \Rightarrow (-3)^2 - (-\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow B\,\epsilon(\mathcal{H})$;

$C\binom{-3}{\sqrt{5}} \Rightarrow (-3)^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow C\,\epsilon(\mathcal{H})$

3°- r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminons les affixes des points A', B' et C', images respectives de A, B et C par la rotation r.

$A' = r(A) \Leftrightarrow z_{A'} = e^{\frac{-i\pi}{4}}.z_A \Leftrightarrow z_{A'} = 2e^{\frac{-i\pi}{4}} = 2\cos\frac{\pi}{4} - 2i\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$\boxed{z_{A'} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

$B' = r(B) \Leftrightarrow z_{B'} = e^{\frac{-i\pi}{4}}.z_B \Leftrightarrow z_{B'} = e^{\frac{-i\pi}{4}}(-3 - i\sqrt{5}) \Leftrightarrow$

$z_{B'} = \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)(-3 - i\sqrt{5}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-3 - i\sqrt{5}) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)(-3 - i\sqrt{5}) = \frac{-3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2} + i\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}$

$\boxed{z_{B'} = \frac{-3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2} + i\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}}$

$C' = r(C) \Leftrightarrow z_{C'} = e^{\frac{-i\pi}{4}}.z_C \Leftrightarrow z_{C'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-3 + i\sqrt{5}) \Leftrightarrow$

$z_{C'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)(-3 + i\sqrt{5}) = \frac{-3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2} + i\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$.

$\boxed{z_{C'} = \frac{-3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2} + i\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}}$

b) M'(z') l'image de M(z) par la rotation r ; $z' = x' + iy'$

-Exprimons x et y en fonction de x' et y' ;

$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z \Leftrightarrow x' + iy' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x + iy) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) + i\frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'\sqrt{2} = x + y \quad (1) \\ y'\sqrt{2} = -x + y \quad (2) \end{cases}$; (1) + (2) donne :

$\boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')}$ $\Rightarrow$ (1) donne $\boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')}$

- Prouvons que M' appartient à $(\mathcal{H}') \Leftrightarrow x'y' = -2$.

$M'\epsilon(\mathcal{H}') \Leftrightarrow M\epsilon(\mathcal{H}) \Leftrightarrow$ les coordonnées x et y de M vérifient $x^2 - y^2 = 4$

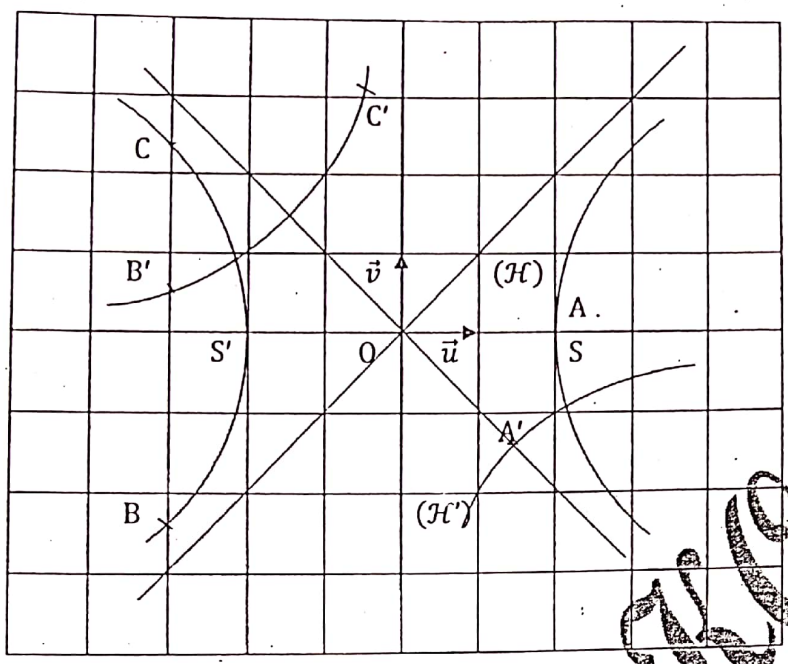
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x' - y')^2 - \frac{1}{2}(x' + y')^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x' - y' + x' + y')(x' - y' - x' - y') = 4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x')(-2y') = 4 \Leftrightarrow x'y' = -2.$

4°- $(\mathcal{H}) : x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow (\mathcal{H})$ est l'hyperbole équilatère d'excentricité $e = \sqrt{2}$, de sommets $S\binom{2}{0}$ et $S'\binom{-2}{0}$ et d'asymptotes $\Delta : y = x$ et $\Delta' : y = -x$.

$(\mathcal{H}')$ est l'hyperbole d'équation $y = \frac{-2}{x}$.

Scanné avec CamScanner



II - $f(z) = \frac{2-iz}{1-z}$; A(1) , B$(-2i)$; $z = x + iy$ et $z \neq 1$.

1) a. Ecrivons f(z) sous forme algébrique.

$$f(z) = \frac{2-i(x+iy)}{1-(x+iy)} = \frac{(2+y)-ix}{1-x-iy} = \frac{[(2+y)-ix][(1-x)+iy]}{(1-x)^2+y^2}$$

$$= \frac{(2+y)(1-x)+xy}{(1-x)^2+y^2} + i\,\frac{y(2+y)-x(1-x)}{(1-x)^2+y^2}$$

- En déduisons l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que f(z) soit réel.

f(z) est réel si et seulement si $\mathcal{I}m[f(z)] = 0 \Leftrightarrow y(2+y) - x(1-x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}$ $\Rightarrow$ (E) est le cercle de centre $I\left(\frac{1}{2}\,;\,-1\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b. Vérifions que A et B appartiennent à (E) et construire (E).

A(1 ; 0) et B(0 ; −2). On a:

$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (0+1)^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ $\Rightarrow$ A appartient à (E);

$\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + (-2+1)^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ $\Rightarrow$ B appartient à (E).

2) $z' = f(z)$.

a. Vérifions que i n'a pas d'antécédent par f et exprimons z en fonction de z'.

Résolvons l'équation $f(z) = i$:

$\frac{2-iz}{1-z} = i \Leftrightarrow 2 - iz = i - iz \Leftrightarrow 2 \neq i$ d'où i n'a pas d'antécédent par f.

Exprimons, pour $z' \neq i$, z en fonction de z'.

$z' = \frac{2-iz}{1-z} \Leftrightarrow z' - z'z = 2 - iz \Leftrightarrow z(z'-i) = z' - 2 \Leftrightarrow z = \frac{z'-2}{z'-i}$.

Pour tout $z' \neq i$, l'équation $f(z) = z'$ admet une solution unique $z \neq 1$; d'où f est bijective.

Scanné avec CamScanner

b. M(z), M′(z′) ; C(2) et D(i). Montrons que $OM = \frac{M'C}{M'D}$:

$|z| = \left|\frac{z'-2}{z'-i}\right| \Leftrightarrow |z| = \frac{|z'-2|}{|z'-i|} \Leftrightarrow OM = \frac{CM'}{DM'} = \frac{M'C}{M'D}$.

c. Montrons que si M décrit le cercle de centre O et de rayon 1, son image M′ appartient à une droite fixe.

M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 $\Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow \frac{M'C}{M'D} = 1 \Leftrightarrow$ $M'C = M'D \Leftrightarrow$ appartient à la médiatrice du segment [CD] avec $M \neq A$.

d. Montrons que si M est un point de l'axe réel, différent de O et de A alors M′ appartient à la droite (CD).

$M \epsilon (O, \vec{e_1}) \Leftrightarrow \arg z = k\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z'-2}{z'-i}\right) = k\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{M'}-z_C}{z_{M'}-z_D}\right) = k\pi \Leftrightarrow$ $\left(\overrightarrow{M'D}, \overrightarrow{M'C}\right) = k\pi \Leftrightarrow$ M′ appartient à la droite (CD).

Exercice 8:

I - Déterminons le module et un argument de chacun des complexes puis donnons leur forme trigonométrique :

$z_1 = -2(\sin x + i\cos x) = -2\sin x - 2i\cos x$

$|z_1| = \sqrt{(-2\sin x)^2 + (-2\cos x)^2} = \sqrt{4(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 2$

$\arg z_1 = \theta \Rightarrow \begin{cases}\cos\theta = -\sin x \\ \sin\theta = -\cos x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \sin\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)\end{cases} \Leftrightarrow \arg z_1 = -\frac{\pi}{2} - x$

$$\boxed{z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)\right]}$$

$z_2 = 2e^{\frac{i\pi}{2}}(-\cos x + i\sin x) = 2e^{\frac{i\pi}{2}}e^{i(\pi - x)}$; $|z_2| = 2$ et $\arg z_2 = \frac{3\pi}{2} - x$

$$\boxed{z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right]}$$

$z_3 = \frac{-\cos 2x + i\sin 2x}{2\cos 3x - 2i\sin 3x} = \frac{e^{i(\pi - 2x)}}{2e^{-i3x}} = \frac{1}{2}e^{i(\pi + x)}$; $|z_3| = \frac{1}{2}$ et $\arg z_3 = \pi + x$

$$\boxed{z_3 = \frac{1}{2}[\cos(\pi + x) + i\sin(\pi + x)].}$$

$z_4 = 1 - \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$;

$|z_4| = \sqrt{\left(1 - \cos\frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(2\sin^2\frac{\pi}{10}\right)^2 + \left(2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\right)^2}$

$= \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{10}\left(\sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{10}\right)} = 2\sin\frac{\pi}{10}$; $|z_4| = 2\sin\frac{\pi}{10}$

$\arg z_4 = \alpha \Rightarrow \begin{cases}\cos\alpha = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{10}} \\ \sin\alpha = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{10}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{10}}{2\sin\frac{\pi}{10}} \\ \sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}{2\sin\frac{\pi}{10}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{10} \\ \sin\alpha = \cos\frac{\pi}{10}\end{cases}$

$\arg z_4 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$; $\boxed{z_4 = 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \times \left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]}$

Scanné avec CamScanner

$z_5 = (1+\cos x+\cos 2x)+i(\sin x+\sin 2x) =$
$= (2\cos^2 x+\cos x)+i(\sin x+2\sin x\cos x) = \cos x(1+\cos 2x)+i\sin x(1+\cos 2x)$

$\boxed{z_5 = (1+\cos 2x)(\cos x+i\sin x)}$; $|z_5| = 1+\cos 2x$ et $\arg z_5 = x$

$z_6 = \frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+tan^2\theta}$, $\theta\epsilon\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, $z_6 = \frac{(1+i\tan\theta)^2}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x\,(1+i\tan\theta)^2 =$

$= [\cos x + i\cos x\tan x]^2 = (\cos x+i\sin x)^2 = \cos 2x+i\sin 2x$; $|z_6| = 1$ et $\arg z_6 = 2x$.

$\boxed{z_6 = \cos 2x+i\sin 2x}$

$z_7 = \sin\theta + 2isin^2\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2isin^2\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\theta\epsilon]0;2\pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2}\epsilon]0;\pi[\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}>0 \Rightarrow |z_7| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z_7 = \frac{\theta}{2}$.

$\boxed{z_7 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)}$

$z_8 = 1+\cos x - i\sin x = 2cos^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-i\sin\frac{x}{2}\right)$, $x\epsilon]0;\pi[$

$= 2\cos\frac{x}{2}\left[\cos\left(-\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right]$; $\frac{x}{2}\epsilon]0;\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\frac{x}{2}>0 \Rightarrow |z_8| = 2\cos\frac{x}{2}$ et

$\arg z_8 = -\frac{x}{2}$; $\boxed{z_8 = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\left[\cos\left(-\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$

II - Soit le nombre complexe $z_0 = e^{\frac{i2\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z_0+{z_0}^4$ et $\beta = {z_0}^2+{z_0}^3$.

1- Démontrons que : $1+z_0+{z_0}^2+{z_0}^3+{z_0}^4 = 0$ (1).

$1+z_0+{z_0}^2+{z_0}^3+{z_0}^4$ est la somme des cinq premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison z_0 ; d'où

$1+z_0+{z_0}^2+{z_0}^3+{z_0}^4 = 1\times\frac{1-{z_0}^5}{1-z_0} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{\frac{i2\pi}{5}}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{i2\pi}{5}}} = 0.$

2- Calculons $\alpha+\beta$ et $\alpha\times\beta$.

$\alpha+\beta = z_0+{z_0}^4+{z_0}^2+{z_0}^3 = -1$

$\alpha\times\beta = (z_0+{z_0}^4)({z_0}^2+{z_0}^3) = {z_0}^3+{z_0}^4+{z_0}^6+{z_0}^7$

En multipliant la relation (1) par ${z_0}^3$ on obtient

${z_0}^3+{z_0}^4+{z_0}^5+{z_0}^6+{z_0}^7 = 0$; d'où ${z_0}^3+{z_0}^4+{z_0}^6+{z_0}^7 = -{z_0}^5 \Leftrightarrow$

$\alpha\times\beta = -{z_0}^5 = -e^{i2\pi} = -1$. $\boxed{\alpha+\beta = -1 \quad \text{et} \quad \alpha\times\beta = -1}$

Déduisons que α et β sont solutions de l'équation (E) : $z^2+z-1 = 0$.

α et β sont deux nombres dont la somme $S = -1$ et le produit $P = -1$ vérifient l'équation $z^2-Sz+P = 0$; soit $z^2+z-1 = 0$. (E)

3- Exprimons α et β respectivement en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

$\alpha = z_0+{z_0}^4 = e^{\frac{i2\pi}{5}}+e^{\frac{i8\pi}{5}} = \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$

$= \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$

Scanné avec CamScanner

$\beta = z_0{}^2 + z_0{}^3 = e^{\frac{i4\pi}{5}} + e^{\frac{i6\pi}{5}} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$

$= \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} + \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos\frac{4\pi}{5}$

Signe de α et signe de β.

$0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{5} > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$

$\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi \Rightarrow \cos\frac{4\pi}{5} < 0 \Leftrightarrow \beta < 0.$

4-Résolution de l'équation (E):

$z^2 + z - 1 = 0 : \Delta = 5 \Rightarrow z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, d'où $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et

$\beta = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$; $\boxed{\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}}$

III - $z_A = 2 - 4i$; $z_B = -i$; $z_M = z$; $z_{M'} = z'$; $z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}$

1°/ Exprimons les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles (x, y) de M.

$z' = x' + y' = \frac{-i(x+iy) - 2 + 4i}{x + iy + i} = \frac{[(y-2) + i(4-x)][x - i(y+1)]}{x^2 + (y+1)^2}$

$= \frac{-3x + 4y + 4}{x^2 + (y+1)^2} + i\frac{-x^2 - y^2 + 4x + y + 2}{x^2 + (y+1)^2} \Rightarrow \boxed{x' = \frac{-3x + 4y + 4}{x^2 + (y+1)^2}}$ et

$\boxed{y' = \frac{-x^2 - y^2 + 4x + y + 2}{x^2 + (y+1)^2}}$

2°/ Déterminons et représentons l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel ; z' est réel $\Leftrightarrow Im(z') = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow$

$-x^2 - y^2 + 4x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2.$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $I\left(2 ; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{5}{2}$.

b) z' soit imaginaire pur ; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow$

$-3x + 4y + 4 = 0 \Rightarrow$ L'ensemble cherché est la droite d'équation $-3x + 4y + 4 = 0$ privée du point de coordonnées $(0 ; -1)$.

3°/ $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$.

Vérifions que $ZZ' = -3 + 4i$.

$ZZ' = (z+i)(z'+i) = (z+i)\left(\frac{-iz - 2 + 4i}{z+i} + i\right) = -iz - 2 + 4i + iz - 1 = -3 + 4i$

Calculer $|ZZ'|$. $|ZZ'| = \sqrt{9+16} = 5$.

4°/ a) Déterminons l'ensemble (E) des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.

$|ZZ'| = 5 \Leftrightarrow |(z+i)(z'+i)| = 5 \Leftrightarrow |z+i| \times |z'+i| = 5 \Leftrightarrow$

$|x + i(y+1)| \times |x' + i(y'+1)| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \times \sqrt{x'^2 + (y'+1)^2} = 5$

$[x^2 + (y+1)^2] \times [x'^2 + (y'+1)^2] = 25 \Leftrightarrow r^2[x'^2 + (y'+1)^2] = 25 \Leftrightarrow$

$x'^2 + (y'+1)^2 = \left(\frac{5}{r}\right)^2 \Rightarrow (E)$ est le cercle de centre B et de rayon $r' = \frac{5}{r}$.

b) Déterminons r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Les deux cercles de même centre B sont dans ce cas confondus ; d'où :

$r' = r \Leftrightarrow \frac{5}{r} = r \Leftrightarrow r^2 = 5 \Leftrightarrow \boxed{r = \sqrt{5}}$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 9:

I - 1°/ Linéarisons les expressions suivantes :

$A = sin^4x.cos^3x = \frac{1}{64}(\cos 7x - \cos 5x - 3\cos 3x + 3\cos x)$.

$B = cos^4x - sin^7x = \frac{1}{64}(8\cos 4x + 32\cos 2x - \sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x + 24)$.

$C = sin^5x + cos^6x = \frac{1}{32}(2\sin 5x - 10\sin 3x + 20\sin x + \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)$.

$D = cos^5(2x) = \frac{1}{16}(\cos 10x + 5\cos 6x + 10\cos 2x)$.

2°/ Exprimons en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

$E = \sin 7x = 7\sin x\cos^6 x - 35sin^3x\cos^4x + 21cos^2x\,sin^5x - sin^7x$.

$F = \sin 2x.\cos 5x = 2\sin x\cos^6x - 20sin^3x\cos^4x + 10cos^2x\,sin^5x$.

3°/ - Démontrons que z tel que $1 + z^4 + z^8 = 0$ est une racine 12ème de 1.

$1 + z^4 + z^8 = 1 + z^4 + z^4 \times z^4 =$ somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison z^4. D'où

$1 + z^4 + z^8 = 0 \iff \frac{1-(z^4)^3}{1-z^4} = 0 \Leftrightarrow 1 - (z^4)^3 = 0 \Leftrightarrow 1 - z^{12} = 0 \iff z^{12} = 1$

$\Leftrightarrow$ z est une racine 12ème de l'unité.

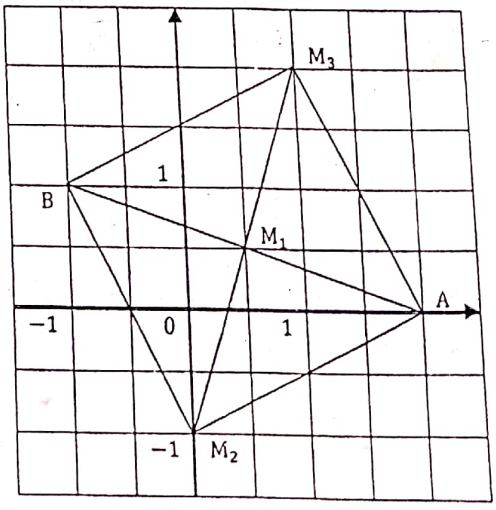
II - 1°- Montrons que : $(z+z')(z-z')(z+iz')(z-iz') = z^4 - z'^4$.

$(z+z')(z-z')(z+iz')(z-iz') = (z^2-z'^2)(z^2+z'^2) = z^4 - z'^4$.

2°- a) Résolvons l'équation (E): $(z-a)^4 = (z-b)^4$. Elle est équivalente à $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^4 = 1$. Les racines quatrièmes de l'unité étant $1 ; -1 ; i ; -i$, on a :

- ✓ $\frac{z-a}{z-b} = 1 \iff a = b$. D'après l'énoncé $a \neq b \Longrightarrow S = \emptyset$.
- ✓ $\frac{z-a}{z-b} = -1 \iff z = \frac{a+b}{2} = z_1$; $\frac{z-a}{z-b} = i \iff z = \frac{a+b+i(a-b)}{2} = z_3$
- ✓ $\frac{z-a}{z-b} = -i \iff z = \frac{a+b-i(a-b)}{2} = z_2$.

b) $A(a)$; $B(b)$; $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$; $M_3(z_3)$. Représentons ces points pour $a = 2$ et $b = -1 + i$.



c) Démontrons que A, M_2, B, M_3 sont les sommets d'un carré.

Montrons que les diagonales [AB] et $[M_2M_3]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

- ✓ $AB = |a - b| = |2 + 1 - i| = \sqrt{10}$

  $M_2M_3 = |z_3 - z_2| = |1 + 2i + i| = \sqrt{10}$

  $AB = M_2M_3 = \sqrt{10}$.
- ✓ $\frac{z_3 - z_2}{a - b} = \frac{1+2i+i}{2+1-i} = \frac{1+3i}{3-i} = i\,\frac{3-i}{3-i} = i$

  $(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{M_2M_3}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ et $AB = M_2M_3$

alors A, B, M_2, M_3 sont les sommets d'un carré.

Scanné avec CamScanner

3°- a) Montrons que [AB] et $[M_2M_3]$ ont pour milieu M_1.

$\frac{z_A+z_B}{2} = \frac{a+b}{2} = z_1 = z_{M_1} \Rightarrow$ [AB] a pour milieu M_1.

$\frac{z_{M_2}+z_{M_3}}{2} = \frac{z_2+z_3}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{a+b+i(b-a)}{2} + \frac{a+b+i(a-b)}{2}\right] = \frac{a+b}{2} = z_{M_1} \Rightarrow [M_2M_3]$ a pour milieu M_1.

b) Montrons que le quadrilatère AM_2BM_3 a deux côtés consécutifs de même longueur et perpendiculaires.

✓ $BM_2 = |z_2 - b| = \left|\frac{a+b+i(b-a)}{2} - b\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|a-b|$;

$BM_3 = |z_3 - b| = \left|\frac{a+b+i(a-b)}{2} - b\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|a-b|$. On a donc $BM_2 = BM_3$

✓ $\frac{z_3-b}{z_2-b} = \frac{a-b+i(a-b)}{a-b-i(a-b)} = \frac{1+i}{1-i} = i \Rightarrow (\overrightarrow{BM_2}; \overrightarrow{BM_3}) = \frac{\pi}{2}$.

c) [AB] et $[M_2M_3]$ ont pour milieu M_1, alors AM_2BM_3 est un parallélogramme ; de plus M_2BM_3 a deux côtés consécutifs $[BM_2]$ et $[BM_3]$ de même longueur ; donc le parallélogramme AM_2BM_3 est un carré.

Exercice 10:

A - $z_0 = 6+6i$; $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; $z_n = z_0a^n$, $n\epsilon\mathbb{N}$; $A_0(z_0)$ et $A_n(z_n)$.

1- a) Exprimons z_1 et a^2 sous forme algébrique.

$z_1 = az_0 = \left[\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)\right](6+6i) = (3+3i)\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\right]$

$= \frac{3\sqrt{3}+3+3i\sqrt{3}+3i+3i\sqrt{3}-3i-3\sqrt{3}+3}{2} = \frac{6+6i\sqrt{3}}{2} = 3+3i\sqrt{3}$.

$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 + 2i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) = \frac{4+2\sqrt{3}}{16} - \frac{4-2\sqrt{3}}{16} + \frac{4i}{16}$

$= \frac{4\sqrt{3}+4i}{16} = \frac{\sqrt{3}+i}{4}$.

$\boxed{z_1 = 3+3i\sqrt{3}}$; $\boxed{a^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{4}}$

b) Ecrivons z_1 sous forme exponentielle et montrons que $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$z_1 = 3(1+i\sqrt{3}) = 3\times 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\boxed{z_1 = 6e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$; $\boxed{a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$

2-Exprimons z_3 et z_7 en fonction de a^2.

$z_3 = a^3z_0 = a^2z_1 = 6a^2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_7 = a^7z_0 = (a^2)^3az_0 = (a^2)^3z_1 = 6(a^2)^3e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\boxed{z_3 = 6a^2e^{i\frac{\pi}{3}}}$ $\boxed{z_7 = 6(a^2)^3e^{i\frac{\pi}{3}}}$

•Formes exponentielles de z_3 et z_7.

$z_3 = 6\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$; $\boxed{z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}}$

$z_7 = 6\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 e^{i\frac{\pi}{3}} = 6\left(\frac{1}{8}e^{i\frac{3\pi}{6}}\right)e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $\boxed{z_7 = \frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}.}$

3-Plaçons dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points images ponctuelles A_0, A_1, A_3 et A_7.

Scanné avec CamScanner

B - $n\epsilon\mathbb{N}$, on pose $|z_n| = r_n$.

1- Montrons que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

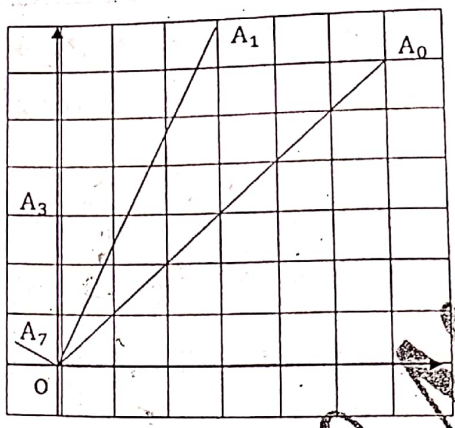
$|z_n| = |a^n z_0| = |a|^n \times |z_0|$.

$|a| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{4+4}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|a|^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$; $|z_0| = \sqrt{6^2+6^2}$

$= 6\sqrt{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2}$.



$r_n = |z_n| = \frac{12\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$. CQFD.

2-En déduisons la nature de (r_n).

$r_n = 6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \Rightarrow (r_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1er terme $r_0 = 6\sqrt{2}$.

3- Déterminons la limite de la suite (r_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0.}$

Interprétation : Quand $n \longrightarrow +\infty$ le point A_n se confond avec l'origine O.

4- Déterminons le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leq 10^{-3}$.

$OA_n = |z_n| = r_n$. Il suffit $r_n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 6\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{2}}{2^{\frac{n}{2}}} \leq \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow$

$10^3 \leq \frac{2^{\frac{n}{2}}}{6\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{2}} \geq 6\sqrt{2} \times 10^3 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln 2 \geq \ln 6\sqrt{2} \times 10^3 \Leftrightarrow$

$n \geq \frac{2\ln(6\sqrt{2}\times 10^3)}{\ln 2} \Leftrightarrow n \geq 26{,}10 \Rightarrow \boxed{n = p = 27}$; $\boxed{OA_{27} \leq 10^{-3}}$.

Exercice 11:

I – 1- $(r_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de 1er terme r_0 et de raison $\frac{2}{3}$: $r_n = r_0\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2- $(\theta_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de 1er terme $\theta_0\epsilon\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$:

$\boxed{\theta_n = \theta_0 + \frac{2\pi n}{3}}$

3- $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ et $z_0 z_1 z_2 = 8$. Déterminons z_0, z_1 et z_2.

$z_0 z_1 z_2 = 8 \Leftrightarrow r_0 e^{i\theta_0} \times r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = 8 \Leftrightarrow r_0 r_1 r_2 e^{i(\theta_0+\theta_1+\theta_2)} = 8 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} r_0 r_1 r_2 = 8 \\ \theta_0+\theta_1+\theta_2 = 2k\pi \end{cases} ; k\epsilon\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} r_0 \times \frac{2}{3}r_0 \times r_0\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 8 \\ \theta_0+\theta_0+\frac{2\pi}{3}+\theta_0+\frac{4\pi}{3} = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_0 = 3 \\ \theta_0 = \frac{2\pi}{3}(k-1) \end{cases}$

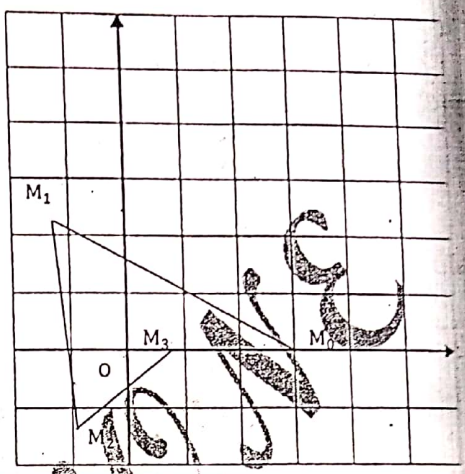
$\theta_0\epsilon\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\pi}{3}(k-1) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \theta_0 = 0$; d'où : $\boxed{z_0 = 3}$

$\boxed{z_1 = 2e^{\frac{i2\pi}{3}}}$; $\boxed{z_2 = \frac{4}{3}e^{\frac{i4\pi}{3}}}$; $\boxed{z_3 = \frac{8}{9}e^{i2\pi}}$

Scanné avec CamScanner

4- a) $M_n(z_n)$; plaçons les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

b) Calculons $\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$ en fonction de n.



$M_n(z_n) \Longrightarrow M_n(r_n\cos\theta_n, r_n\sin\theta_n)$

$M_{n+1}(z_{n+1}) \Longrightarrow M_{n+1}(r_{n+1}\cos\theta_{n+1}, r_{n+1}\sin\theta_{n+1})$

$r_{n+1}\cos\theta_{n+1} = \frac{2}{3}r_n\cos\left(\theta_n+\frac{2\pi}{3}\right)$

$r_{n+1}\sin\theta_{n+1} = \frac{2}{3}r_n\sin\left(\theta_n+\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\| = \sqrt{\left[\frac{2}{3}r_n\cos\left(\theta_n+\frac{2\pi}{3}\right)-r_n\cos\theta_n\right]^2+\left[\frac{2}{3}r_n\sin\left(\theta_n+\frac{2\pi}{3}\right)-r_n\sin\theta_n\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9}r_n^2+r_n^2-\frac{4}{3}r_n^2\left[\cos\theta_n\cos\left(\theta_n+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\theta_n\sin\left(\theta_n+\frac{2\pi}{3}\right)\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9}r_n^2+r_n^2-\frac{4}{3}r_n^2\cos\left(\theta_n+\frac{2\pi}{3}-\theta_n\right)} = \sqrt{\frac{13}{9}r_n^2+\frac{2}{3}r_n^2} = \sqrt{\frac{19}{9}r_n^2} = \frac{\sqrt{19}}{3}r_n.$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\| = \frac{\sqrt{19}}{3}r_n}$$

5- $I_n = \sum_{k=0}^{n}\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$. Calculons I_n en fonction de n.

$$= \sum_{k=0}^{n}\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\| = \|\overrightarrow{M_0M_1}\|+\|\overrightarrow{M_1M_2}\|+\cdots+\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$$

$$= \frac{\sqrt{19}}{3}r_0+\frac{\sqrt{19}}{3}r_1+\cdots+\frac{\sqrt{19}}{3}r_n = \frac{\sqrt{19}}{3}(r_0+r_1+\cdots+r_n) = \frac{\sqrt{19}}{3}r_0\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{19}\left[3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]; \quad \boxed{I_n = \sqrt{19}\left[3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} I_n = 3\sqrt{19}.$$

II - A, B et C d'affixes respectives 1, 2i et z.

1- $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right| = \left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right| = \frac{BC}{BA}$ et $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right) = (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

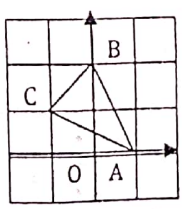
2- $BC = \sqrt{\frac{2}{5}}\times BA$; $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \alpha$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ et $\alpha\in]-\pi;0]$: calculons $\sin\alpha$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$. $\boxed{\sin\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}}}$

3- Démontrons que $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$. On a : $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right| = \sqrt{\frac{2}{5}}$ et $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right) = \alpha$; d'où

$\frac{z-2i}{1-2i} = \sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-i\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{5}-\frac{3i}{5} = \frac{1-3i}{5}$. CDFD

Déduisons z et vérifions que le triangle ABC est isocèle.



$\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5} \Leftrightarrow z = \frac{(1-3i)(1-2i)}{5}+2i = -1+i$; $z_C = -1+i$.

$CA = |z_A-z_C| = |1+1-i| = \sqrt{5}$;

$BA = |z_A-z_B| = |1-2i| = \sqrt{5}$

Scanné avec CamScanner

$BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA = \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{5} = \sqrt{2}$; $BA = CA$ alors le triangle ABC est isocèle en A.

Exercice 12:

I - 1) Déterminons les racines sixièmes de l'unité sous forme algébrique.

Ce sont les complexes $\omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k \in \{0;1;2;3;4;5\}$.

$\omega_0 = 1$; $\omega_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\omega_2 = e^{\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\omega_3 = e^{i\pi} = -1$

$\omega_4 = e^{\frac{i4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\omega_5 = e^{\frac{i5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Calculons $(1-i)^6$.

$(1-i)^6 = 1 + 6(-i) + 15(-i)^2 + 20(-i)^3 + 15(-i)^4 + 6(-i)^5 + (-i)^6$

$= 1 - 6i - 15 + 20i + 15 - 6i - 1 = 8i$. $\boxed{(1-i)^6 = 8i}$

3) Déduisons des questions précédentes les solutions de l'équation $8z^6 + i = 0$.

$8z^6 + i = 0 \Leftrightarrow 8iz^6 + i^2 = 0 \Leftrightarrow (1-i)^6 z^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow [(1-i)z]^6 = 1$.

$(1-i)z$ est donc une racine sixième de l'unité. On a alors :

$(1-i)z = 1 \Leftrightarrow z_0 = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$

$(1-i)z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2(1-i)} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{4} = \frac{1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{4}$

$(1-i)z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2(1-i)} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(1+i)}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{4}$

$(1-i)z = -1 \Leftrightarrow z_3 = \frac{-1-i}{2}$

$(1-i)z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2(1-i)} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(1+i)}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{4}$

$(1-i)z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_5 = \frac{1-\sqrt{3}-i(1-\sqrt{3})}{4}$. $\boxed{S = \{z_0 ; z_1 ; z_2 ; z_3 ; z_5\}}$

II - 1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2^{\alpha+1}\cos\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$.

$\Delta' = (2^\alpha \cos\alpha)^2 - 2^{2\alpha} = 2^{2\alpha}\cos^2\alpha - 2^{2\alpha} = 2^{2\alpha}(\cos^2\alpha - 1) = -2^{2\alpha}\sin^2\alpha$

$\Delta' = 2^{2\alpha}\sin^2\alpha \times i^2$; les racines carrées de Δ' sont : $\delta_1 = 2^\alpha i \sin\alpha$ et $\delta_2 = -2^\alpha i \sin\alpha$. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - (2^{\alpha+1}\cos\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$ sont : $z_1 = 2^\alpha \cos\alpha + 2^\alpha i \sin\alpha = 2^\alpha e^{i\alpha}$

$z_2 = 2^\alpha \cos\alpha - 2^\alpha i \sin\alpha = 2^\alpha e^{-i\alpha}$.

2) $A(2^\alpha e^{-i\alpha})$ et $B(2^\alpha e^{i\alpha})$. Déterminons α pour que le triangle OAB soit équilatéral.

On a $|z_B| = |z_A| = 2^\alpha \Leftrightarrow OA = OB = 2^\alpha$. OAB est équilatéral $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$ ou $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \alpha = -\frac{\pi}{6}}$.

III - Déterminons les racines quatrièmes de -1.

$-1 = e^{i\pi}$; les racines quatrièmes de -1 sont les complexes $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}$ k variant de 0 à 3. $z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_1 = e^{\frac{i3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = e^{\frac{i5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$z_3 = e^{\frac{i7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Déduisons que $f(z) = z^4 + 1$ peut s'écrire comme un produit de deux fonctions polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Scanné avec CamScanner

z_0 ; z_1; z_2 et z_3 sont les solutions de l'équation $f(z) = 0$; d'où

$$f(z) = z^4 + 1 = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$
$$= \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \left[\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\left[\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\left[\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\left[\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$= \left[\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]\left[\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] = (z^2 - z\sqrt{2} + 1)(z^2 + z\sqrt{2} + 1).$$

$$\boxed{f(z) = (z^2 - \sqrt{2}\,z + 1)(z^2 + \sqrt{2}\,z + 1)}$$

Exercice 13:

I - $\forall z \in \mathbb{C}$, $h_n(z) = (1 - z)z^n$.

1°- Résolvons l'équation $h_n(z) = h_0(z)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$h_0(z) = 1 - z$; $h_n(z) = h_0(z) \Leftrightarrow (1 - z)z^n = 1 - z \Leftrightarrow z^n = 1 \Rightarrow$ les solutions sont les racines $n^{ièmes}$ de l'unité c'est-à-dire $z = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2°- $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$ (1).

a) Montrons que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solution.

Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $|z| = |1 - z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1 - x)^2 + y^2 \Leftrightarrow$ $x = \frac{1}{2}$. Les solutions de cette équation sont les complexes $z = \frac{1}{2} + iy$, $y \in \mathbb{R}$.

b) z_0 une des solutions de $|z| = |1 - z|$. Soit $|z_0| = \rho$; $\arg z_0 = \theta \Rightarrow$

$\arg(1 - z_0) = \arg\left(\frac{1}{2} - iy\right) = \arg \overline{z_0} = -\arg z_0 = -\theta$

$|{z_0}^n(1 - z_0)| = \rho^n \times \rho = \rho^{n+1}$ et $\arg[{z_0}^n(1 - z_0)] = n\theta - \theta = (n - 1)\theta$.

c) En déduisons que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$.

z_0 étant une solution de la deuxième équation du système, elle est également solution de la première équation si $h_n(z_0) = 1 \Leftrightarrow {z_0}^n(1 - z_0) = 1 \Leftrightarrow$

$\rho^{n+1}e^{i(n-1)\theta} = 1 \Leftrightarrow \rho^{n+1}e^{i(n-1)\theta} = e^{i2k\pi} \Rightarrow \rho = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow {z_0}^n(1 - z_0) = 1 \Leftrightarrow e^{i(n-1)\frac{\pi}{3}} = e^{i2k\pi} \Leftrightarrow$

$e^{\frac{i(n-1)\pi}{3}} = e^{i2k\pi} \Leftrightarrow \frac{(n-1)\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow n - 1 = 6k \Leftrightarrow n = 6k + 1, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$n \equiv 1[6]$. On a $1 - z_0 = \overline{z}_0 \Rightarrow {z_0}^n(1 - z_0) = 1 \Leftrightarrow \overline{z}_0 \cdot {z_0}^n = 1 \Leftrightarrow z_0\overline{z}_0({z_0}^{n-1}) = 1$

$|z_0|^2{z_0}^{n-1} = 1 \Leftrightarrow {z_0}^{n-1} = 1 \Leftrightarrow {z_0}^{6k} = 1 \Rightarrow$ l'ensemble solution du système est l'ensemble des complexes z tels que $z = {z_0}^{6k} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k} = e^{i2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

II - (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$.

1°- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

$\Delta' = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4 = -1 = i^2 \Rightarrow z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

2°- La suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i\frac{(-1)^n\pi}{6}}$ est définie pour $n \geq 1$.

a) Vérifier que z_1 est solution de (E).

$z_1 = 2e^{\frac{-i\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$ est solution de (E).

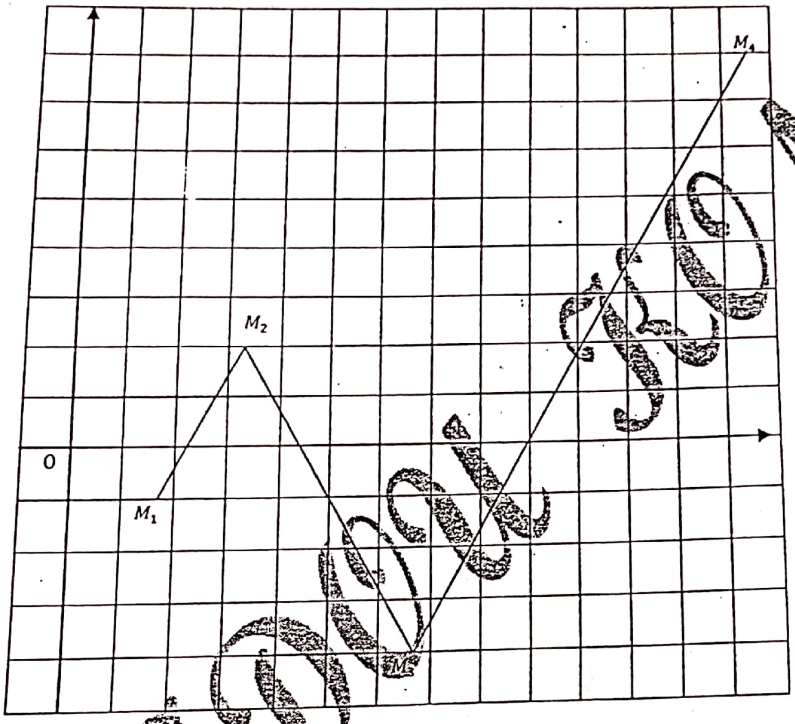
Scanné avec CamScanner

b) Ecrivons z_2 et z_3 sous forme algébrique.

$z_2 = 2^2 e^{i\frac{(-1)^2\pi}{6}} = 4e^{\frac{i\pi}{6}} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$; $z_3 = 8e^{\frac{-i\pi}{6}} = 4\sqrt{3} - 4i$

c) Plaçons les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan et traçons les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.

$z_4 = 16e^{\frac{i\pi}{6}} = 8\sqrt{3} + 8i$



3°- Montrons que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right)$: $z_n = 2^n e^{i\frac{(-1)^n\pi}{6}} =$

$= 2^n\left(\cos\left[\frac{(-1)^n\pi}{6}\right] + i\sin\left[\frac{(-1)^n\pi}{6}\right]\right) = 2^n\left(\cos\frac{\pi}{6} + (-1)^n i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right)$. CQFD

4°- Calculons les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |2\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} + i| = |\sqrt{3} + 3i| = 2\sqrt{3}$;

$M_2M_3 = |z_3 - z_2| = |4\sqrt{3} - 4i - 2\sqrt{3} - 2i| = |2\sqrt{3} - 6i| = 4\sqrt{3}$.

5°- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$; $l_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

a) Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, $l_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.

$l_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1} = 2\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} + 2^3\sqrt{3} + \cdots + 2^n\sqrt{3}$

$l_n = \sqrt{3}(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) = 2\sqrt{3} \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$. CQFD

b) Déterminons le plus petit entier tel que $l_n \geq 1000$.

$l_n \geq 1000 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(2^n - 1) \geq 1000 \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right)}{\ln 2}$

$n \geq 8{,}215 \Rightarrow n = 9$. $\boxed{l_n \geq 1000 \Rightarrow n = 9}$

Exercice 14:

I - $A(2i)$, $M(z)$, $M'(z')$, $f(M) = M'$ et $z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}$.

Scanné avec CamScanner

1°- Démontrons que f admet deux points invariants.

Un point M(z) est invariant par f si et seulement si f(M) = M.

$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{2iz-5}{z-2i} = z \Leftrightarrow z^2 - 4iz + 5 = 0 \Rightarrow z_1 = -i \; ; \; z_1 = 5i.$

f admet donc deux points invariants B et D d'affixes respectives $-i$ et $5i$.

2°- Démontrons que f est bijective et déterminons sa bijection réciproque.

Exprimons z en fonction de z'.

$z' = \frac{2iz-5}{z-2i} \Leftrightarrow z'z - 2iz' = 2iz - 5 \Leftrightarrow z'z - 2iz = 2iz' - 5 \Leftrightarrow z = \frac{2iz'-5}{z'-2i}.$

Tout complexe $z' \neq 2i$ a un antécédent unique $z \neq 2i$; alors l'application

$f : \mathbb{C}-\{2i\} \longrightarrow \mathbb{C}-\{2i\}$ est bijective et sa réciproque est $f^{-1} : \mathbb{C}-\{2i\} \longrightarrow \mathbb{C}-\{2i\}$

$z \longmapsto z'$ $\qquad$ $z \longmapsto \frac{2iz-5}{2i}$

3°- Démontrons que la droite de repère $(O, \overrightarrow{e_2})$, privée de A, est globalement invariante par f.

Les points B et D invariants par f appartiennent à $(O, \overrightarrow{e_2})$; donc $(O, \overrightarrow{e_2}) = (BD)$.

On a f(B) = B et f(D) = D, alors f(BD) = BD $\Rightarrow$ la droite $(O, \overrightarrow{e_2})$ est globalement invariante par f.

4°- a) Démontrons que : $|z' - 2i| \times |z - 2i| = 9$.

$|z' - 2i| \times |z - 2i| = \left|\frac{2iz-5}{z-2i} - 2i\right| \times |z - 2i| = |2iz - 5 - 2iz - 4| = 9.$

b) En déduisons l'image par f du cercle (C) de centre A et de rayon R.

Le cercle (C) de centre A et de rayon R est défini par l'ensemble des points M du plan vérifiant AM = R.

$|z' - 2i| \times |z - 2i| = 9 \Leftrightarrow |z_M - z_A| \times |z_M - z_A| = 9 \Leftrightarrow AM' \times AM = 9 \Leftrightarrow$

$AM' = \frac{9}{AM} = \frac{9}{R} \Rightarrow$ l'image de (C) est le cercle (C') de centre A et de rayon $\frac{9}{R}$.

c) Déterminer R pour que (C) soit globalement invariant par f.

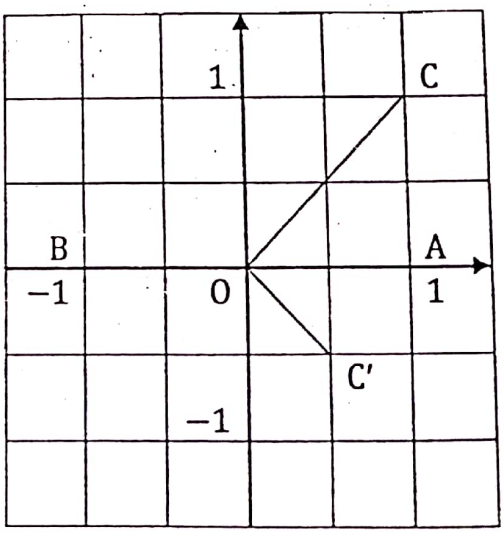
(C) soit globalement invariant par f $\Rightarrow (C') = (C)$. Les deux cercles ayant le même centre A, il faut $\frac{9}{R} = R \Leftrightarrow R = 3$.

II - A(1), B(−1), M(z), f(M) = M'(z') tel que $zz' = 1$, $z \neq 0$.

1°- a) Déterminons et construisons l'image par f du point C d'affixe $1 + i$.

$zz' = 1 \Leftrightarrow z' = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} \Rightarrow$

l'image du point C est le point C' d'affixe $\frac{1-i}{2}$.



b) Démontrons que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$.

Montrons que :

$\arg(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 2\arg(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$.

$\arg(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(\frac{zz'}{z^2}\right) =$

$= \arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = -2\arg z = -2(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) =$

$= 2(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = 2(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$, les points A,

Scanné avec CamScanner

O, B étant alignés alors la droite (AB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$.

- Démontrons que $OM \times OM' = OA^2$.

$OM \times OM' = |z| \times |z'| = |zz'| = 1$ et $|z_A| = OA = 1$, alors $OM \times OM' = OA^2$.

2°- a) Vérifions que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$.

$$\left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z+z'}{2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{z+z'}{2}\right)^2 - zz' = \frac{z^2 + 2zz' + z'^2 - 4zz'}{4} = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2.$$

b) I le milieu de [MM']. Démontrons que $IA \times IB = IM^2$:

$z_I = \frac{z+z'}{2}$, $IM = |z_M - z_I| = \left|z - \frac{z+z'}{2}\right| = \left|\frac{z-z'}{2}\right|$. Calculons $IA \times IB$.

$$IA \times IB = |z_A - z_I| \times |z_B - z_I| = \left|1 - \left(\frac{z+z'}{2}\right)\right| \times \left|-1 - \left(\frac{z+z'}{2}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{z+z'}{2} - 1\right| \times \left|\frac{z+z'}{2} + 1\right| = \left|\left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right)\right| = \left|\left(\frac{z-z'}{2}\right)^2\right| = \left|\frac{z-z'}{2}\right|^2 = IM^2.$$

Exercice 15:

I - M d'affixe $z \neq -2i$, M' d'affixe $Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

1°- On pose $z = x + iy$, x et y étant deux réels.

a) Déterminons les parties réelle et imaginaire de Z en fonction de x et y.

$$Z = \frac{x-2+i(y+1)}{x+i(y+2)} = \frac{[x-2+i(y+1)][x-i(y+2)]}{x^2+(y+2)^2} = \frac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2} + i\,\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$$

$Z = X + Y$ avec $X = \frac{[x-2+i(y+1)][x-i(y+2)]}{x^2+(y+2)^2}$; $Y = \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$.

b) Déterminons l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que Z soit réel.

Z est réel si et seulement si $Y = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 4 = 0$ et $x^2 + (y+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $y \neq -2$. L'ensemble (E) est la droite d'équation $-x + 2y + 4 = 0$ privée du point de coordonnées $(0\,;-2)$ (point d'affixe $-2i$).

c) Déterminons l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Z est imaginaire pur si et seulement si $X = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 3y + 2 = 0$ avec $x \neq 0$ et $y \neq -2$.

$x^2 - 2x + y^2 + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. L'ensemble (F) est le cercle de centre $\Omega\left(1\,;-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point d'affixe $-2i$.

2°- A et B les points d'affixes respectives $2 - i$ et $-2i$.

a) Retrouvons les ensembles (E) et (F) par une méthode géométrique.

$Z = \frac{z-2+i}{z+2i} = \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$; Z est réel $\Leftrightarrow \arg Z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right) = k\pi \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = k\pi \Rightarrow$ les points A, B et M sont alignés ; l'ensemble (E) est la droite (AB) privée du point B.

Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg Z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$

l'ensemble (F) est le cercle de diamètre (AB) privé du point B.

b) Calculons $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$.

$$|f(z) - 1| \times |z + 2i| = \left|\frac{z-2+i}{z+2i} - 1\right| \times |z + 2i| = \left|\frac{z-2+i-z-2i}{z+2i}\right| \times |z + 2i| = |-2 - i| = \sqrt{5}.$$

Scanné avec CamScanner

En déduisons que les points M' sont tous sur un même cercle lorsque le point M parcours le cercle de centre B et rayon $\sqrt{5}$.

Soit I le point d'affixe 1.

$|f(z)-1|\times|z+2i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |Z-1|\times|z+2i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |z_{M'}-z_I|\times|z_M-z_B|=\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow IM'\times BM=\sqrt{5}$; M parcours le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5} \Rightarrow BM=\sqrt{5}$, alors $IM'=1$. Les points M' sont sur le cercle de centre I(1;0) et de rayon 1.

II – A, B et C les points d'affixes respectives $a=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b=\bar{a}$ et $c=3$.

<u>Partie A :</u>

1°- Plaçons les points A, B et C.

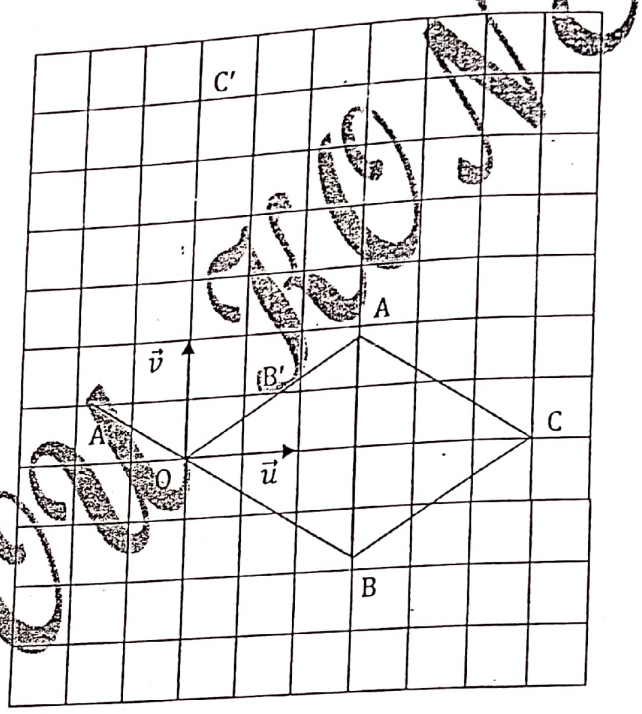
2°- Démontrons que le triangle ABC est équilatéral.

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(\frac{3-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=$$

$$=\arg\left(\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-i\sqrt{3}}\right)=\arg\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\arg\left(\frac{3\sqrt{3}i+3}{6}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3},$$

alors le triangle ABC est équilatéral.



3°- Ecrivons a, b et c sous forme exponentielle.

$$a=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}+i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$b=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}e^{-\frac{i\pi}{6}}$; $c=3e^{i2\pi}$.

<u>Partie B :</u>

M(z), M'(z'), telle que $z'=f(z)=\frac{1}{3}iz^2$, A', B' et C' les points images respectives par f des points A, B et C.

1°- a) Déterminons la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

$$z_{A'}=\frac{1}{3}iz_A{}^2=\frac{1}{3}i\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{i5\pi}{6}}$$

$$z_{B'}=\frac{1}{3}iz_B{}^2=\frac{1}{3}i\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$z_{C'}=\frac{1}{3}iz_C{}^2=\frac{1}{3}i\times 9=3i=3e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

b) Démontrons l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

$\frac{z_A-z_O}{z_{B'}-z_O}=\frac{z_A}{z_{B'}}=\frac{\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}}{e^{\frac{i\pi}{6}}}=\sqrt{3}\in\mathbb{R}^*$, alors O, A et B' sont alignés.

$\frac{z_{A'}-z_O}{z_B-z_O}=\frac{z_{A'}}{z_B}=\frac{e^{\frac{i5\pi}{6}}}{\sqrt{3}e^{\frac{-i\pi}{6}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\pi}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\in\mathbb{R}^*$, alors O, B et A' sont alignés.

Scanné avec CamScanner

c) Plaçons les points A', B' et C'. (voir figure)

2°- Déterminons les points invariants par f.

$z' = z \Leftrightarrow \frac{1}{3}iz^2 = z \Leftrightarrow z(iz-3) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = -3i$; les points invariants par f sont : le point O et le point I d'affixe $-3i$.

3°- Démontrons que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$; $M \epsilon (AB) \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} + iy$. L'égalité $z' = \frac{1}{3}iz^2$ s'écrit : $x' + iy' = \frac{1}{3}i\left(\frac{3}{2} + iy\right)^2 \Leftrightarrow x' + iy' = -y + i\left(\frac{3}{4} - \frac{y^2}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x' = -y \\ y' = \frac{3}{4} - \frac{y^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = \frac{3}{4} - \frac{(-x')^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = \frac{3}{4} - \frac{x'^2}{3} \end{cases}$, alors le point M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$ si $M \epsilon (AB)$.

Exercice 16:

I - Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$.

$(z+1)^5 = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1$;

$(z-1)^5 = z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1$.

L'équation devient $10z^4 + 20z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$. Posons $z^2 = Z$; on a $5Z^2 + 10Z + 1 = 0$; $\Delta' = 20 \Rightarrow Z = \frac{-5+2\sqrt{5}}{5}$ ou $Z = \frac{-5-2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow z^2 = \frac{-5+2\sqrt{5}}{5}$ ou $z^2 = \frac{-5-2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow z^2 = -\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)$ ou $z^2 = -\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)$. Les solutions de l'équations $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$ sont les complexes $z_1 = i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$, $z_2 = -i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$, $z_3 = i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ et $z_4 = -i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ $S = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

II - $\alpha \epsilon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; $(E): (1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$.

1. a. Montrons que $|1+iz| = |1-iz|$.

L'équation (E) est équivalente à l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha =$

$= \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$; alors $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^3 = |\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha| = \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \frac{|1+iz|}{|1-iz|} = 1 \Leftrightarrow |1+iz| = |1-iz|$. CQFD.

b. En déduisons que z est réel.

Posons $z = x + iy$; $|1+iz| = |1-iz| \Leftrightarrow |1-y+ix| = |1+y-ix| \Leftrightarrow$ $(1-y)^2 + x^2 = (1+y)^2 + x^2 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow z = x$ et $x \epsilon \mathbb{R}$; z est donc réel.

2. Exprimons $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = \left(e^{i\alpha}\right)^2$.

3. $z = \tan\beta$, $\beta \epsilon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Scanné avec CamScanner

a. Ecrivons l'équation portant sur β traduisant (E).
$(1+i\tan\beta)^3(1-i\tan\alpha)=(1-i\tan\beta)^3(1+i\tan\alpha)$.

Résolution : cette équation est équivalente à l'équation $\left(\frac{1+i\tan\beta}{1-i\tan\beta}\right)^3=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\Leftrightarrow$

$\left(e^{i2\beta}\right)^3=e^{i2\alpha}\Leftrightarrow 3\beta=\alpha+2k\pi\Leftrightarrow\beta=\frac{\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\{0,1,2\}$.

b. Déterminons les solutions de (E).

Les solutions de (E) sont les réels $z_0=\tan\frac{\alpha}{3}$, $z_1=\tan\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$, $z_2=\tan\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$.

III – f de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par : $f(z)=\frac{1}{z}$.

1. Déterminons les parties réelles et imaginaires des images de $\alpha=1+i$ et de $\beta=1+e^{\frac{i\pi}{3}}$.

$f(\alpha)=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f(\beta)=\frac{1}{1+e^{\frac{i\pi}{3}}}=\frac{1}{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2(3-i\sqrt{3})}{12}=\frac{3-i\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}$. On a

$\mathcal{R}e(\alpha)=\mathcal{R}e(\beta)=\frac{1}{2}$; $\mathcal{I}m(\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathcal{I}m(\beta)=-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. a. Déterminons les éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $f(z)=z$.

$f(z)=z\Leftrightarrow\frac{1}{z}=z\Leftrightarrow z^2=1\Rightarrow z_1=-1$ et $z_2=1$.

b. Déterminons les éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $f(z)=\bar{z}$.

$f(z)=\bar{z}\Leftrightarrow z\bar{z}=1\Leftrightarrow |z|=1$; les éléments de $\mathbb{C}^*$ sont les complexes z de module 1.

c. Déterminons le module et un argument de f(z) en fonction de ceux de z.

$|f(z)|=\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$; $\arg[f(z)]=\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg z$.

d. Déterminons les parties réelle et imaginaire de f(z) en fonction de celles de z.

$\mathcal{R}e[f(z)]=\frac{\mathcal{R}e(z)}{|z|^2}$; $\mathcal{I}m[f(z)]=\frac{-\mathcal{I}m(z)}{|z|^2}$.

3. Etudions $f\circ f$. $f\circ f(z)=f[f(z)]=f\left(\frac{1}{z}\right)=z$; $f\circ f=f$, alors f est bijective.

4. Montrons que $f(z)-1=\frac{1}{z}(1-z)$.

$f(z)-1=\frac{1}{z}-1=\frac{1-z}{z}=\frac{1}{z}(1-z)$.

En déduisons que si $|z-1|=1$, alors $|f(z)|=|f(z)-1|$.

$|f(z)-1|=\left|\frac{1}{z}(1-z)\right|=\frac{1}{|z|}|1-z|$. Si $|z-1|=1$, alors $|f(z)-1|=\frac{1}{|z|}=|f(z)|$.

5. $Q(z)=\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$. Montrons que $Q(z)Q(f(z))$ est un réel.

$Q(z)Q(f(z))=\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}\times\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{z}-2}=\frac{2z-1}{2(z-2)}\times\frac{2-z}{2(1-2z)}=\frac{2z-1}{2(z-2)}\times\frac{z-2}{2(2z-1)}=\frac{1}{4}$.

6. $A(1)$, $M(z)$ et $M'(f(z))$. Donnons une construction de M', si M est sur le cercle de centre A et de rayon 1.

si M est sur le cercle centre A et de rayon 1, alors $AM=1\Leftrightarrow|z-1|=1\Rightarrow$ $|f(z)-1|=|f(z)|\Leftrightarrow AM'=OM'\Rightarrow$ le point M' est sur la médiatrice de (OA).

Exercice 17:

I - 1. Ecrivons sous forme algébrique le nombre complexe $\sum_{k=1}^{2002}(-i)^k$.

Scanné avec CamScanner

$\sum_{k=1}^{2002}(-i)^k = -i + (-i)^2 + (-i)^3 + \cdots + (-i)^{2002}$ = somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $-i$ et de raison $-i$; alors $\sum_{k=1}^{2002}(-i)^k = (-i) \times \frac{1-(-i)^{2002}}{1+i} = \frac{-2i}{1+i} = -1-i$. $\boxed{\sum_{k=1}^{2002}(-i)^k = -1-i}$

2. Déterminons sous forme exponentielle le nombre complexe z tel que :

$|z| \times |-1+i| = |2i+2|$ et $\arg\left[z \times (1-\sqrt{3})\right] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On a : $|z| = \left|\frac{2i+2}{-1+i}\right| = |-2i| = 2$; $\arg(1-\sqrt{3}) = \arg\left[2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -\frac{\pi}{3}$, alors

$\arg\left[z \times (1-\sqrt{3})\right] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \arg z + \arg(1-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff$

$\arg z = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \arg z = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \implies z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

3. Déterminons l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

a. $\arg(z^2-4) \equiv \arg(z+2)\ [\pi]$.

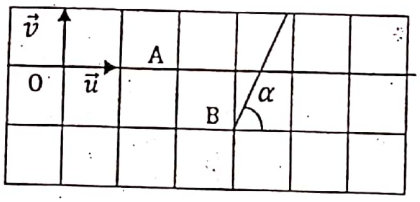
$\arg(z^2-4) \equiv \arg(z+2)\ [\pi] \iff \arg(z^2-4) - \arg(z+2) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $\iff$

$\arg\left(\frac{z^2-4}{z+2}\right) = k\pi \iff \arg(z-2) = k\pi$. Soient A(2) et M(z) ; $\arg(z-2) = k\pi$

$\iff \arg(z_M - z_A) = k\pi \iff (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k\pi \implies$ l'ensemble des points M est la droite (OA) privée du point A.

b. $\arg(\bar{z} - 3 + i) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soient B$(3-i)$, M(z) et M'$(\bar{z})$. $\arg(\bar{z} - 3 + i) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \iff \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe réel, alors $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. L'ensemble des points M est la demi-droite d'origine B et de pente $\alpha = \frac{\pi}{3}$.



4. Soient x, y et z trois nombres complexes de module 1 tels que :

$x + y + z = 1$ et $xyz = 1$.

a. Montrons que : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Pour tout complexe z de module 1, on a $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Ainsi, $\overline{x+y+z} = 1 \iff$

$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 1 \iff \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. CQFD

b. En déduisons x, y et z.

x, y et z sont les racines de l'équation $(\alpha - x)(\alpha - y)(\alpha - z) = 0$, d'inconnue α.

En développant le produit on obtient :

$\alpha^3 - (x+y+z)\alpha^2 + (xy+yz+xz)\alpha - xyz = 0$. De $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, on a $(xy+yz+xz) = 1$. L'équation devient alors $\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \iff$ $(\alpha-1)(\alpha^2+1) = 0$; les solutions sont $1, i, -i$.

II- $z' = \frac{z+i}{z-2i}$, $z \neq 2i$, M(z)

1. $z \neq 2i$, on pose $z = 2i + re^{i\theta}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Ecrivons $z' - 1$ à l'aide de r et θ.

$z' - 1 = \frac{z+i}{z-2i} - 1 = \frac{3i}{z-2i} = \frac{3i}{re^{i\theta}} = \frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$.

2. A est le point d'affixe $2i$.

Scanné avec CamScanner

a. Déterminons l'ensemble E_1 des points M d'affixe z pour lesquels $|z'-1|=3$.

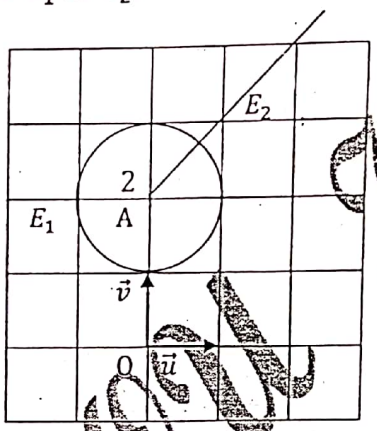
$|z'-1|=3 \Leftrightarrow \frac{3}{r}=3 \Leftrightarrow r=1 \Rightarrow z=2i+e^{i\theta} \Leftrightarrow z-2i=e^{i\theta} \Leftrightarrow z_M-z_A=e^{i\theta}$

$\begin{cases} AM=1 \\ (\vec{u},\overrightarrow{AM})=\theta \end{cases}$, $\theta \in \mathbb{R}$. L'ensemble E_1 est le cercle de centre A et de rayon 1.

b. Déterminons l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\arg(z'-1)=\frac{\pi}{4}(2\pi)$.

$\arg(z'-1)=\frac{\pi}{4}(2\pi) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}(2\pi)$; l'expression de z devient $z-2i=re^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} AM=r \\ (\vec{u},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow$ l'ensemble E_2 des points M est la demi-droite d'origine A de pente $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

c. Représentons les ensembles E_1 et E_2.



Exercice 18:

I- A$(-1+i)$; B$(-1-i)$; C$(2i)$; D$(2-2i)$.

1. Etudions la nature des triangles ACD et BCD.

$\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{2i+1-i}{2-2i+1-i}=\frac{1+i}{3-3i}=\frac{1}{3}i \Rightarrow (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ le triangle ACD est rectangle en A.

$\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}=\frac{2i+1+i}{2-2i+1+i}=\frac{1+3i}{3-i}=i \Rightarrow (\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ le triangle BCD est rectangle en B.

2. Démontrons que les points A, B, C et D sont cocycliques.

$(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ le point A est sur le cercle de diamètre [DC].

$(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ le point B est sur le cercle de diamètre [DC].

Les points A, B, C, D sont sur un même cercle de diamètre [DC] ; donc ils sont cocycliques.

3. Déduisons en le centre, le rayon et une équation de ce cercle.

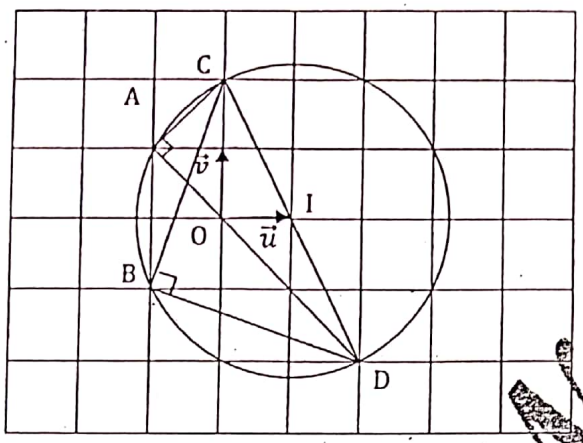
Le centre de ce cercle est le milieu I du segment [DC] ; $z_I=\frac{z_D+z_C}{2}=\frac{2-2i+2i}{2}=1$;

son rayon est $r=\frac{DC}{2}=\frac{|z_C-z_D|}{2}=\frac{|2i-2+2i|}{2}=|-1+2i|=\sqrt{5}$;

une équation de ce cercle est : $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=r^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=5$.

4. Faisons la figure complète.

Scanné avec CamScanner



II- $a = e^{\frac{i2\pi}{5}}$.

1. Calculons a^5 : $a^5 = \left(e^{\frac{i2\pi}{5}}\right)^5 = e^{i2\pi} = 1$.

2. Démontrons que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.
   $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison a ; d'où, $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = \frac{1 - a^5}{1 - a} = \frac{1 - 1}{1 - a} = 0$.

3. Montrons que $a^3 = (\bar{a})^2$ et $a^4 = \bar{a}$.
   $\bar{a} = e^{\frac{-i2\pi}{5}} \Rightarrow (\bar{a})^2 = e^{\frac{-i4\pi}{5}}$; $a^3 = e^{\frac{i6\pi}{5}} = e^{i\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right)} = e^{\frac{-i4\pi}{5}} \Leftrightarrow a^3 = (\bar{a})^2$.
   $a^4 = e^{\frac{i8\pi}{5}} = e^{i\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)} = e^{\frac{-i2\pi}{5}} \Leftrightarrow a^4 = \bar{a}$.

4. En déduisons que $(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0$.
   $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0 \Leftrightarrow 1 + a + a^2 + (\bar{a})^2 + \bar{a} = 0 \Leftrightarrow$
   $1 + a + \bar{a} + (a + \bar{a})^2 - 2a\bar{a} = 0 \Leftrightarrow 1 + a + \bar{a} + (a + \bar{a})^2 - 2aa^4 = 0 \Leftrightarrow$
   $1 + a + \bar{a} + (a + \bar{a})^2 - 2a^5 = 0 \Leftrightarrow (a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0$.

5. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
   $\Delta = 20 \Rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$; $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$: $\boxed{S = \left\{\frac{-1 + \sqrt{5}}{4} ; \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}\right\}}$.

6. Calculons $a + \bar{a}$ et en déduisons la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   $a + \bar{a} = 2\,\mathcal{R}e(a) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$. L'équation $(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0$ est équivalente à l'équation $\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$.
   En posant $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x$, on retrouve l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
   Puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, on a $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$.

Exercice 19:

I- Démontrons de l'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

1. $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$. Démontrons que $|\mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2)| \leq r_1 r_2$.
   $z_1\bar{z}_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} \Rightarrow \mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2) = r_1 r_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$. On sait que $|\cos(\alpha_1 - \alpha_2)| \leq 1$
   $\Leftrightarrow r_1 r_2 |\cos(\alpha_1 - \alpha_2)| \leq r_1 r_2 \Leftrightarrow |r_1 r_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)| \leq r_1 r_2 \Leftrightarrow |\mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2)| \leq r_1 r_2$.

2. En déduisons que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
   Calculons $|z_1 + z_2|^2$.
   $|z_1 + z_2|^2 = |r_1 \cos\alpha_1 + r_2 \cos\alpha_2 + i(r_1 \sin\alpha_1 + r_2 \sin\alpha_2)|$

Scanné avec CamScanner

$$|z_1+z_2|^2 = (r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2)^2 + (r_1\sin\alpha_1 + r_2\sin\alpha_2)^2$$
$$= {r_1}^2 + {r_2}^2 + 2r_1r_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2)$$
$$= {r_1}^2 + {r_2}^2 + 2r_1r_2\cos(\alpha_1-\alpha_2) = {r_1}^2 + {r_2}^2 + 2\mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2)$$
$$= (r_1+r_2)^2 - 2r_1r_2 + 2\mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2)$$
$$= (r_1+r_2)^2 + 2(\mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2) - r_1r_2) \Leftrightarrow$$

$|z_1+z_2|^2 - (r_1+r_2)^2 = 2(\mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2) - r_1r_2)$; étudions le signe de cette différence :

$|\mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2)| \le r_1r_2 \Leftrightarrow -r_1r_2 \le \mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2) \le r_1r_2 \Leftrightarrow -2r_1r_2 \le \mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2) - r_1r_2 \le 0$

$\Leftrightarrow -4r_1r_2 \le 2(\mathcal{R}e(z_1\bar{z}_2) - r_1r_2) \le 0 \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 - (r_1+r_2)^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$|z_1+z_2|^2 \le (r_1+r_2)^2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2 \Leftrightarrow |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

3. Trouvons une relation entre α_1 et α_2 pour qu'on ait $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$.

$|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \Leftrightarrow$

${r_1}^2 + {r_2}^2 + 2r_1r_2\cos(\alpha_1-\alpha_2) = {r_1}^2 + {r_2}^2 + 2r_1r_2 \Leftrightarrow \cos(\alpha_1-\alpha_2) = 1 \Leftrightarrow$

$\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 \equiv \alpha_2[2\pi].}$

II- (S): $\begin{cases} |z| = |z-6| \\ \arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

1. Donnons le module et un argument des complexes $a = \sqrt{3}+i$; $b = -2+2i$ et $c = 3+3i$.

$a = \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow |a| = 2$ et $\arg(a) = \frac{\pi}{6}$.

$b = -2+2i = 2(-1+i) = 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$|b| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(b) = \frac{\pi}{6}$.

$c = 3+3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow |c| = 3\sqrt{2}$ et $\arg(c) = \frac{\pi}{4}$.

2. Seul le complexe c vérifie le système (S); en effet : $c-6 = -3+3i$

$|c-6| = |c| = 3\sqrt{2}$ et $\arg(c^2) = 2\arg(c) = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

3. M(z), A(6). traduisons géométriquement les deux contraintes de (S).

$\begin{cases} |z| = |z-6| \\ \arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = AM \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

4. Résolvons le système (S).

$OM = AM \Leftrightarrow$ M est sur la médiatrice du segment [OA] ;

$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow$ M est sur la demi-droite d'origine O, de pente $\frac{\pi}{4}$, privée du point O. L'ensemble solution du système est l'affixe du point d'intersection de la médiatrice de [OA] et de la demi-droite d'origine O : c'est le complexe $c = 3+3i$.

Exercice 20:

M d'affixe z $(z \ne 1)$, M' d'affixe z' telle que $f(z) = z' = \frac{-iz-2}{z+1}$;

A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$, $c = -i$.

1. C' image du point C par f. Donnons l'affixe c' du point C' sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

$c' = \frac{-ic-2}{c+1} = \frac{(-i)^2-2}{1-i} = \frac{-3}{1-i} = \frac{-3}{2} - \frac{3}{2}i$; $\quad c' = \frac{-3}{2} - \frac{3}{2}i$

Scanné avec CamScanner

$c' = \frac{-3}{1-i} = \frac{3e^{i\pi}}{\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{\frac{i5\pi}{4}}$; $\boxed{c' = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i}$

2. Calculons l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.

$d' = \frac{-id-2}{d+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-id-2}{d+1} \Leftrightarrow d(1+2i) = -5 \Leftrightarrow d = \frac{-5}{1+2i} = -1+2i$; $\boxed{d = -1+2i}$

3. Pour tout nombre complexe $z \neq -1$, $p = |z+1|$ et $p' = |z'+i|$.

a. Démontrons que $pp' = \sqrt{5}$.

$pp' = |(z+1)(z'+i)| = \left|(z+1)\left(\frac{-iz-2}{z+1} + i\right)\right| = |-iz - 2 + iz + i| = |-2+i| = \sqrt{5}$.

b. Montrons que si M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, alors M' appartient à un cercle (Γ').

On a : $pp' = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z+1| \times |z'+i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow AM \times CM' = \sqrt{5}$.

Si M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, $AM = 2 \Rightarrow CM' = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

alors M' appartient au cercle (Γ') de centre C et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. $\omega = \frac{z-2i}{z+1}$, $z \neq -1$.

a. Interprétons géométriquement le module et l'argument du nombre complexe ω.

$|\omega| = \frac{|z-2i|}{|z+1|} = \frac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|} = \frac{BM}{AM}$; $\arg(\omega) = \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$.

b. Montrons que $z' = -i\omega$: $-i\omega = -i \times \frac{z-2i}{z+1} = \frac{-iz-2}{z+1} = z'$

c. Déterminons géométriquement l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.

z' est réel si et seulement si ω est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(\omega) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$. L'ensemble (Γ) est le cercle de diamètre [AB].

Equation de (F): l'affixe du centre de (F) est $\frac{a+b}{2} = \frac{-1+2i}{2}$ et son rayon est

$\frac{AB}{2} = \frac{|b-a|}{2} = \frac{|2i+1|}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; une équation de (F) est $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$.

d. Vérifions que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F).

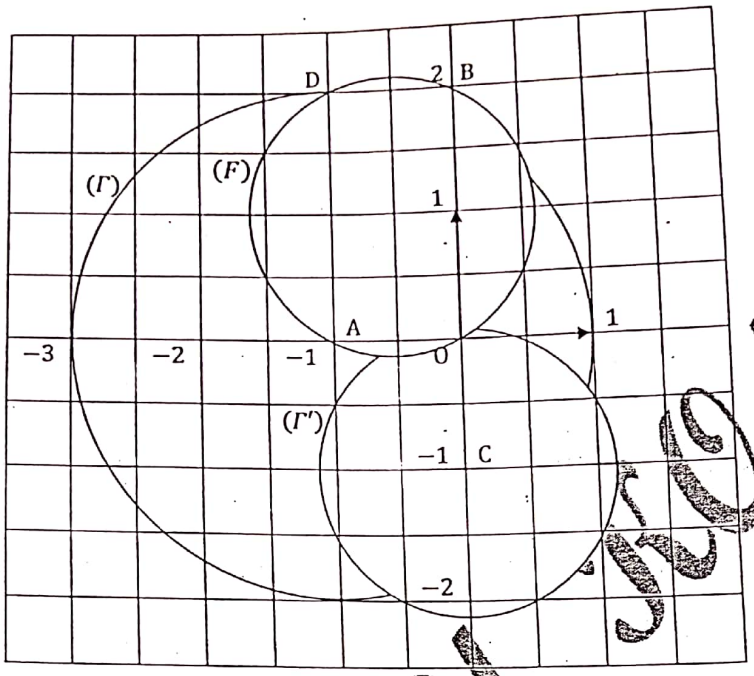
$D \in (\Gamma) \Leftrightarrow AD = 2$, $AD = |d-a| = |-1+2i+1| = |2i| = 2$ donc $D \in (\Gamma)$.

$D \in (F) \Leftrightarrow \left(x_D + \frac{1}{2}\right)^2 + (y_D - 1)^2 = \frac{5}{4}$; $\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

alors $D \in (F)$.

5. Représentons les ensembles (Γ), (F) et (Γ').

Scanné avec CamScanner



Exercice 21:

Soit l'équation (E) : $z^5 = 1$.

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

   z est une racine cinquième de l'unité, les solutions de (E) sont les complexes $z_k = e^{\frac{i2k\pi}{5}}$, $k\epsilon\{0,1,2,3,4\}$ $\Rightarrow z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{i2\pi}{5}}$, $z_2 = e^{\frac{i4\pi}{5}}$, $z_3 = e^{\frac{i6\pi}{5}}$, $z_4 = e^{\frac{i8\pi}{5}}$.

2. Démontrons que la somme des solutions de (E) est nulle.

$$z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \sum_{k=0}^{4} z_k = \sum_{k=0}^{4} e^{\frac{i2k\pi}{5}} = \sum_{k=0}^{4} \left(e^{\frac{i2\pi}{5}}\right)^k = \sum_{k=0}^{4} (z_1)^k =$$

$$= 1 + z_1 + {z_1}^2 + z_1^3 + z_1^4 = 1 \times \frac{1-(z_1)^5}{1-z_1} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{\frac{i2\pi}{5}}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{i2\pi}{5}}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{4} z_k = 0.$$

En déduisons que : $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

$$\sum_{k=0}^{4} z_k = 0 \Leftrightarrow 1 + e^{\frac{i2\pi}{5}} + e^{\frac{i4\pi}{5}} + e^{\frac{i6\pi}{5}} + e^{\frac{i8\pi}{5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + e^{\frac{i2\pi}{5}} + e^{\frac{i4\pi}{5}} + e^{i\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right)} + e^{i\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)} = 0$$

$$\leftrightarrow 1 + e^{\frac{i2\pi}{5}} + e^{\frac{i4\pi}{5}} + e^{\frac{-i4\pi}{5}} + e^{\frac{-i2\pi}{5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}.$$

3. Démontrons que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$.

$$4\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 4\left(\frac{1+\cos\frac{4\pi}{5}}{2}\right) + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right) =$$

$$= 2 + 2\cos\frac{4\pi}{5} + 4\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 2 + 4\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right) = 2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

Scanné avec CamScanner

alors $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4X^2+2X-1=0$.

En déduisons la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Résolvons l'équation $4X^2+2X-1=0$: $\Delta=20 \Rightarrow X_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, $X_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

$\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution et $\cos\frac{2\pi}{5}>0$, alors $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

4. (E') : $(z-1)^5=(z+1)^5$, $z\epsilon\mathbb{C}$.

a) Démontrons que si z_0 est solution de (E'), alors $\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right|=1$.

z_0 solution de $(E') \Leftrightarrow (z_0-1)^5=(z_0+1)^5 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{z_0-1}{z_0+1}\right)^5=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right|^5=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right|=1$.

En déduisons que les solutions de (E') sont imaginaires pures.

$\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right|=1 \Leftrightarrow \left(\frac{z_0-1}{z_0+1}\right)\overline{\left(\frac{z_0-1}{z_0+1}\right)}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{z_0-1}{z_0+1}\right)\left(\frac{\bar{z}_0-1}{\bar{z}_0+1}\right)=1 \Leftrightarrow$

$(z_0-1)(\bar{z}_0-1)=(z_0+1)(\bar{z}_0+1) \Leftrightarrow z_0\bar{z}_0-(z_0+\bar{z}_0)+1=z_0\bar{z}_0+(z_0+\bar{z}_0)+1$

$\Leftrightarrow 2(z_0+\bar{z}_0)=0 \Leftrightarrow z_0+\bar{z}_0=2\mathcal{R}e(z_0)=0 \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z_0)=0$, alors z_0 est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ les solutions de (E') sont imaginaires pures.

b) Résolvons (E'):

(E') est équivalente à l'équation :

$z^5-5z^4+10z^3-10z^2+5z-1=z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+1 \Leftrightarrow$

$10z^4+20z^2+2=0 \Leftrightarrow 5(ib)^4+10(ib)^2+1=0 \Leftrightarrow 5b^4-10b^2+1=0$

$\Delta'=20 \Rightarrow b^2=\frac{5-2\sqrt{5}}{5}$ ou $b^2=\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow b=\mp\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ ou $b=\mp\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$.

Les solutions de (E') sont les complexes $z_1=-i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$, $z_2=i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$,

$z_3=-i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, $z_4=i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ $\boxed{S=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}.}$

Exercice 22:

I- $z=e^{\frac{i2\pi}{7}}$, $a=z+z^2+z^4$ et $b=z^3+z^5+z^6$.

1. Démontrons que a et b sont deux complexes conjugués.

$a=e^{\frac{i2\pi}{7}}+e^{\frac{i4\pi}{7}}+e^{\frac{i8\pi}{7}}$ et $b=e^{\frac{i6\pi}{7}}+e^{\frac{i10\pi}{7}}+e^{\frac{i12\pi}{7}}$

Soit $\bar{a}$ le conjugué de a ; $\bar{a}=e^{\frac{-i2\pi}{7}}+e^{\frac{-i4\pi}{7}}+e^{\frac{-i8\pi}{7}}=e^{i\left(2\pi-\frac{2\pi}{7}\right)}+e^{i\left(2\pi-\frac{4\pi}{7}\right)}+e^{i\left(2\pi-\frac{8\pi}{7}\right)}=$

$\bar{a}=e^{\frac{i12\pi}{7}}+e^{\frac{i10\pi}{7}}+e^{\frac{i6\pi}{7}}=b$; $\bar{a}=b$, alors a et b sont conjugués.

-Démontrons que $\mathcal{I}m(a)>0$.

$\mathcal{I}m(a)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$

$\frac{4\pi}{7}\epsilon\,]0;\pi[$, alors $\sin\frac{4\pi}{7}>0$ (1) ;

$\frac{\pi}{7}$ et $\frac{2\pi}{7}$ appartiennent à l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}[$, $\frac{2\pi}{7}>\frac{\pi}{7}$ et la fonction sinus est croissante sur $]0;\frac{\pi}{2}[$, alors $\sin\frac{2\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7} \Leftrightarrow \sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}>0$ (2).

(1) + (2) donne $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}>0 \Leftrightarrow \mathcal{I}m(a)>0$.

Scanné avec CamScanner

2. Calculons $a+b$ et ab.

$$a+b=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{z(1-z^6)}{1-z}=\frac{e^{\frac{i2\pi}{7}}\left(1-e^{\frac{i12\pi}{7}}\right)}{1-e^{\frac{i2\pi}{7}}}=\frac{e^{\frac{i2\pi}{7}}-e^{i2\pi}}{1-e^{\frac{i2\pi}{7}}}=\frac{e^{\frac{i2\pi}{7}}-1}{1-e^{\frac{i2\pi}{7}}}=-1.$$

$$ab=a\bar{a}=\left(e^{\frac{i2\pi}{7}}+e^{\frac{i4\pi}{7}}+e^{\frac{i8\pi}{7}}\right)\left(e^{\frac{-i2\pi}{7}}+e^{\frac{-i4\pi}{7}}+e^{\frac{-i8\pi}{7}}\right)$$

$$=1+e^{\frac{-i2\pi}{7}}+e^{\frac{-i6\pi}{7}}+e^{\frac{i2\pi}{7}}+1+e^{\frac{-i4\pi}{7}}+e^{\frac{i6\pi}{7}}+e^{\frac{i4\pi}{7}}+1$$

$$=3+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)\text{ ; d'autre par on a : } a+b=a+\bar{a}=2\mathcal{R}e(a)$$

$a+b=-1 \iff \mathcal{R}e(a)=-\frac{1}{2} \iff \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$, alors

$ab=3+2\left(-\frac{1}{2}\right)=2$ $\boxed{a+b=-1}$, $\boxed{ab=2}$.

-En déduisons a et b.

$\begin{cases} a+b=-1 \\ ab=2 \end{cases} \iff a^2+a+2=0$: $\Delta=-7=7i^2$; $a_1=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $a_2=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

Puisque $\mathcal{I}m(a)>0$, alors $\boxed{a=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}}$ et $\boxed{b=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}}$.

II- 1. Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z^6+(1-2i\sqrt{2})z^3-2i\sqrt{2}=0$.

Posons $Z=z^3$; l'équation devient : $Z^2+(1-2i\sqrt{2})Z-2i\sqrt{2}=0$.

$\Delta=(1-2i\sqrt{2})^2-4(-2i\sqrt{2})=-7+4i\sqrt{2}$. Déterminons les racines carrées δ de Δ

Soit $\delta=x+iy$, on a:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-7 \\ 2xy=4\sqrt{2} \\ x^2+y^2=\sqrt{32+49} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2=-7 \\ xy=2\sqrt{2} \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2=2 \\ xy=2\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=2\sqrt{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$$

$\delta_1=1+2i\sqrt{2}$ et $\delta_2=-1-2i\sqrt{2} \implies Z_1=\frac{-1+2i\sqrt{2}+1+2i\sqrt{2}}{2}=2i\sqrt{2}$;

$Z_2=\frac{-1+2i\sqrt{2}-1-2i\sqrt{2}}{2}=-1 \iff z^3=2i\sqrt{2}$ ou $z^3=-1$. Les solutions sont donc

Les racines cubiques de $2i\sqrt{2}$ ou les racines cubiques de -1.

- $2i\sqrt{2}=2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{2}}=\sqrt{8}e^{\frac{i\pi}{2}} \implies z_k=\sqrt[3]{\sqrt{8}}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, avec $k\epsilon\{0,1,2\}$

$z_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$; $z_1=\sqrt{2}\,e^{\frac{i5\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$; $z_2=\sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{2}}=-i\sqrt{2}$.

- $-1=e^{i\pi} \implies z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k\epsilon\{0,1,2\}$; $z_0=e^{\frac{i\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_1=e^{i\pi}=-1$;

$z_2=e^{\frac{i5\pi}{3}}=e^{\frac{-i\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'ensemble solution de l'équation est :

$$\boxed{S=\left\{\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-i\sqrt{2}\,;\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-1\,;\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.}$$

2. Plaçons les points images des solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. (Voir page suivante).

III- 1-Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

$\Delta=12-16=4i^2 \implies \delta_1=2i$ et $\delta_2=-2i \implies$ les solutions sont

$z_1=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$ et $z_1=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$; $\boxed{S=\{\sqrt{3}+i\,;\sqrt{3}-i\}.}$

Scanné avec CamScanner

$a = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$ et

$b = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{-i\pi}{6}}$.

2- $r\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$: $z_{A'} = z_A e^{\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow a' = ae^{\frac{i\pi}{3}} = 2e^{\frac{i\pi}{6}} \times e^{\frac{i\pi}{3}} = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$; $\boxed{a' = 2i}$

3- $h\left(O, \frac{-3}{2}\right)$: $z_{B'} = \frac{-3}{2} z_B \Leftrightarrow b' = \frac{-3}{2} \times 2e^{\frac{-i\pi}{6}} = -3e^{\frac{-i\pi}{6}} = 3e^{\frac{i5\pi}{6}} = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$\boxed{b' = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i.}$

4- C est le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B'.

a) Justifions les égalités :

On a : $OC = CA' = CB' = R$; $OC^2 = R^2 \Leftrightarrow |c|^2 = R^2 \Leftrightarrow \boxed{c\bar{c} = R^2}$ (1)

$CA'^2 = R^2 \Leftrightarrow |a' - c|^2 = R^2 \Leftrightarrow |2i - c|^2 = R^2 \Leftrightarrow (2i - c)(\overline{2i - c}) = R^2 \Leftrightarrow$

$(2i - c)(-2i - \bar{c}) = R^2$ R^2 $\boxed{(c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2}$ (2)

$CB'^2 = R^2 \Leftrightarrow |b' - c|^2 = R^2 \Leftrightarrow \left|-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - c\right|^2 = R^2 \Leftrightarrow$

$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - c\right)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - c\right) = R^2 \Leftrightarrow \boxed{\left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2}$ (3)

b) En déduisons que $c - \bar{c} = 2i$ puis que $c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

L'égalité (2) est équivalente à $c\bar{c} + 2i(c - \bar{c}) + 4 = R^2 \Leftrightarrow R^2 + 2i(c - \bar{c}) + 4 = R^2$

$\Leftrightarrow c - \bar{c} = \frac{-2}{i} = 2i$, $\boxed{c - \bar{c} = 2i.}$ (4)

Développons (3) : On a $c\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2}(c + \bar{c}) + \frac{3}{2}i(c - \bar{c}) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}i\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow$

$R^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}(c + \bar{c}) + \frac{3}{2}i(2i) + \frac{9\times3}{4} + \frac{9}{4} = R^2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}(c + \bar{c}) - 3 + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$c + \bar{c} = \frac{-4}{\sqrt{3}} = \frac{-4\sqrt{3}}{3}$, $\boxed{c + \bar{c} = \frac{-4\sqrt{3}}{3}}$ (5)

Déduisons alors l'affixe c du point C et le rayon R.

(4) + (5) donne : $2c = \frac{-4\sqrt{3}}{3} + 2i \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{-2\sqrt{3}}{3} + i} \Rightarrow \bar{c} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} - i \Rightarrow$

$R = \sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{\frac{4\times3}{9} + 1} = \sqrt{\frac{21}{9}}$; $\boxed{R = \frac{\sqrt{21}}{3}.}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 1:

1. Ecrire les nombres :
   a) 64206 en base 2 puis en base 16 ; b) 19473 en base 13 ;
   c) 413 en base 12 ; d) $N = \overline{2AF}^{16}$ en base 2.
2. Effectuer : $\overline{432}^5 + \overline{203}^5$; $\overline{312}^5 \times \overline{212}^5$.
3. Ecrire dans le système décimal $\overline{110100011}^2$.
4. a) Un nombre N s'écrit xyz en base 7 et zyx en base 9. Quel est ce nombre ?
   b) Déterminer l'entier N' du système décimal tel que : $N' = \overline{ab7}^9 = \overline{a7b}^8$.
5. Démontrer que dans tout système de numération de base $a, (a \geq 4)$ le nombre $\overline{1331}$ est le cube d'un entier x.
6. a) Vérifier que $x^4 + 16x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.
   b) Montrer que dans tout système de numération de base b supérieur à 3 on a : $\overline{10} \times \overline{11} \times \overline{12} \times \overline{13} + 1 = (\overline{131})^2$.
7. Dans quel système de numération a-t-on $122 \times 103 = 13121$?
8. Quelle est la base du système de numération dans le quel le nombre $\overline{12551}^{10}$ s'écrit 30407 ?

Exercice 2:

1. (Compo. Rive gauche 2015-2016)
   x est un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soient les entiers naturels N et N' qui qui s'écrivent respectivement $\overline{100x}$ et $\overline{x001}$ dans le système de base $x+1$.
   a) Ecrire N et N' dans le système de base x.
   b) Ecrire $N + N'$ dans le système de base $x+1$.
   En déduire que $N + N'$ est multiple de $x+1$.
   Donner alors, dans le système de base x, le quotient q de la division euclidienne de $N + N'$ par $x+1$.
   c) En déduire qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = q$.
2. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 240.
3. Déterminer les diviseurs de 72 et de 297.
4. Vérifier si les nombres suivants sont premiers : 649 ; 1001 ; 1999 ; 17487 ; 257323.
5. On considère la fraction $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$, où n est un entier naturel > 2.
   a) Montrer que $A(n)$ peut s'écrire sous la forme $a + \frac{b}{n-2}$, où a et b sont deux entiers naturels à déterminer.
   b) Pour quelles valeurs de n $A(n)$ est-il un entier naturel ?

Exercice 3:

1. Tous les entiers considérés sont écrits dans le système décimal.
   a) Quel est le chiffre des unités de l'entier 17^{1980} ?
   b) Soit a_n le chiffre des unités de l'entier $17^n, (n \in \mathbb{N})$.
   Quelles valeurs peut prendre a_n ?
   c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $a_n = 3$?
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel $n > 1$, $n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5 ;

Scanné avec CamScanner

b) En déduire que les nombres n^p et $n^{p+4}, p \geq 1$, ont le même chiffre des unités.

3. Déterminer les chiffres x et y tels que l'entier $N = \overline{3x92y}$ du système décimal soit divisible par 3 et 5.

4. Déterminer les chiffres x et y $(x < 8)$ pour que l'entier naturel qui s'écrit $\overline{x64y}$ en base dix soit divisible par 9 et 5.

5. Un nombre s'écrit $\overline{1x1yxy}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 63.

Exercice 4:

I- Soit l'entier naturel $N = \overline{53x4}^8$.

1) Déterminer x de telle sorte que N soit :
a) divisible par 7 ; b) divisible par 6.

2) En déduire qu'il existe x tel que N soit à la fois divisible par 6 et par 7.

3) On prend $x = 2$; déterminer l'écriture décimale de N.

4) Quel est le nombre de diviseur de N dans $\mathbb{N}$?
Trouver le plus petit nombre entier naturel non nul par lequel il faut multiplier N pour que le produit soit un carré parfait.

II- On se propose de déterminer l'ensemble (S) des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9\ [17] \\ n \equiv 3\ [5] \end{cases}$$

1) On désigne par $(u\,;v)$ un couple d'entiers relatifs tels que $17u + 5v = 1$.
Justifier l'existence d'un tel couple $(u\,;v)$.

2) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$. Démontrer que n_0 appartient à (S).

3) Soit n un entier relatif appartenant à (S). Démontrer que $n - n_0 \equiv 0\ [85]$.

4) En déduire qu'un entier relatif n appartient à (S) si et seulement si n peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

5) *Application* :
Hawa sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons ?

III- 1. Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de $N = 19^{52} \times 23^{41}$.

2. Soit $a = 4420$ et $b = 2772$ deux entiers.

a) Déterminer $d = PGCD(a\,;b)$;

b) Déterminer les restes des divisions par 5 des entiers naturels $12^d\,;12^a\,;12^b$.

3. Soient les entiers $A = 2n + 18$ et $B = n + 3$, $n \in \mathbb{N}$. Déterminer n pour que
a) A soit divisible par B ;
b) A et B soient premiers entre eux.

4. a) Factoriser les polynômes A et B tels que :
$A(x) = 10x^3 + 60x^2 + 110x + 60$
$B(x) = 6x^2 + 18x + 12$.

b) Lorsque x est un entier naturel, déterminer le PGCD et le PPCM des entiers naturels $A(x)$ et $B(x)$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 5:

1. a) Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste dans la division euclidienne par 7 de 4^n.
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $95^{9n+2} - 53^{3n-1} \equiv 0[7]$.
2. a) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49.
   b) En déduire que, si l'entier n n'est pas multiple de 3, alors $5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49.
3. a) Trouver les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240.
   b) Calculer l'entier naturel n tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait. (*Bac* 2012)
4. On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur, mesurées en mètres d'un rectangle.
   Sachant que $a = 72$ et que le ppcm de a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ? (*Bac* 2012)
5. a) Trouver le reste de la division euclidienne de 111 par 7 et de 10^n par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n.
   b) Soit l'entier naturel $N = 999\ 888\ 777\ 666\ 555\ 444\ 333\ 222\ 111$.
   - Montrer que N peut s'écrire en fonction de 111.
   - Quel est le reste de la division euclidienne de N par 7 ? (*Bac* 2013)

Exercice 6:

1. a) Etudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 5 de 12^n.
   b) En déduire le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier $N = \overline{4\beta32\alpha5^{12}}$.
2. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation de congruence : $x^3 + 2x^2 - x - 13 \equiv 0\ [11]$. (1)
   a) Montrer qu'il existe deux nombres entiers relatifs α et β tels que :
   $x^3 + 2x^2 - x - 13 = (x+1)(x^2 + \alpha x + \beta) - 11$.
   b) En déduire que les solutions de (1) sont solutions de l'une des deux équations :
   $x + 1 \equiv 0\ [11]$ ou $x^2 + x - 2 \equiv 0\ [11]$.
   c) Déterminer les solutions de (1).
3. Soit $A = 10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On pose : $10^3 - 1 = 9 \times 111$ et $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$.
   a) Déterminer le reste de la division euclidienne de A par 111.
   b) On suppose n impair. Montrer que A est divisible par 7, par 11, par 13.
   c) On suppose n pair.
   -Démontrer que $A-6$ est divisible par 11, par 7, par 13 et par 111.
   -Quel est le reste de la division euclidienne de A par 111×1001?
4. a) Déterminer les restes de la division euclidienne par 5 de 2^n et 3^n.
   b) En déduire l'entier n tel que : $(1188)^n + (2257)^n \equiv 0\ [5]$.
5. Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $n^2 + 5n + 9$ par $n + 2$.
6. Déterminer $n \in \mathbb{Z}$ tels que la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ soit un entier relatif.

Solution

Scanné avec CamScanner

Exercice 7:

1. Démontrer que pour tout entier naturel n.
   a) $n^2(n+1)^2$ est divisible par 4 ; b) $n^2(n^2-1)$ est divisible par 12.
   c) $(5n+3)^2-(2n-3)^2$ est divisible par 21 ; d) $3^{2n+3}+2^{n+3}$ est divisible par 7.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que :
   a) x^2+x-2 soit divisible par 7 ; b) x^2+x-2 soit divisible par 3
   c) x^2+x-2 soit divisible par 42 ; d) $(x-3)$ divise $(2x+1)$.
3. Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que :
   a) $3n+24$ soit divisible par $n-4$; b) (n^2-3n+6) soit divisible par 5 ;
   c) $n+1$ divise n^2-n+3 ; d) n^7-n est un multiple de 7.
4. Démontrer que pour tous entiers relatifs x et y, $xy(x^2-y^2)$ est divisible par 2.
5. Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$:
   a) $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6 ; b) $4^n+15n-1$ est divisible par 9 ;
   c) $10^{9n+2}+10^{6n+1}+1$ est divisible par 111 ; d) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7 ;
   e) $2\times 6\times\ldots\times(4n-2)=(n+1)(n+2)\times\ldots\times 2n$, $n\neq 0$.

Exercice 8:

1. a) Démontrer que, $\forall n\mathbb{N}$, $3^{2n+1}+2\times 4^{3n+1}$ est divisible par 11.
   b) Déterminer l'ensemble des rationnels a tels que $3^{2n+1}+a\times 4^{3n+1}$ soit divisible par 11, $\forall n\in\mathbb{N}$.
2. Etudier les restes successifs de la division euclidienne par 9 de 2^n puis démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $2^{2n}(2^{2n+1}-1)-1$ est divisible par 9.
3. La division euclidienne de 900 par un entier naturel n a pour quotient 14 et pour reste r. Quelles sont les valeurs possibles de n et r ?
4. a) Etudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.
   b) Dans le système décimal, déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le chiffre des unités de l'entier $A(n)$ défini par : $A(n)=1+7+7^2+\cdots+7^n$.
5. Démontrer que pour tout entier naturel n,
   a) $n^2(n^4-1)$ est divisible par 60 ; b) $n(n^6-1)$ est divisible par 42.

Exercice 9:

1. Résoudre :
   a) Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $x^2-\dot{2}x-\dot{3}=\dot{0}$; b) Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $x^2+\dot{17}x-\dot{4}=\dot{0}$;
   c) Dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$: $x^2-\dot{4}x+\dot{11}=\dot{0}$.
2. Résoudre : a) Dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$: $\begin{cases}\dot{2}x+\dot{4}y=\dot{2}\\ x-\dot{3}y=\dot{3}\end{cases}$;
   b) Dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$: $\begin{cases}x-\dot{2}y+z=\dot{0}\\ x+\dot{2}y-\dot{2}z=\dot{1}\end{cases}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: a) $\begin{cases}x\equiv -1[34]\\ x\equiv 1[15]\end{cases}$; b) $x^2\equiv -1[5]$.
4. On note $\dot{x}$ les éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\bar{x}$ les éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Déterminer les entiers

Scanné avec CamScanner

relatifs x tels que : $\begin{cases} \dot{x}^2 - 4\dot{x} + \dot{3} = \dot{0} \\ \bar{2}\bar{x} - \bar{2} = \bar{0} \end{cases}$.

5. a) Démontrer que, pour tous entiers relatifs x et y et tous entiers naturels n et k, $x \equiv y[n] \iff kx \equiv ky[kn]$;

b) En utilisant la relation de congruence modulo 12 déterminer les entiers relatifs x tels que : $x \equiv 1\,[3]$ et $x \equiv 2\,[4]$.

Exercice 10:

1. $\dot{a}$ désigne la classe d'équivalence modulo 15 de l'entier a.

a) Déterminer les couples (a,b) tels que $\dot{a}\dot{b} = \dot{0}$, $\dot{a} \neq 0$ et $\dot{b} \neq 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$.

c) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ le système suivant : $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{3}y = \dot{3} \\ \dot{2}x + y = \dot{5} \end{cases}$.

2. a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11.

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ?

3. a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $7x \equiv 3[5]$.

En déduire la résolution de l'équation $7x + 5y = 3$.

b) Déduire de a) la résolution du système $\begin{cases} x \equiv 1[5] \\ x \equiv -2[7] \end{cases}$.

4. a) Démontrer que le carré tout nombre impair est congru à 1 modulo 8.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $8x + 1 = y^2$.

5. a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $5x - 11y = 4$.

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système : $\begin{cases} 3\alpha \equiv 1[5] \\ 7\alpha \equiv 9[11] \end{cases}$

6. Trouver les couples (a,b) d'entiers naturels non nuls dont le PGCD d et le PPCM m vérifient $3m - 2d = 30$.

Exercice 11:

1. Déterminer les couples (a,b) d'entiers naturels tels que :

a) $\begin{cases} a + b = 60 \\ a \wedge b = 12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a + b = 105 \\ a \vee b = 12(a \wedge b) \end{cases}$; c) $\begin{cases} a^2 + b^2 = 801 \\ a \vee b = 120 \end{cases}$; d) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 5440 \\ a \wedge b = 8 \end{cases}$.

2. a) Déterminer l'ensemble des diviseurs dans $\mathbb{N}$ de 124 ;

b) Déterminer les couples (x,y) de $(\mathbb{N}^*)^2$ tels que : $\begin{cases} m - 4d = 124 \\ 3 < d < 50 \end{cases}$,

avec $\text{PPCM}(x,y) = m = x \vee y$ et $\text{PGCD}(x,y) = d = x \wedge y$.

3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: a) $\begin{cases} \text{PPCM}(x,y) = 168 \\ xy = 1008 \end{cases}$; b) $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$; c) $x^3 - y^3 = 631$;

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: a) $\begin{cases} xy = -1 \\ 2x + y^3 = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2[5] \end{cases}$; c) $xy - 4y = 42$.

5. a) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0\,[11]$.

b) Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels non nuls tels que : $\text{PGCD}(a\,;b) + \text{PPCM}(a\,;b) = b + 9$.

c) Déterminer $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $\text{PPCM}(a;b) - 16\,\text{PGCD}(a;b) = 1977$.

Solution

Scanné avec CamScanner

Exercice 12:

1. a) Montrer que l'équation $(E): 7x - 11y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation : $\dot{7}x = \dot{11}y$.
   c) Donner toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
2. On désigne par a un entier naturel non nul.
   Montrer que le reste de la division euclidienne de $[a^2 + (a-1)^2]^2$ par $4a^2$ est $(2a-1)^2$.
3. a) Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1998 ?
   b) Soit $\delta = \text{PGCD}(a\,;b)$ et $\mu = \text{PPCM}(a\,,b)$, a et b des entiers naturels.
   Déterminer les couples d'entiers naturels $(a\,,b)$ tels que $\mu^2 - 3\delta^2 = 1998$.
4. a) Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 5929.
   b) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $x^2 - 91x + 588 = 0$. (1)
   c) Déterminons les couples $(a\,,b)$ d'entiers naturels dont le pgcd et le ppcm sont solutions de l'équation (1).
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n > 1$.
   a) Déterminer le PGCD des entiers $n(n+1)$ et $(n-1)(n+2)$.
   b) En déduire une propriété des nombres a et b tels que :
   $2a = n(n+1)$ et $2b = (n-1)(n+2)$.

Exercice 13:

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'entier $2n^2 + 2n$ est premier avec l'entier $2n+1$.
2. Déterminer l'entier $n \in \mathbb{Z}$ pour que $(2n+3)$ et $(n+7)$ soient étrangers.
3. Quatre nombres entiers strictement positifs a, b, c, d forment dans cet ordre, une suite géométrique dont la raison est un nombre entier premier avec a.
   Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.
4. Pour tout entier naturel $n \geq 5$, on considère les nombres :
   $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.
   a) Montrer que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.
   b) On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$. On note $\delta = \text{PGCD}(\alpha\,;\beta)$.
   - Etablir une relation entre α et β indépendante de n.
   - Démontrer que δ est un diviseur de 5.
   - Démontrer que α et β sont multiples de 5 $\Leftrightarrow$ $n-2$ est multiple de 5.
   c) Montrer que $2n+1$ et n sont étrangers.
   d) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n, le $\text{PGCD}(a\,;b)$.
   Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.
5. Soit b un entier strictement positif supérieur à 1.
   On rappelle que $b^2 - 1 = (b+1)(b-1)$.
   a) Quel est le PGCD de b^2 et $(b-1)$?
   b) Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $b^2x + (b-1)y = 1$?
   A.N : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $9x + 2y = 1$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 14:

1. Soient les nombres $A = 2n + 3$, $B = 5n - 2, n \in \mathbb{N}$.
   a) Déterminer deux entiers naturels u et v premiers entre eux tels que $Au - Bv$ soit indépendant de n.
   b) En déduire que, si A et B ne sont pas étrangers, alors leur PGCD est 19.
   c) Etudier l'ensemble des entiers n tels PGCD $(A ; B) = 19$.
2. Déterminer tous les entiers naturels a et b dont le PGCD δ et le PPCM μ vérifient l'égalité $\mu - 2\delta = 20$.
3. a) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (α, β) dans chacun des cas suivants : $17\alpha - 19\beta = 2$; $17\alpha - 19\beta = -2$;
   b) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $\begin{cases} n \equiv 0[17] \\ n \equiv -2[19] \end{cases}$;
   c) En déduire l'ensemble des entiers n tels que $n^2 + 2n \equiv 0[323]$. (*Bac* 2003)
4. a) Trouver par la méthode de l'Algorithme d'Euclide le PGCD des nombres 24101 et 18780 :
   b) Trouver les couples (x, y) d'entiers naturels vérifiant $18780x - 24101y = 313$ sachant que le couple $(9, 7)$ est une solution.

Exercice 15: (*Bac* 2015, 2014, 2011)

I - α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple de diviseurs de N.
1) Prouvez que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
2) Déduisez en les valeurs de N. (2015)

II - On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} x \equiv 10\ [23] \\ x \equiv 4\ [7] \end{cases}$. (S)
1) Déterminer un couple d'entiers $(\alpha ; \beta)$ solution de $23\alpha + 7\beta = 1$.
2) En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution de l'équation $23u - 7v = -6$ puis résoudre complètement cette équation.
3) Démontrer que x est solution de (S) si et seulement si, il existe $(u ; v)$ couples d'entiers vérifiant le système $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$.
   En déduire l'ensemble solution de (S).
4) Déterminer la plus petite solution $x_0 \in \mathbb{N}$ divisible par 16. (2014)

III - Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on donne le point A(12; 18). On désigne par B un point de l'axe $(O ; \vec{u})$ et C un point de $(O, \vec{v})$ tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.
1) Démontrer que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation (E): $2x + 3y = 78$.
2) On se propose de trouver tous les couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
   a) Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble des entiers relatifs.
   b) A partir de la définition de B et de C trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E).
   c) Démontrer qu'un couple (x, y) est solution de (E) si et seulement si

Scanné avec CamScanner

$(x,y) = (12+3k, 18-2k)$ où k est un entier relatif.

d) Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$? (2011)

Exercice 16:

1. a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x + 7y = 123$;
   b) Combien de voitures de 7 places et combien de voitures de 5 places faut-il pour transporter en même temps 123 passagers ?
2. On considère les nombres $A = 7k + 2$ et $B = 3k + 5$ où k est un entier naturel.
   a) Montrer que PGCD(A, B) divise 29.
   b) Déterminer l'entier naturel k tel que PGCD(A, B) = 29.
3. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $11x + 8y = 79$.
   a) Montrer que si (x,y) est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$.
   b) Résoudre alors l'équation (E).
   c) Le prix total de 41 pièces détachées reparties en trois lots est de 48 000F. Le prix d'une pièce du 1er lot est 4 800F ; le prix d'une pièce du 2ème lot est 3 600F et le prix d'une pièce du 3ème lot est 400F. Déterminer le nombre de pièces de chaque lot. (*Bac* 2014)
4. a) Déterminer les couples (x,y) d'éléments de $(\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant le système $\begin{cases} x+y=40 \\ x \wedge y = 5 \end{cases}$.
   b) Le directeur d'un lycée dispose de 15 cahiers et 25 bics. Avec ses fournitures, il veut faire des lots identiques pour récompenser les plus méritants de ses élèves. Quel est le nombre maximum de lots qu'il peut former ?
   c) On suppose qu'il peut former 5 lots et qu'il a en tout 40 objets (*bics et cahiers*). Le nombre de cahiers étant inférieur au nombre de bics, déterminer le nombre de cahiers et de bics.

Exercice 17: (*Bac* 1999, 2001, 2002)

I - 1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste de la division par 7 de l'entier 3^n. En déduire le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$.

b) Dans le système de numération décimale, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$. Déterminer x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

2) a) Déterminer le plus grand diviseur commun de 21590 et 9525.

b) Déterminer l'ensemble des entiers x tels que : $34x \equiv 2[15]$.

c) Résoudre l'équation : $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $21590x + 9525y = 1270$.

d) Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel 7^{1980} dans le système décimal ?

II - 1) Le système de numération est le système décimal.

a) Déterminer l'entier naturel $N = \text{PGCD}(17787 ; 689 ; 297)$.

b) Résoudre l'équation : $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $13x - 84y = 7$.

2) a) Déterminer tous les couples (a,b) d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tels que $\begin{cases} a \times b = \dot{0} \\ a - b = \dot{5} \end{cases}$;

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + \dot{3}x - \dot{4} = \dot{0}$;

c) Démontrer que, quelque soit l'entier naturel n, on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$.

Scanné avec CamScanner

III – Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 30m et 21m ; les deux autres côtés mesurent 18m et 12m.
Pour clôturer, le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.
1) Quelle est la distance entre deux poteaux ?
2) Déterminer le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

Exercice 18:

1. a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.
   b) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 7 de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$.
   c) On considère le nombre B qui s'écrit dans le système de numération à base quatre, $B = 2103211$.
   Déterminer dans le système décimal le reste de la division du nombre B par 7.
2. a) Trouver trois naturels a, b, c différents de 1, premiers entre eux deux à deux et tels que $a \times b \times c = 495$.
   b) x, y, z étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base dix.
   Déterminer tous les triplets (x, y, z) pour lesquels A est multiple de 495.
3. a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17q - 11p = 2$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 1 = 0$.
4. a) Soit l'entier naturel $N = \overline{25x3^{13}}$. Pour quelles valeurs de x, N est-il divisible par 6 ? par 4 ? par 24 ?
5. a) Déterminer l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}$ qui vérifient $3x \equiv 23[7]$.
   b) En déduire l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $3x - 7y = 23$.

Exercice 19:

I- Dans un système de numération de base a, on considère les nombres $A = \overline{211}$, $B = \overline{312}$, $C = \overline{133032}$.
1) Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3.
2) a) Sachant que $C = A \times B$, montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$.
   b) En déduire que a divise 8.
   c) Déterminer alors a.
3) L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base quatre.
4) Dans cette question on suppose que $a = 4$.
   a) Ecrire A, B et C dans le système décimal.
   b) Montrer alors que $C = A \times B = ppcm(A, B)$.
   En déduire que l'équation $Ax + By = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
5) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $37x + 54y = 1$.
   a) Vérifier que $(19; -13)$ est une solution de cette équation.
   b) Résoudre cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.

(*Compo.* 2014 – 2015 *R.G*)

Scanné avec CamScanner

II - Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coute 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept.

1) Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puissent, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

2) Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes.
En déduire le nombre mangues que chacune d'elles peut acheter.

3) a) Décomposer m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers.
b) En déduire le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 puis le $pgcd(m_1, m_2)$.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ où u et v sont deux entiers relatifs.

(*Bac* 2012)

III–1. On appelle nombre triangulaire tout nombre entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$, avec a un entier naturel non nul.

a) Démontrer que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n+1$ est la somme de deux carrés.

b) On pose $n = 3$. $4n+1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ?
Etudier la réciproque de la propriété a). (CIAM – Bac 2007)

2. On appelle diviseur strict d'un entier naturel n tout diviseur de n positif et autre que le nombre lui-même.
Déterminer les entiers naturels diviseurs stricts de 220. (CIAM)

3. On appelle nombres amiables deux entiers naturels tels que chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.
Vérifier que : 220 et 284 sont amiables ;
17296 et 18416 sont amiables. (CIAM)

4. On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (c'est-à-dire amiable avec lui même).
a) Le nombre 28 est-il parfait ?
b) Déterminer un entier p premier tel que le nombre 2^4p soit parfait.
c) Plus généralement, soit n et p deux entiers naturels, avec p premier ;
Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que 2^np soit parfait ?
Donner la liste des nombres parfaits de cette forme pour $n < 10$. (CIAM)

Exercice 20:

1. Déterminer le PPCM des couples d'entiers naturels suivants :
(4452, 3604) ; (1455, 335) ; (6974, 9287) ; (492, 180).
2. Déterminer le PGCD des couples d'entiers naturels suivants :
(9287, 1455) ; (4452, 3604) ; (7875, 975) ; (28420 ; 4116).
$(n\ ;\ 2n+1)$, $(3n+1\ ;\ 2n+1)$.
3. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.
4. Un document rédigé comporte 4350 lignes sur plusieurs pages. Une page complète

Scanné avec CamScanner

comporte 34 lignes et seule la dernière page est éventuellement incomplète. Calculer le nombre de ligne figurant sur la dernière page. Donner alors le nombre de lignes qu'il faut pour compléter la dernière page et le nombre total de pages utilisées par ce document.

5. On veut recouvrir une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61m avec des dalles carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres.
   a) Quelle est la taille maximale de ces dalles ?
   b) Déterminer alors le nombre total de dalles qu'il faut pour recourir cette surface.
6. Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit.
   La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.
   a) Y-a-t-il des moments (autres que le départ!) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ? si oui, exprimer ce temps en heures.
   b) Préciser le nombre de tours effectués par chaque voiture pendant ce laps de temps.

Exercice 21:

I– Soit f l'application de $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ définie par $f(\dot{x}) = \overline{17}x + \dot{9}$.

1) Trouver l'inverse de $\overline{17}$.
2) Résoudre l'équation $f(x) = \dot{0}$.
3) Montrer que f est une bijection puis donner sa bijection réciproque.

II–1) a) Démontrer qu'il existe un couple (a, b) d'entiers relatifs tel que $45a - 16b = 1$.
   b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $45x - 16y = 2$.

2) Deux camions A et B garent régulièrement et périodiquement à l'office du Niger pour le chargement.
   Le camion A gare tous les 90 jours et B gare tous les 32.
   Le camion A gare un jour j_0, quatre jours plus tard, B gare à son tour à l'office du Niger.
   On note j_1 le jour de la prochaine entrée simultanée des camions à l'office du Niger.
   a) Soient u et v le nombre d'entrées à l'office du Niger effectuées respectivement par A et B entre j_0 et j_1 (j_0 non compris).
   Démontrer que le couple (u, v) est une solution de (E).
   b) Déterminer le couple (u, v).
   Calculer le nombre de jours qui s'écoulent entre j_0 et j_1 (j_0 non compris).

III– On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ ».

1) a) Démontrer que 193 est un nombre premier.
   b) Soit a un entier naturel inférieur à 192. Montrer que $a^{192} \equiv 1[193]$.
2) On considère l'équation (E): $83x - 192y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Vérifier que le couple $(155, 67)$ est solution de (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
3) On note A l'ensemble des 193 entiers naturels inférieurs ou égaux à 192 et on considère les deux fonctions f et g définies de la manière suivante :

Scanné avec CamScanner

à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193 ;
à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{155} par 193.

a) Démontrer $g(f(a)) \equiv a^{83\times155}[193]$.

En déduire que pour tout $a \in A$ on a : $g(f(a)) = a$.

b) Déterminer $f \circ g$.

Exercice 22:

1) On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a) Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.

b) En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c) Résoudre l'équation (E).

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite (D) d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note (C) l'ensemble des points M (x, y) du plan tels que $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 50$.

Déterminer le nombre de points de la droite (D) appartenant à (C) et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2) On considère l'équation (F): $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a) Démontrer que si le couple (x, y) est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2[5]$.

b) x et y étant des entiers relatifs recopier et compléter les deux tableaux suivants.

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

c) Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

d) En déduire que si (x, y) est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors (x, y) n'est pas solution de (F).

Exercice 23:

I- On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p alors $q^{p-1} \equiv 1[p]$ ».
On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, par :
$U_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

1) Calculer les six premiers termes de la suite (U_n).

2) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, U_n est pair.

3) Montrer que, pour tout entier naturel n pair et non nul, U_n est divisible par 4.
On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de de la suite (U_n).

4) Les entiers 2, 3, 5, 7 appartiennent-ils à (E) ?

5) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.

a) Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3[p]$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2[p]$.

b) En déduire que $6U_{p-2} \equiv 0[p]$.

c) Le nombre p appartient-il à (E) ?

Scanné avec CamScanner

II– Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre de Fermat F_n défini par : $F_n = 2^{2^n} + 1$, où n est un entier naturel.

1) a) Calculer F_0, F_1, F_2 *et* F_3. Vérifier que ces nombres sont premiers.

b) Vérifier que F_5 est divisible par 641.

2) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$.

3) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, l'écriture décimale de F_n se termine par 7. (*On pourra utiliser les congruences.*)

4) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) En posant $a = 2^{2^n}$, démontrer que $\frac{F_{n+k} - 2}{F_n} = \frac{a^{2^k} - 1}{a + 1}$.

b) en déduire que F_n divise $F_{n+k} - 2$.

5) Déduire de la question précédente que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux. (CIAM)

III–Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1) Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur 4,54m et de largeur 3,75m. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de 33cm de côté. On commence la pose par un coin de la pièce.
Calculer le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.

2) Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur 4,55m et de largeur 3,85m. On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.

a) Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.

b) Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.

c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles à utiliser pour carreler cette cuisine ?

3) On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24cm et de largeur 15cm.

a) Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.

b) Donner la liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400.

c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe ?

Exercice 24:

I–1) Soit a *et* n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Démontrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

2) On appel nombre de Mersenne, tout entier naturel M_n de la forme $M_n = 2^n - 1$, où n est un entier naturel premier.

a) Vérifier que M_2, M_3, M_5 et M_7 sont premiers.

b) Qu'en est-il de M_{11}. (CIAM)

II–1) On considère l'équation (E): $8x + 5y = 1$ où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Donner une solution particulière de (E).

b) Résoudre (E).

2) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un couple (a, b) d'entiers naturels vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$.

Scanné avec CamScanner

a) Montrer que le couple (a, b) est solution de (E).

b) Quel est le reste de la division euclidienne de N par 40 ?

3) a) Résoudre l'équation : $8x + 5y = 100$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

b) Au VIII^{ème} siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans ce groupe ?

III–1) Soit l'équation : $168x + 20y = 4$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Cette équation a-t-elle des solutions ?

2) a) En utilisant l'Algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs m et p tels que : $42m + 5p = 1$.

b) En déduire deux entiers relatifs u et v tels que : $42u + 5v = 2$.

c) Démontrer que le couple (x, y) est solution de $42x + 5y = 2$ si et seulement si $42(x + 4) = 5(34 - y)$.

d) Déterminer tous les couples (x, y) solutions de l'équation $42x + 5y = 2$.

3) Déduire du 2) les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = -5$.

Exercice 25:

I– On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1) a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $123u - 2003v = 1$.

b) En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123k_0 \equiv 1[2003]$.

c) Montrer que, pour tout entier relatif x,

$123x \equiv 456[2003] \Leftrightarrow x \equiv 456k_0[2003]$.

d) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x \equiv 456[2003]$.

e) Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :

$1 \leq n \leq 2002$ et $123n \equiv 456[2003]$.

2) Soit a un entier tel que : $1 \leq a \leq 2002$.

a) Déterminer PGCD $(a, 2003)$.

En déduire qu'il existe un entier m tel que : $am \equiv 1[2003]$.

b) Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que :

$0 \leq x \leq 2002$ et $ax \equiv b[2003]$.

II– Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

On se propose de résoudre le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$.

1) Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

(*On ne demamde pas de donner un exemple d'un tel couple*).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2) a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ (S').

b) Démontrer que le système (S') équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

3) a) Trouver un couple (u, v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer N.

Scanné avec CamScanner

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S). (*on pourra utiliser la question 2)b)*).

4) Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12, le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

III-1) Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{N}$, $(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}) = x^k - 1$.
Dans toute la suite de l'exercice on considère un entier naturel $a \geq 2$.
2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et d un diviseur positif de n : $n = dk$.
Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
b) En déduire que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.
3) Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.
a) On défini m' et n' par : $m = dm'$ et $n = dn'$.
En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.
b) On suppose u et v strictement positifs :
Montrer que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$.
Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.
c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, PGCD $(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1)$.

Exercice 26:

I-1) a) Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p+10$, $p+20$ et un seulement est divisible par 3.
b) Les entiers naturels a, b, c sont, dans cet ordre, les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 10.
Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.
2) Soit (E) l'ensemble des triplets d'entiers relatifs (u, v, w) tels que :
$3u + 13v + 23w = 0$.
a) Montrer que, pour un tel triplet, $v \equiv w[3]$.
b) On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leq r \leq 2$. Montrer que les éléments de (E) sont de la forme :
$(-13k - 23k' - 12r \ ; \ 3k + r \ ; \ 3k' + r)$.

II-On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :
« les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers ? »
Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1 \cdots 1$ où 1 apparait p fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.
1) Les nombres $N_2 = 11$; $N_3 = 111$; $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?
2) Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?
3) On se propose de démontrer que, si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
On rappelle que, pour tout nombre réel x et tout entier naturel $n \neq 0$:
$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$.
a) On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel

Scanné avec CamScanner

plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b) On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel supérieur à 1. Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c) On suppose p non premier et on pose $p = kq$, où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k.

4) Enoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
Cette condition est-elle suffisante ?

III– Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ (1).
Où u et v sont des entiers relatifs.

1) On suppose, dans cette question, que $\frac{14}{39}$ est solution de (1).

a) Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1129$.

b) Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple (x, y) d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.
Vérifier que le couple $(-25\,;9)$ est solution de cette équation.

c) En déduire un couple (u_0, v_0) solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1129$.
Donner la solution générale de cette équation.

d) Déterminer parmi les couples (u, v) précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2) a) Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers. En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b) Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1).
Montrer que, si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

c) En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

Exercice 27:

Etant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv (2^n - 1)[2^n]$ (1).

A– 1) On suppose ici $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition (1).

2) On suppose ensuite ici $n = 3$.

a) Soit $m \in \mathbb{N}$. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

b) Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8]$?

B– On suppose qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que :
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv (2^n - 1)[2^n]$.

1) Justifier le fait que les trois entiers sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

Scanné avec CamScanner

2) On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$; $y = 2r$; $z = 2s + 1$, où q, r, s sont des entiers naturels.
   a) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1[4]$.
   b) En déduire une contradiction.
3) On suppose x, y, z sont impairs.
   a) Prouver que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k^2 + k$ est divisible par 2.
   b) En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3[8]$.
   c) Conclure.

Exercice 28:

I- Soit à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $3x^2 + 3x + 7 = y^3$.
1. Vérifier que (E) est équivalente à : $3(x^2 + x + 2) = y^3 - 1$.
2. Résoudre l'équation (E).
   (*On pourra distinguer 3 cas*: $y \equiv 0[3]$, $y \equiv 1[3]$ *et* $y \equiv 2[3]$.)

II- 1. Soit p et q deux entiers relatifs premiers entre eux, n un entier naturel non nul.
   Démontrer que p et q^n sont premiers entre eux.
2. Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers relatifs admettant une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ (p *et* q *sont deux entiers premiers entre eux*).
   Démontrer que p divise a_0 et que q divise a_n.
3. Factoriser le polynôme : $3x^3 + 7x^2 + 7x + 4$.
4. Résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation : $x^5 + 12x^4 - 12x^3 + x^2 + 7x - 1 = 0$.

III- On désigne par $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers naturels premiers.
On se propose de résoudre dans $\mathbb{P}^2$ l'équation (E): $x^2 - y^2 = pq$, où p et q sont deux entiers naturels premiers.
1. Etudier le cas où $p = q = 2$.
2. Etudier le cas où $p = 2$ et $q > 2$.
3. a) On suppose que $2 < q \leq p$.
   • Démontrer que y est necessairement egal à 2.
   • En déduire que si $p - q \neq 4$, (E) n'a pas de solution.
   b) On suppose que $p - q = 4$.
   Démontrer que si $(x; 2)$ est une solution de (E), alors les nombres q, x et p forment une suite arithmétique de raison 2.
   En déduire que (E) n'a de solution que si $q = 3$ et $p = 7$.
   (On pourra démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'un des 3 nombres n, n + 2, n + 4 est divisible par 3.)
   Quelle est la solution de (E) dans ce cas ?

Exercice 29:

I- On se propose de résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E): $5^x - 4^x = y^2$.
1. Vérifier que $(1\,;1)$ est solution de (E).
   Dans la suite du problème, on suppose $x \neq 1$.

Scanné avec CamScanner

2. L'objet de cette question est de démontrer que x est pair.
   a) Quels sont les entiers naturels n tels que $n^2 \equiv 5[8]$?
   b) Démontrer que si x est impair, alors $5^x - 4^x \equiv 5[8]$.
   c) Conclure.
3. On pose : $x = 2m$ $(m \in \mathbb{N})$.
   a) Démontrer que (E) est équivalente à : $(5^m - y)(5^m + y) = 2^{4m}$.
   b) En déduire qu'il existe deux entiers p et q tels : $5^m - y = 2^p$ et $5^m + y = 2^q$, avec $p + q = 4m$.
   c) Déduire de la question précédente que : $\begin{cases} p = 1 \\ q = 4m - 1 \\ 5^m = 1 + 4^{2m-1} \end{cases}$.
4. On admet que $m \leq 1$. Déterminer les solutions de (E).

II- Soit à résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E): $15x^2 - 7y^2 = 9$.
1. a) Démontrer que dans le système décimal le dernier chiffre d'un carré est 1, 4, 5, 6 ou 9.
   b) En déduire que $7y^2 + 9$ n'est pas divisible par 5.
   c) Résoudre l'équation (E).

III- Soit (x_n) et (y_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \ \text{et} \ y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la Droite (D) d'équation : $2x - y - 5 = 0$.
2. En déduire x_{n+1} en fonction de x_n.
3. Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatifs.
4. a) Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.
   b) Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux.
5. a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 2^{n+1} + 1$.
   b) Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}.
   c) En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5.

Abdelkader Kone

Scanné avec CamScanner

Exercice1:

1. Ecrivons les nombres :

a) 64206 en base 2 puis en base 16 :

$64206 = 32103 \times 2 + 0$; $64206 = 4012 \times 16 + 14$; $\boxed{64206 = \overline{FACE}^{16}}$

$32103 = 16051 \times 2 + 1$ $\quad 4012 = 250 \times 16 + 12$

$\boxed{64206 = \overline{1111101011001110}^{2}}$

$16051 = 8025 \times 2 + 1$ $\quad 250 = 15 \times 16 + 10$

$8025 = 4012 \times 2 + 1$ $\quad 15 = 0 \times 16 + 15$

$4012 = 2006 \times 2 + 0$

b) 19473 en base 13 :

$2006 = 1003 \times 2 + 0$

$19473 = \overline{8B2C}^{13}$

$1003 = 501 \times 2 + 1$

$501 = 250 \times 2 + 1$

$250 = 125 \times 2 + 0$

$125 = 62 \times 2 + 1$

$62 = 31 \times 2 + 0$

$31 = 15 \times 2 + 1$

$15 = 7 \times 2 + 1$

$7 = 3 \times 2 + 1$

$3 = 1 \times 2 + 1$

$1 = 0 \times 2 + 1$

c) 413 en base 12 :

$413 = 34 \times 12 + 5$

$34 = 2 \times 12 + 10$

$2 = 0 \times 12 + 2$

$\boxed{413 = \overline{2\alpha 5}^{12}}$

d) $N = \overline{2AF}^{16}$ en base 2.

$N = 2 \times (16)^2 + 10 \times 16 + 15 =$

$N = 2 \times 2^8 + 2 \times (2^2 + 1) \times 2^4 + (2 + 1)(2^2 + 1) = 2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$\boxed{N = \overline{2AF}^{16} = \overline{1010101111}^{2}}$

2.. Effectuons : $\overline{432}^5 + \overline{203}^5$; $\overline{312}^5 \times \overline{212}^5$.

$$\begin{array}{r} \overline{432}^5 \\ + \quad \overline{203}^5 \\ \hline \overline{1140}^5 \end{array}$$

$\boxed{\overline{432}^5 + \overline{203}^5 = \overline{1140}^5}$

$$\begin{array}{r} \overline{312}^5 \\ \times \quad \overline{212}^5 \\ \hline 1124 \\ 312 \\ \hline 1124 \\ \hline \overline{122144}^5 \end{array}$$

$\boxed{\overline{312}^5 \times \overline{212}^5 = \overline{122144}^5}$

3. Ecrivons dans le système décimal $\overline{110100011}^2$.

$\overline{110100011}^2 = 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2 + 1 = 256 + 128 + 32 + 3 = 419.$

4. Déterminons dans le système décimal

a) le nombre $N = \overline{xyz}^7 = \overline{zyx}^9$.

$\overline{xyz}^7 = \overline{zyx}^9 \iff 49x + 7y + z = 81z + 9y + x \iff y = 24x - 40z.\ (E)$

x, y et z étant des entiers naturels inférieurs à 7, il s'agira de résoudre l'équation (E) pour $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$PGCD(24, 40) = 8$ et 8 ne divise que 0 parmi les valeurs de y, donc seule l'équation $24x - 40z = 0$ admet des solutions :

$24x - 40z = 0 \iff 3x = 5z$; $PGCD(3, 5) = 1$ et 3 divise $5z$, alors d'après le théorème

Scanné avec CamScanner

de Gauss 3 divise $z \Leftrightarrow z = 3k$ et $x = 5k$, $k \in \mathbb{N}$. On trouve alors $y = 0$, $x = 5$ et $z = 3$. Le nombre est $\boxed{N = \overline{503}^7 = \overline{305}^9 = 248.}$

b) le nombre $N' = \overline{ab7}^9 = \overline{a7b}^8$.

$\overline{ab7}^9 = \overline{a7b}^8 \Leftrightarrow 81a + 9b + 7 = 64a + 56 + b \Leftrightarrow 17a + 8b = 49$; $17 \wedge 8 = 1$ et 1 divise 49 donc l'équation a des solutions.

$17 = 8 \times 2 + 1 \Leftrightarrow 17 + 8(-2) = 1 \Leftrightarrow 17(49) + 8(-98) = 49 \Rightarrow$ une solution particulière de l'équation $17a + 8b = 49$ est le couple $(49, -98)$; alors on a $\begin{cases} 17a + 8b = 49 & (1) \\ 17(49) + 8(-98) = 49 & (2) \end{cases}$; $(1) - (2)$ donne $17(a - 49) = 8(-b - 98)$; le théorème de Gauss nous permet d'écrire : $a - 49 = 8k$ et $-b - 98 = 17k \Leftrightarrow a = 8k + 49$ et $b = -17k - 98$; on a $0 < a < 8$ et $0 < b < 8 \Leftrightarrow 0 < 8k + 49 < 8$ et $0 < -17k - 98 < 8 \Leftrightarrow -\frac{49}{8} < k < -\frac{41}{8}$ et $-\frac{106}{8} < k < -\frac{98}{8} \Leftrightarrow k = -6$

$\Rightarrow a = -48 + 49 = 1$ et $b = 102 - 98 = 4 \Rightarrow \boxed{N' = \overline{147}^9 = \overline{174}^8 = 124.}$

Démontrons que dans tout système de numération de base a, $(a \geq 4)$ le nombre $\overline{1331}$ est le cube d'un entier x.

$\overline{1331}^a = 1 \times a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a + 1)^3 = x^3$, avec $x = a + 1$.

a) Vérifions que : $x^4 + 16x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

$(x^2 + 3x + 1)^2 = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + x^2 + 3x + 1$

$= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$ CQFD.

b) Montrons que dans tout système de numération de base b supérieur à 3 on a : $\overline{10} \times \overline{11} \times \overline{12} \times \overline{13} + 1 = (\overline{131})^2$.

$\overline{10} \times \overline{11} \times \overline{12} \times \overline{13} + 1 = \overline{10}^b \times \overline{11}^b \times \overline{12}^b \times \overline{13}^b + 1$

$= b \times (b + 1)(b + 2)(b + 3) + 1$

$= (b + 2)(b + 3)(b^2 + b) + 1 = (b^2 + 5b + 6)(b^2 + b) + 1$

$= b^4 + 6b^3 + 5b^2 + 6b^2 + 6b + 1 = b^4 + 6b^3 + 11b^2 + 6b + 1$

$= (b^2 + 3b + 1)^2 = (\overline{131}^b)^2$

Déterminons le système de numération dans lequel on a : $122 \times 103 = 13121$?

Soit b la base de ce système :

$\overline{122}^b \times \overline{103}^b = \overline{13121}^b \Leftrightarrow (b^2 + 2b + 2)(b^2 + 3) = b^4 + 3b^3 + b^2 + 2b + 1 \Leftrightarrow$ $-b^3 + 4b^2 + 4b + 5 = 0$. $b = 5$ est une solution de cette équation ; alors l'équation est équivalente à $(b - 5)(-b^2 - b - 1) = 0$. Le deuxième facteur $-b^2 - b - 1 = 0$ ne donne pas de solution dans $\mathbb{N}$; la base du système est $b = 5$, on a :

$\boxed{\overline{122}^5 \times \overline{103}^5 = \overline{13121}^5.}$

Cherchons la base α du système dans le quel on a : $\overline{12551}^{10} = \overline{30407}^{\alpha}$.

$\overline{12551}^{10} = \overline{30407}^{\alpha} \Leftrightarrow 3\alpha^4 + 4\alpha^2 + 7 = 12551 \Leftrightarrow 3\alpha^4 + 4\alpha^2 - 12544 = 0$.

$\Delta = 16 + 12 \times 12544 = 150544 = (388)^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{-4 + 388}{6} = 64$ et $\alpha \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \alpha = 8$.

On a : $\boxed{\overline{12551}^{10} = \overline{30407}^8}$

ercice 2:

$x \geq 5$, $N = \overline{100x}$ et $N' = \overline{x001}$ dans le système de numération de base $x + 1$.

) Ecrivons N et N' dans le système de numération de base x.

Scanné avec CamScanner

$N = \overline{100x}^{x+1} = (x+1)^3 + x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x = x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = \overline{1341}^x$.

$N' = \overline{x001}^{x+1} = x(x+1)^3 + 1 = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 = \overline{13311}^x$

b) Ecrivons $N + N'$ dans le système de base $x+1$.

$N + N' = (x+1)^3 + x + x(x+1)^3 + 1 = [(x+1)^3 + 1] + x[1 + (x+1)^3]$

$= [(x+1)^3 + 1](x+1) = (x+1)^4 + (x+1) = \overline{10010}^{x+1}$. $\boxed{N + N' = \overline{10010}^{x+1}}$

En déduisons que $N + N'$ est multiple de $x+1$.

On a : $N + N' = [(x+1)^3 + 1](x+1) = q(x+1)$ avec $q = (x+1)^3 + 1$, alors $N + N'$ est un multiple de $x+1$.

Donnons alors, dans le système de base x, le quotient q de la division euclidienne de $N + N'$ par $x+1$.

$q = (x+1)^3 + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = \overline{1332}^x$, $\boxed{q = \overline{1332}^x}$

c) En déduisons qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $\overline{ab}^{\mathcal{H}} \times \overline{aaa}^{\mathcal{H}} = q$

$\overline{ab}^{\mathcal{H}} \times \overline{aaa}^{\mathcal{H}} = q \iff (ax+b)(ax^2 + ax + a) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \iff$

$ax^3 + (a^2 + ab)x^2 + (a^2 + ab)x + ab = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

par identification on a $\begin{cases} a = 1 \\ a^2 + ab = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}}$; on a : $\overline{12}^x \times \overline{111}^x = \overline{1332}^x$.

2. Déterminons le nombre de diviseurs positifs de 240.

$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \Rightarrow D(240) = \{2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma\}$ avec $\alpha \in \{0,1,2,3,4\}$; $\beta \in \{0,1\}$ et $\gamma \in \{0,1\}$.

Il y a donc $5 \times 2 \times 2 = 20$ diviseurs positifs de 240.

3. Déterminons les diviseurs de 72 et de 297.

$72 = 2^3 \times 3^2$; $D(72) = \{2^\alpha \times 3^\beta\}$ avec $\alpha \in \{0,1,2,3\}$ et $\beta \in \{0,1,2\} \Rightarrow$ il y a donc $4 \times 3 = 12$ diviseurs positifs de 72.

$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$

$297 = 3^3 \times 11$; $D(297) = \{3^\alpha \times 11^\beta\}$ avec $\alpha \in \{0,1,2,3\}$ et $\beta \in \{0,1\} \Rightarrow$ il y a donc $4 \times 2 = 8$ diviseurs positifs de 297 ; $D(297) = \{1, 3, 9, 11, 27, 33, 99, 297\}$

	0	1	2	3
2^α	1	2	4	8
3^β	1	3		

	0	1	2	3
3^α	1	3	9	27
11^β	1	11		

4. Vérifions si les nombres suivants sont premiers :

649 : $\sqrt{649} = 25,47 \Rightarrow$ les nombres 1ers inférieurs à 25,47 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

649 est divisible par 11 donc il n'est pas premier.

1001 : $\sqrt{1001} = 31,64$; 1001 est divisible par 7 donc il n'est pas premier.

1999 : $\sqrt{1999} = 44,7$ les nombres premiers inférieurs à 44,7 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 et aucun de ces nombres ne divise 1999, alors 1999 est premier.

17487 : la somme des chiffres de ce nombre est 27 qui est divisible par 3, alors 17487 est divisible par 3 qui est premier donc 17487 n'est pas premier.

257323 : la somme des chiffres de rang impair est égale à la somme des chiffres de rang pair, alors 257323 est divisible par 11 qui est premier, alors 257323 n'est pas premier.

5. On considère la fraction $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$, où n est un entier naturel supérieur à 2.

a) Montrons que $A(n)$ peut s'écrire sous la forme $a + \frac{b}{n-2}$, où $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

Scanné avec CamScanner

$A(n) = \frac{n+16}{n-2} = 1 + \frac{18}{n-2} \Rightarrow \boxed{a = 1\ ;\ b = 18}$

b) Déterminons n pour que $A(n)$ soit un entier naturel.

$A(n) \in \mathbb{N}$ si seulement si $(n-2)$ est un diviseur de 18.

$D(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$; $n > 2 \Rightarrow$

$n-2 = 1 \Rightarrow n = 2$ à rejeter | $n-2 = 6 \Rightarrow n = 8$ | $A(n)$ est un entier naturel si $\boxed{n \in \{5\ ;\ 8\ ;\ 11\ ;\ 20\}}$

$n-2 = 2 \Rightarrow n = 0$ à rejeter | $n-2 = 9 \Rightarrow n = 11$

$n-2 = 3 \Rightarrow n = 5$ | $n-2 = 18 \Rightarrow n = 20$

Exercice 3:

1. Tous les entiers considérés sont écrits dans le système décimal.

a) Déterminons le chiffre des unités de l'entier 17^{1980}.

$17^0 \equiv 1[10]$; $17 \equiv 7[10]$; $17^2 \equiv 9[10]$; $17^3 \equiv 3[10]$; $17^4 \equiv 1[10]$. $17^{1980} = 17^{4\times 495}$

$17^4 \equiv 1[10] \Rightarrow (17^4)^{495} \equiv 1[10] \Rightarrow$ le chiffre des unités de 17^{1980} est 1.

b) a_n le chiffre des unités de l'entier $17^n, (n \in \mathbb{N})$.

$17^{4k} \equiv 1[10]$, $17^{4k+1} \equiv 7[10]$, $17^{4k+2} \equiv 9[10]$, $17^{4k+3} \equiv 3[10]$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Si $n = 4k \Rightarrow a_n = 1$; Si $n = 4k+1 \Rightarrow a_n = 7$; Si $n = 4k+2 \Rightarrow a_n = 9$

Si $n = 4k+3 \Rightarrow a_n = 3$. Les valeurs possibles de a_n sont : 1 ; 3 ; 7 ; 9.

c) $a_n = 3$ pour $\boxed{n = 4k+3.}$

2. a) Montrons que, pour tout entier naturel $n > 1$, $n(n^4-1)$ est divisible par 5.

$n(n^4-1)$ est divisible par 5 $\Leftrightarrow n(n^4-1) \equiv 0[5] \Leftrightarrow n(n^4-\dot{1}) = \dot{0}$.

Dans la division euclidienne par 5 les restes sont : 0, 1, 2, 3, 4.

Dans tous les cas on a $n(n^4-\dot{1}) = \dot{0}$

$\Leftrightarrow n(n^4-1) \equiv 0[5] \Leftrightarrow n(n^4-1)$ est divisible par 5.

n	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
n^4-1	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$n(n^4-1)$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$

b) En déduire que les nombres n^p et n^{p+4}, $p \geq 1$, ont le même chiffre des unités.

L'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est intègre (*car 5 est premier*), alors $n \equiv 0[5]$ ou $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

Si $p \geq 1$, alors $n^p \equiv 0[5] \Rightarrow n^p(n^4-1) \equiv 0[5] \Leftrightarrow n^{p+4} - n^p \equiv 0[5] \Leftrightarrow$

$n^{p+4} \equiv n^p[5] \Rightarrow n^p$ et n^{p+4} ont le même reste dans la division euclidienne par 5, donc le même chiffre des unités.

3. Déterminons les chiffres x et y tels que l'entier $N = \overline{3x92y}^{10}$ soit divisible par 3 et 5.

$N \equiv 0[3] \Leftrightarrow (3+x+9+2+y) \equiv 0[3] \Leftrightarrow (x+y+2) \equiv 0[3]$.

$N \equiv 0[5] \Leftrightarrow y \equiv 0[5] \Rightarrow y \in \{0; 5\}$.

$\begin{cases} y = 0 \\ x+2 \equiv 0[3] \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 5 \\ x+7 \equiv 0[3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \equiv 1[3] \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 5 \\ x \equiv 2[3] \end{cases}$

(1) $\begin{cases} y = 0 \\ x = 3k+1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y = 5 \\ x = 3k'+2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x \in \{1; 4; 7\} \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 5 \\ x \in \{2; 5; 8\} \end{cases}$

Les chiffres $(x; y)$ sont les couples $\boxed{(1\ ;\ 0)\ (4\ ;\ 0)\ (7\ ;\ 0)\ (2\ ;\ 5)\ (5\ ;\ 5) \text{ et } (8\ ;\ 5)}$.

Les nombres 31920 ; 34920 ; 37920 ; 32925 ; 35925 et 38925 sont tous divisibles par 3 et par 5.

4. Déterminons les chiffres x et y $(x < 8)$ pour que l'entier naturel, qui s'écrit $\overline{x64y}^{10}$, soit divisible par 9 et 5.

$\overline{x64y}^{10} \equiv 0[9] \Leftrightarrow (x+6+4+y) \equiv 0[9] \Leftrightarrow x+y \equiv 8[9]$

Scanné avec CamScanner

$\overline{x64y}^{10} \equiv 0[5] \Rightarrow y \equiv 0[5] \Rightarrow y \in \{0;5\}$.

$\begin{cases} y=0 \\ x \equiv 8[9] \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=5 \\ x \equiv 3[9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=9k+8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=5 \\ x=9k+3 \end{cases}$; $x<8 \Rightarrow x=3$

$\Rightarrow \boxed{(x;y)=(3\,;\,5)}$

5. Déterminons les entiers naturels x et y tels que $N=\overline{1x1yxy}^{10}$ soit divisible par 63.

N est divisible par 63 $\Leftrightarrow$ N est à la fois divisible par 7 et par 9.

$N=10^5+10^4x+10^3+10^2y+10x+y$. $x<10$ et $y<10$

$10 \equiv 3[7]$; $10^2 \equiv 2[7]$; $10^3 \equiv 6[7]$; $10^4 \equiv 4[7]$; $10^5 \equiv 5[7]$.

$N \equiv 0[7] \Leftrightarrow (5+4x+6+2y+3x+y) \equiv 0[7] \Leftrightarrow (3y+4) \equiv 0[7]$ (1)

$N \equiv 0[9] \Leftrightarrow (1+x+1+y+x+y) \equiv 0[9] \Leftrightarrow (2x+2y+2) \equiv 0[9]$ (2)

$\begin{cases} 3y+4 \equiv 0[7] \\ 2x+2y+2 \equiv 0[9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv 1[7] \\ 2x+2y \equiv 7[9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7k+1 \ ; \ k \in \mathbb{N} \\ 2x+2y \equiv 7[9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \{1;8\} \\ 2x+2y \equiv 7[9] \end{cases}$

$\dot{x}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{8}$
$\dot{2}x$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{6}$	$\dot{8}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{5}$	$\dot{7}$

$\begin{cases} y=1 \\ 2x \equiv 5[9] \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=8 \\ 2x+16 \equiv 7[9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8 \\ 2x \equiv 0[9] \end{cases}$

$\begin{cases} y=1 \\ \dot{2}x=\dot{5} \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=8 \\ \dot{2}x=\dot{0} \end{cases}$; $\begin{cases} y=1 \\ \dot{x}=\dot{7} \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=8 \\ \dot{x}=\dot{0} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y=1 \\ x=9k+7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=8 \\ x=9k \end{cases}$; $0 \le x \le 9$ et $0 \le y \le 9$, d'où on a :

$\begin{cases} y=1 \\ x=7 \end{cases}$, $\begin{cases} y=8 \\ x=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=8 \\ x=9 \end{cases}$. Les entiers naturels x et y tels que $N=\overline{1x1yxy}^{10}$ soit divisible par 63 sont les couples $\boxed{(x;y) \in \{(7\,;\,1)\,;\,(0\,;\,8)\,;\,(9\,;\,8)\}}$.

On a bien $N=171171$; $N'=101808$ et $N''=191898$ qui sont divisibles par 63.

Exercice 4:

I- Soit l'entier naturel $N=\overline{53x4}^8$.

1) a) Déterminons x tel que $N \equiv 0[7]$.

$4 \equiv 4[7]$

$8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8x \equiv x[7]$

$8^2 \equiv 1[7] \Rightarrow 3 \times 8^2 \equiv 3[7]$

$8^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 5 \times 8^3 \equiv 5[7]$

$N \equiv 0[7] \Leftrightarrow (4+x+3+5) \equiv 0[7]$

$x+12 \equiv 0[7] \Leftrightarrow x \equiv 2[7]$

$x=7k+2$ et $x<8 \Rightarrow x=2$ $\boxed{N \equiv 0[7] \Rightarrow x=2}$

b) Déterminons x tel que $N \equiv 0[6]$.

$4 \equiv 4[6]$

$8 \equiv 2[6] \Rightarrow 8x \equiv 2x[6]$

$8^2 \equiv 4[6] \Rightarrow 3 \times 8^2 \equiv 0[6]$

$8^3 \equiv 2[6] \Rightarrow 5 \times 8^3 \equiv 4[6]$

$N \equiv 0[6]$

$(4+2x+4) \equiv 0[6]$

$2x+8 \equiv 0[6] \Leftrightarrow 2x \equiv 4[6] \Leftrightarrow x \equiv 2[3]$

$x=3k+2 \Rightarrow x=2$ ou $x=5$

Remarque : On pourrait poser $2x \equiv 4[6] \Leftrightarrow \dot{2}x=\dot{4}$.

Le tableau de congruence donne $\dot{x}=\dot{2}$ ou $x=\dot{5}$

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{2}x$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$

$N \equiv 0[6] \Rightarrow x \in \{2\,;\,5\}$

2) En déduisons qu'il existe x tel que $N \equiv 0[7 \times 6]$.

Pour $x=2$ on a $N \equiv 0[7]$ et $N \equiv 0[6] \Rightarrow N \equiv 0[7 \times 6]$ pour $x=2$.

3) On prend $x=2$; déterminons l'écriture décimale de N.

$x=2 \Rightarrow N=\overline{5324}^8=5 \times 8^3 \times 3 \times 8^2 \times 2 \times 8+4=2772$;

$\boxed{N=\overline{5324}^8=2772}$

Scanné avec CamScanner

4) Le nombre de diviseur de N dans $\mathbb{N}$:

$2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 \Rightarrow D(2772) = \{2^\alpha; 3^\beta; 7^\gamma; 11^\delta\}$ avec $\alpha \in \{0,1,2\}$; $\beta \in \{0;1;2\}$ $\gamma \in \{0,1\}$ et $\delta \in \{0,1\}$ il y a donc $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ diviseurs positifs de N.

N à 36 diviseurs dans $\mathbb{N}$

Trouvons le plus petit nombre entier naturel k, non nul, par lequel il faut multiplier N pour que le produit kN soit un carré parfait.

On sait que $2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2 = (2 \times 3 \times 7 \times 11)^2$ est un carré parfait et $2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2 = 7 \times 11 \times N = 77N \Rightarrow \boxed{k = 77}$

II- $(S) : \begin{cases} n \equiv 9\,[17] \\ n \equiv 3\,[5] \end{cases}$.

1) Justifions l'existence d'un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tels que $17u + 5v = 1$.

PGCD$(17;5) = 1$, alors d'après le théorème de Bézout il existe un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

2) $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$. Montrons que les entiers n_0 appartiennent à (S).

n_0 appartient à $(S) \Leftrightarrow n_0 \equiv 9\,[17]$ et $n_0 \equiv 3\,[5]$. On a :

$n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v = 3 \times 17u + 9(1 - 17u) = 17(-6u) + 9 \equiv 9[17]$; d'autre part,

$n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v = 3(1 - 5v) + 9 \times 5v = 3 + 5(6v) \equiv 3\,[5]$.

$n_0 \equiv 9\,[17]$ et $n_0 \equiv 3\,[5]$, alors n_0 appartient à (S).

3) Démontrons que $n - n_0 \equiv 0[85]$.

$n \equiv 9\,[17]$	$n \equiv 3\,[5]$
$n_0 \equiv 9\,[17]$	$n_0 \equiv 3\,[5]$
$n - n_0 \equiv 0[17]$	$n - n_0 \equiv 0[5]$

$n - n_0$ est à la fois divisible par 17 et 5, alors $n - n_0$ est divisible par $17 \times 5 = 85$.

$\Leftrightarrow n - n_0 \equiv 0[85]$.

4) En déduisons que n appartient à (S) si et seulement si $n = 43 + 85k$.

$n - n_0 \equiv 0[85] \Leftrightarrow n \equiv n_0\,[85]$; $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$; déterminons un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$. On a : $17(-2) + 5(7) = 1 \Rightarrow$ $(u\,;v) = (-2;7) \Rightarrow n_0 = -2 \times 3 \times 17 + 9 \times 5 \times 7 = 213 \Rightarrow n \equiv 213\,[85] \Leftrightarrow$ $n \equiv 43[85] \Leftrightarrow \boxed{n = 85k + 43.}$

5) *Application* :

Soit n le nombre de jetons, p, q, k les nombres de tas. On a

$\begin{cases} n = 17p + 9 \\ n = 5q + 3 \end{cases} \Leftrightarrow n = 85k + 43$; $300 < n < 400 \Leftrightarrow 300 < 85k + 43 < 400 \Leftrightarrow$ $257 < 85k < 357 \Leftrightarrow 3{,}02 < k < 4{,}2 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow n = 85 \times 4 + 43 = 383$.

Hawa a 383 jetons : en faisant $p = 22$ tas de 17 jetons il lui reste 9, en faisant $q = 76$ tas de 5 jetons il lui reste 3 et en faisant $k - 4$ tas de 85 jetons il lui reste 43.

III-1. Déterminons le reste de la division euclidienne par 7 de $N = 19^{52} \times 23^{41}$.

$19 \equiv 5[7]$ et $23 \equiv 2[7] \Rightarrow N \equiv 5^{52} \times 2^{41}[7]$; déterminons les restes de la division euclidienne par 7 de 5^n *et* 2^n.

$5^0 \equiv 1[7]$; $5 \equiv 5[7]$; $5^2 \equiv 4[7]$; $5^3 \equiv 6[7]$; $5^4 \equiv 2[7]$; $5^5 \equiv 3[7]$; $5^6 \equiv 1[7]$;

La période est 6. $5^{52} = 5^{6 \times 8 + 4} \Rightarrow 5^{52} \equiv 2[7]$; $2^0 \equiv 1[7]$; $2 \equiv 2[7]$; $2^2 \equiv 4[7]$; $2^3 \equiv 1[7]$; la période est 3. $2^{41} = 2^{3 \times 13 + 2} \Rightarrow 2^{41} \equiv 4[7]$, alors $N \equiv (2 \times 4)[7] \Leftrightarrow$

Scanné avec CamScanner

$\boxed{N \equiv 1[7]} \Leftrightarrow$ le reste de la division euclidienne par 7 de $N = 19^{52} \times 23^{41}$ est 1.

2. $a = 4420$ et $b = 2772$.

a) Déterminons $d = \text{PGCD}(a, b)$

$a = 4420 = 2^2 \times 5 \times 13 \times 17$ et $b = 2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 \Rightarrow \boxed{d = 4}$

b) Déterminer les restes des divisions par 5 des entiers naturels 12^d ; 12^a ; 12^b.

$12^0 \equiv 1[5]$; $12 \equiv 2[5]$; $12^2 \equiv 4[5]$; $12^3 \equiv 3[5]$; $12^4 \equiv 1[5]$

$12^d = 12^4$ et $12^4 \equiv 1[5] \Rightarrow$ le reste de la division euclidienne de 12^d est 1.

$12^a = 12^{4420} = 12^{4\times1105}$; $12^{4\times1105} \equiv 1[5] \Rightarrow$ le reste est $r = 1$.

$12^b = 12^{2772} = 12^{4\times693}$; $12^{4\times693} \equiv 1[5] \Rightarrow$ le reste est $r = 1$.

3. $A = 2n + 18$ et $B = n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminons n pour que A soit divisible par B.

$\frac{A}{B} = \frac{2n+18}{n+3} = 2 + \frac{12}{n+3}$; A est divisible par B si et seulement si $\frac{12}{n+3}$ est un entier naturel $\Leftrightarrow$ $n + 3$ est un diviseur de 12 $\Leftrightarrow (n + 3) \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

$\Rightarrow n \in \{0; 1; 3; 9\}$, les valeurs $n + 3 = 1$ et $n + 3 = 2$ ne convenant pas.

b) Déterminons n pour que A et B soient premiers entre eux.

On a $A = 2n + 18 = 2(n + 3) + 12 \Leftrightarrow A = 2B + 12 \Rightarrow$

$\text{PGCD}(A, B) = \text{PGCD}(B, 12) = \text{PGCD}(n + 3; 12)$; A et B sont premiers entre eux si et seulement si $n+3$ et 12 sont premiers entre eux $\Leftrightarrow$ $n+3$ est un entier naturel premier supérieur à 3.

4. a) Factorisons les polynômes A et B.

$A(x) = 10x^3 + 60x^2 + 110x + 60 = 10(x + 1)(x + 2)(x + 3)$;

$B(x) = 6x^2 + 18x + 12 = 6(x + 1)(x + 2)$

b) $x \in \mathbb{N}$, déterminons le PGCD et le PPCM de $A(x)$ et $B(x)$.

$\text{PGCD}(A(x), B(x)) = 2(x + 1)(x + 2)$ et

$\text{PPCM}(A(x), B(x)) = 60(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

Exercice 5:

1. a) Déterminons selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste dans la division euclidienne par 7 de 4^n.

$4^0 \equiv 1[7]$; $4 \equiv 4[7]$; $4^2 \equiv 2[7]$; $4^3 \equiv 1[7]$, la période est 3.

Si $n = 3k$, $r = 1$; si $n = 3k + 1$, $r = 4$; si $n = 3k + 2$, $r = 2$.

b) En déduisons que pour tout entier naturel $n \geq 1 : 95^{9n+2} - 53^{3n-1} \equiv 0[7]$.

$95 \equiv 4[7]$ et $53 \equiv 4[7] \Rightarrow 95^{9n+2} \equiv 4^{9n+2}[7]$ et $53^{3n-1} \equiv 4^{3n-1}[7]$.

$n \geq 1 \Rightarrow n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$

-Si $n = 3k + 1$, $4^{9n+2} = 4^{9(3k+1)+2}$ et $4^{3n-1} = 4^{3(3k+1)-1} = 4^{3(3k)+2} \Rightarrow$ $4^{9n+2} \equiv 2[7]$ et $4^{3n-1} \equiv 2[7]$, alors $4^{9n+2} - 4^{3n-1} \equiv 0[7] \Leftrightarrow$ $95^{9n+2} - 53^{3n-1} \equiv 0[7]$.

-Si $n = 3k + 2$, $4^{9n+2} = 4^{9(3k+2)+2}$ et $4^{3n-1} = 4^{3(3k+2)-1} = 4^{3(3k+1)+2} \Rightarrow$ $4^{9n+2} \equiv 2[7]$ et $4^{3n-1} \equiv 2[7]$, alors $4^{9n+2} - 4^{3n-1} \equiv 0[7] \Leftrightarrow$ $95^{9n+2} - 53^{3n-1} \equiv 0[7]$.

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 1 : 95^{9n+2} - 53^{3n-1} \equiv 0[7]$.

Scanné avec CamScanner

2. a) Démontrons par récurrence que, $\forall n \epsilon \mathbb{N}$, $5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49.

Soit $P(n)$: $5^{3n} - 3^{3n} \equiv 0[49]$

-Vérifions $P(0)$: $5^0 - 3^0 \equiv 0[49] \Leftrightarrow 0 \equiv 0[49]$ vraie ;

-Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire $5^{3n} - 3^{3n} \equiv 0[49]$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $5^{3n+3} - 3^{3n+3} \equiv 0[49]$.

$5^{3n+3} - 3^{3n+3} = 125 \times 5^{3n} - 27 \times 3^{3n} = (98 + 27) \times 5^{3n} - 27 \times 3^{3n} =$

$= 98 \times 5^{3n} + 27 \times 5^{3n} - 27 \times 3^{3n} = 2 \times 49 \times 5^{3n} + 27(5^{3n} - 3^{3n})$

$2 \times 49 \times 5^{3n} \equiv 0[49]$ et $27(5^{3n} - 3^{3n}) \equiv 0[49]$, alors $5^{3n+3} - 3^{3n+3} \equiv 0[49]$.

Donc si $5^{3n} - 3^{3n} \equiv 0[49]$, alors $5^{3n+3} - 3^{3n+3} \equiv 0[49]$

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 1$: $95^{9n+2} - 53^{3n-1} \equiv 0[7]$.

b) En déduisons que, si l'entier n n'est pas multiple de 3, alors $A = 5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49.

Si n n'est pas un multiple de 3, alors $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$.

- Si $n = 3k+1$, $A = 5^{2(3k+1)} + 15^{3k+1} + 3^{2(3k+1)}$

$= (5^{3k})^2 \times 25 + (3 \times 5)^{3k} \times 15 + (3^{3k})^2 \times 9$

On a $5^{3n} - 3^{3n} \equiv 0[49] \Leftrightarrow 5^{3k} \equiv 3^{3k}[49] \Rightarrow (5^{3k})^2 \times 25 \equiv (3^{3k})^2 \times 25[49]$

et $(3 \times 5)^{3k} \times 15 \equiv (3^{3k})^2 \times 15[49]$; alors

$A \equiv [(3^{3k})^2 \times 25 + (3^{3k})^2 \times 15 + (3^{3k})^2 \times 9][49] \Leftrightarrow A \equiv (3^{3k})^2(25 + 15 + 9)[49]$

$\Leftrightarrow A \equiv (3^{3k})^2(49)[49] \Leftrightarrow A \equiv 0[49]$. *(On pourrait avoir* $A \equiv (5^{3k})^2(49)[49]$ *)*

- Si $n = 3k+2$, $A = 5^{2(3k+2)} + 15^{3k+2} + 3^{2(3k+2)}$

$= (5^{3k})^2 \times 625 + (3 \times 5)^{3k} \times 225 + (3^{3k})^2 \times 81 \Rightarrow$

$A \equiv [(3^{3k})^2(625 + 225 + 81)][49] \Leftrightarrow A \equiv (3^{3k})^2(37 + 29 + 32)[49] \Leftrightarrow$

$A \equiv (3^{3k})^2(98)[49] \Leftrightarrow A \equiv (3^{3k})^2(2 \times 49)[49] \Leftrightarrow A \equiv 0[49]$.

Conclusion : *si* n n'est pas un multiple de 3, alors $A = 5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49.

3. a) Trouvons les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240.

$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \Rightarrow D(240) = \{2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma\}$ avec $\alpha \epsilon \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\beta \epsilon \{0, 1\}$ et $\gamma \epsilon \{0, 1\}$.

Il y a donc $5 \times 2 \times 2 = 20$ diviseurs dans $\mathbb{N}$ de 240.

Les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de 240 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 20 ; 24 ; 30 ; 40 ; 48 ; 60 ; 80 ; 120 ; 240.

	0	1	2	3	4
2^α	1	2	4	8	16
3^β	1	3			
5^γ	1	5			

b) Calculons l'entier naturel n tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait.

Posons $n^2 - 240 = p^2 \Leftrightarrow n^2 - p^2 = 240 \Leftrightarrow$

$(n-p)(n+p) = 240 \Rightarrow n-p$ et $n+p$ sont deux diviseurs de 240 de même parité.

On va résoudre alors les systèmes suivants :

$\begin{cases} n-p=2 \\ n+p=120 \end{cases}$; $\begin{cases} n-p=4 \\ n+p=60 \end{cases}$; $\begin{cases} n-p=6 \\ n+p=40 \end{cases}$; $\begin{cases} n-p=8 \\ n+p=30 \end{cases}$; $\begin{cases} n-p=10 \\ n+p=24 \end{cases}$; $\begin{cases} n-p=12 \\ n+p=20 \end{cases}$

On trouve $n \epsilon \{61 ; 32 ; 23 ; 19 ; 17 ; 16\}$.

4. a est la longueur et b la largeur du rectangle ; $a = 72$ et $\text{ppcm}(a,b) = 216$.

Déterminons les valeurs possibles de b. Soit $\text{pgcd}(a,b) = m$ et $\text{pgcd}(a,b) = \delta$

On a : $m \times \delta = ab \Leftrightarrow 216 \times \delta = 72b \Leftrightarrow 3\delta = b$; δ *divise* a et $a > b \Rightarrow$

les diviseurs de 72 étant 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 ; 72, les valeurs

Scanné avec CamScanner

possibles de b sont $3;6;9;12;18;24;27;36;54$.

5. a) Trouvons le reste de la division euclidienne de 111 par 7 et de 10^n par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n.

$111 = 15\times 7+6 \Rightarrow 111 \equiv 6[7] \Rightarrow r = 6$

$10^0 \equiv 1[7]$; $10 \equiv 3[7]$; $10^2 \equiv 2[7]$; $10^3 \equiv 1[7]$;

Si $n = 3k$, $r = 1$; si $n = 3k+1$, $r = 2$; si $n = 3k+2$, $r = 2$.

b) N = 999 888 777 666 555 444 333 222 111.

- Montrons que N peut s'écrire en fonction de 111.

$N = 111 + 2\times 111\times 10^3 + 3\times 111\times 10^6 + 4\times 111\times 10^9 + 5\times 111\times 10^{12} + 6\times 111\times 10^{15} +$
$+ 7\times 111\times 10^{18} + 8\times 111\times 10^{21} + 9\times 111\times 10^{24} =$
$= 111(1 + 2\times 10^3 + 3\times 10^6 + 4\times 10^9 + 5\times 10^{12} + 6\times 10^{15} + 7\times 10^{18} + 8\times 10^{21} + 9\times 10^{24})$

$N = 111\times N'$, avec N′ polynôme à puissances croissantes de 10.

-Déterminons le reste de la division euclidienne de N par 7.

$10^{3k} \equiv 1[7] \Rightarrow N' \equiv (1+2+3+4+5+6+7+8+9)[7] \equiv 45[7]$ et $111 \equiv 6[7] \Rightarrow$
$N \equiv 6\times 45[7] \Leftrightarrow N \equiv 6\times 3[7] \Leftrightarrow \boxed{N \equiv 4[7]} \Rightarrow$ le reste de la division euclidienne par 7 de N est 4.

Exercice 6:

1. a) Etudions, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 5 de 12^n.

$12^0 \equiv 1[5]$; $12 \equiv 2[5]$; $12^2 \equiv 4[5]$; $12^3 \equiv 3[5]$; $12^4 \equiv 1[5] \Rightarrow$ la période est 4.

Si $n = 4k$, $r = 1$; Si $n = 4k+1$, $r = 2$; Si $n = 4k+2$, $r = 4$; Si $n = 4k+3$, $r = 3$.

b) En déduisons le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier $N = \overline{4\beta 32\alpha 5}^{12}$.

$N = 4\times 12^5 + 11\times 12^4 + 3\times 12^3 + 2\times 12^2 + 10\times 12 + 5 \Rightarrow$

$N \equiv (4\times 2 + 11\times 1 + 3\times 3 + 2\times 4 + 10\times 2 + 5)[5] \Leftrightarrow N \equiv (3+1+4+3)[5] \Leftrightarrow$

$\boxed{N \equiv 1[5]} \Rightarrow$ le reste de la division euclidienne par 5 de N est 1.

2. Dans $\mathbb{Z}$: $x^3 + 2x^2 - x - 13 \equiv 0\ [11]$. (1)

a) Montrons qu'il existe deux nombres entiers relatifs α et β tels que :

$x^3 + 2x^2 - x - 13 = (x+1)(x^2 + \alpha x + \beta) - 11$.

$x^3 + 2x^2 - x - 13 = x^3 + 2x^2 - x - 2 - 11$; -1 est une racine de $x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+1)(x^2 + x - 2) \Rightarrow$

$x^3 + 2x^2 - x - 13 = (x+1)(x^2 + x - 2) - 11$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = -2$.

b) En déduisons que les solutions de (1) sont solutions de l'une des deux équations :

$x + 1 \equiv 0\ [11]$ ou $x^2 + x - 2 \equiv 0\ [11]$.

$x^3 + 2x^2 - x - 13 \equiv 0\ [11] \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x - 2) - 11 \equiv 0\ [11] \Leftrightarrow$

$(x+1)(x^2 + x - 2) \equiv 0\ [11]$; 11 est un nombre premier donc l'anneau $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ est intègre, alors $(x+1)(x^2 + x - 2) = \dot{0} \Leftrightarrow x + 1 = \dot{0}$ ou $x^2 + x - 2 = \dot{0} \Leftrightarrow$

$x + 1 \equiv 0\ [11]$ ou $x^2 + x - 2 \equiv 0\ [11]$.

c) Déterminons les solutions de (1).

$x + 1 \equiv 0\ [11] \Leftrightarrow x \equiv 10[11] \Leftrightarrow x = 11k + 10$;

$x^2 + x - 2 \equiv 0[11] \Leftrightarrow (x-1)(x+2) \equiv 0[11] \Leftrightarrow x \equiv 1[11]$ ou $x \equiv 9[11] \Leftrightarrow$

$x = 11k + 1$ ou $x = 11k + 9$;

L'ensemble solution de (1) est $\boxed{S = \{11k+1\ ;\ 11k+9\ ;\ 11k+10\},\ k\epsilon\mathbb{Z}.}$

Scanné avec CamScanner

3. $A = 10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} + 1, n \epsilon \mathbb{N}$; $10^3 - 1 = 9 \times 111$ et $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$.

a) Déterminons le reste de la division euclidienne de A par 111.

$10^3 - 1 = 9 \times 111 \Leftrightarrow 10^3 - 1 \equiv 0[111] \Leftrightarrow 10^3 \equiv 1[111]$;

$A = (10^3)^{3n} + 2 \times (10^3)^{2n} + 2 \times (10^3)^n + 1 \Rightarrow A \equiv (1 + 2 + 2 + 1)[111] \Leftrightarrow$

$A \equiv 6[111]$; le reste de la division euclidienne de A par 111 est 6.

b) n impair ; montrons que A est divisible par 7, par 11, par 13.

On a $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13 \Leftrightarrow 10^3 + 1 \equiv 0[7 \times 11 \times 13] \Leftrightarrow 10^3 \equiv -1[7 \times 11 \times 13]$.

Posons $n = 2p + 1$, $p \epsilon \mathbb{N} \Rightarrow A = (10^3)^{6p+3} + 2 \times (10^3)^{4p+2} + 2 \times (10^3)^{2p+1} + 1 \Rightarrow$

$A \equiv [(-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1)^1 + 1][7 \times 11 \times 13] \Leftrightarrow$

$A \equiv (-1 + 2 - 2 + 1)[7 \times 11 \times 13] \Leftrightarrow A \equiv 0[7 \times 11 \times 13] \Rightarrow$ A est divisible par 7, par 11 et par 13.

c) n pair. Posons $n = 2p$, $p \epsilon \mathbb{N}$.

-Démontrons que $A - 6$ est divisible par 11, par 7 et par 13.

$A - 6 = (10^3)^{6p} + 2 \times (10^3)^{4p} + 2 \times (10^3)^{2p} - 5$

$A - 6 \equiv (1 + 2 + 2 - 5)[7 \times 11 \times 13] \Leftrightarrow A - 6 \equiv 0[7 \times 11 \times 13]$; $A \equiv 6[111]$

$\Leftrightarrow A - 6 \equiv 0\,[111]$; alors A est divisible par 7, par 11, 13 et par 111.

-Déterminons le reste de la division euclidienne de A par 111×1001?

On a $A - 6 \equiv 0[7 \times 11 \times 13 \times 111] \Leftrightarrow A \equiv 6[7 \times 11 \times 13 \times 111]$ et

$7 \times 11 \times 13 = 1001 \Rightarrow A \equiv 6[1001 \times 111] \Rightarrow$ le reste de la division euclidienne de A par 111×1001 est 6.

4. a) Déterminons les restes de la division euclidienne par 5 de 2^n et 3^n.

$2^0 \equiv 1[5]$; $2 \equiv 2[5]$; $2^2 \equiv 4[5]$; $2^3 \equiv 3[5]$; $2^4 \equiv 1[5] \Rightarrow$ la période est 4 :

si $n = 4k$, $r = 1$; si $n = 4k + 1$, $r = 2$; si $n = 4k + 2$, $r = 4$; si $n = 4k + 3$, $r = 3$.

$3^0 \equiv 1[5]$; $3 \equiv 3[5]$; $3^2 \equiv 4[5]$; $3^3 \equiv 2[5]$; $3^4 \equiv 1[5] \Rightarrow$ la période est 4 :

si $n = 4k$, $r = 1$; $n = 4k + 1$, $r = 3$ si $n = 4k + 2$, $r = 4$; si $n = 4k + 3$, $r = 2$

b) En déduisons l'entier n tel que $(1188)^n + (2257)^n \equiv 0\,[5]$.

$1188 = 237 \times 5 + 3 \Rightarrow 1188 \equiv 3[5]$; $2257 = 451 \times 5 + 2 \Rightarrow 2257 \equiv 2[5]$

$(1188)^n + (2257)^n \equiv (3^n + 2^n)[5]$; $(1188)^n + (2257)^n \equiv 0[5] \Leftrightarrow 3^n + 2^n \equiv 0[5]$.

- Si $n = 4k$, $3^n \equiv 1[5]$ et $2^n \equiv 1[5] \Rightarrow 3^n + 2^n \equiv 2[5]$
- Si $n = 4k + 1$, $3^n \equiv 3[5]$ et $2^n \equiv 2[5] \Rightarrow 3^n + 2^n \equiv 0[5]$
- Si $n = 4k + 2$, $3^n \equiv 4[5]$ et $2^n \equiv 4[5] \Rightarrow 3^n + 2^n \equiv 3[5]$
- Si $n = 4k + 3$, $3^n \equiv 2[5]$ et $2^n \equiv 3[5] \Rightarrow 3^n + 2^n \equiv 0[5]$; alors

$(1188)^n + (2257)^n \equiv 0\,[5] \Leftrightarrow \boxed{n = 4k + 1 \text{ ou } n = 4k + 3,\ k \epsilon \mathbb{Z}.}$

5. Déterminons selon les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $n^2 + 5n + 9$ par $n + 2$.

$n^2 + 5n + 9 = (n + 2)(n + 3) + 3$; ceci est une division euclidienne si $n + 2 > 3 \Leftrightarrow$ $n > 1$. Le reste de la division euclidienne de $n^2 + 5n + 9$ par $n + 2$ est 3, avec n un entier naturel supérieur à 1.

6. Déterminons les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ est un entier relatif.

$\frac{3n+8}{n+4} = 3 - \frac{4}{n+4}$ est un entier relatif si et seulement si $n + 4$ est un diviseur de 4.

$n + 4 = 1 \Leftrightarrow n = -3$; $n + 4 = 2 \Leftrightarrow n = -2$; $n + 4 = 4 \Leftrightarrow n = 0$

Scanné avec CamScanner

$\frac{3n+8}{n+4}$ est un entier relatif si $\boxed{n \in \{-3;-2;0\}.}$

Exercice 7:

1. Démontrons que pour tout entier naturel n :

a) $n^2(n+1)^2$ est divisible par 4.

- Si n est pair : $n = 2k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2(n+1)^2 = (2k)^2(2k+1)^2 = 4k^2(2k+1)^2$ est divisible par 4.
- Si n est impair : $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2(n+1)^2 = (2k+1)^2(2k+1+1)^2 =$
$= (2k+1)^2(2k+2)^2 = 2^2(k+1)^2(2k+1)^2 = 4(k+1)^2(2k+1)^2$ est divisible par 4.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2(n+1)^2 \equiv 0[4]$.

b) $n^2(n^2-1)$ est divisible par 12.

Faisons le tableau de congruences.

n	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{8}$	$\dot{9}$	$\dot{10}$	$\dot{11}$
n^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{9}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{9}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
n^2-1	$\dot{11}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{8}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{11}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{8}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$
$n^2(n^2-1)$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$

On constate que, $\forall n \in \mathbb{N}, n^2(n^2-\dot{1}) = \dot{0} \Leftrightarrow n^2(n^2-1) \equiv 0[12] \Leftrightarrow n^2(n^2-1)$ est divisible par 12, $\forall n \in \mathbb{N}$. On pourrait montrer que $n^2(n^2-1)$ est divisible par 3 et 4.

c) $(5n+3)^2-(2n-3)^2$ est divisible par 21.

On a : $(5n+3)^2-(2n-3)^2 = (5n+3-2n+3)(5n+3)(2n-3) = (3n+6)7n =$
$= 3 \times (n+2) \times 7n = 21n(n+2) \equiv 0[21]$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $(5n+3)^2-(2n-3)^2$ est divisible par 21.

d) $3^{2n+3}+2^{n+3}$ est divisible par 7.

On a $3^2 \equiv 2[7]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n} \equiv 2^n[7]$.

$3^{2n+3}+2^{n+3} = 3^{2n} \times 3^3 + 2^n \times 2^3 = 3^{2n} \times 27 + 2^n \times 8$

$3^{2n+3}+2^{n+3} \equiv 2^n(27+8)[7] \equiv 2^n \times 35[7] \equiv 0[7] \Leftrightarrow 3^{2n+3}+2^{n+3}$ est divisible par 7.

2. Déterminons l'ensemble des entiers relatifs x tels que :

a) x^2+x-2 soit divisible par 7 ;

x^2+x-2 est divisible par 7 $\Leftrightarrow x^2+x-2 \equiv 0[7] \Leftrightarrow$.

$(x-1)(x+2) \equiv 0[7]$; 7 est premier, donc l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est intègre ; alors on a

$x-1 \equiv 0[7]$ ou $x+2 \equiv 0[7] \Leftrightarrow x \equiv 1[7]$ ou $x \equiv -2[7] \Leftrightarrow x \equiv 5[7]$.

$x = 7k+1$ ou $x = 7k+5$ $k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{S = \{7k+1\ ;\ 7k+5\}, k \in \mathbb{Z}.}$

b) x^2+x-2 soit divisible par 3 ;

x^2+x-2 divisible par 3 $\Leftrightarrow x^2+x-2 \equiv 0[3]$; 3 est premier donc

$x^2+x-2 \equiv 0[3] \Leftrightarrow (x-1)(x+2) \equiv 0[3] \Leftrightarrow x \equiv 1[3] \Leftrightarrow x = 3k+1, k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{S = \{3k+1\}, k \in \mathbb{Z}.}$

c) x^2+x-2 soit divisible par 42.

$$x^2+x-2 \equiv 0[42] \Rightarrow x^2+x-2 \equiv 0[21] \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-2 \equiv 0[7] \\ x^2+x-2 \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \equiv 1[7] \text{ ou } x = 5[7] \\ x \equiv 1[3] \end{cases} \Leftrightarrow (1) \begin{cases} x = 7p+1 \\ x = 3q+1 \end{cases} \text{ ou } (2) \begin{cases} x = 7p+5 \\ x = 3q+1 \end{cases}, (p,q) \in \mathbb{Z}^2.$$

(1) donne $7p+1 = 3q+1 \Leftrightarrow 7p = 3q \Rightarrow p = 3k$ et $q = 7k \Rightarrow x \equiv 21k+1$,

(2) donne $7p+5 = 3q+1 \Leftrightarrow 7p-3q = -4$; une solution particulière est $(-1,-1)$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \begin{cases} 7p-3q=-4 \\ 7(-1)-3(-1)=-4 \end{cases} \Rightarrow 7(p+1)=3(q+1)\,;\,7\wedge 3=1$ et 3 divise $7(p+1)$ alors 3 divise $p+1 \Rightarrow p+1=3k \Leftrightarrow p=3k-1 \Rightarrow x=7(3k-1)+5 \Leftrightarrow x=21k-2$; $\boxed{S=\{21k+1\,;\,21k-2\},k\in\mathbb{Z}.}$

d) $(x-3)$ divise $(2x+1)$.

$\frac{2x+1}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}$; $(x-3)$ divise $(2x+1) \Leftrightarrow (x-3)$ est un diviseur de 7 ; 7 étant un nombre premier on a $x-3=1$, $x-3=7$, $x-3=-1$ ou $x-3=-7 \Leftrightarrow x=4$, $x=10$, $x=2$ ou $x=-4$; $\boxed{S=\{-4\,;\,2\,;4\,;10\}.}$

3. Trouvons l'ensemble des entiers naturels n tels que :

a) $3n+24$ soit divisible par $n-4$;

$\frac{3n+24}{n-4}=3+\frac{12}{n-4}$; $3n+24$ est divisible par $n-4 \Leftrightarrow n-4$ est un diviseur de 12.

Les diviseurs de 12 étant 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12 avec $n\in\mathbb{N}$, on a : $n-4=1 \Rightarrow n=5$

$n-4=1 \Rightarrow n=5$; $n-4=2 \Rightarrow n=6$; $n-4=3 \Rightarrow n=7$

$n-4=4 \Rightarrow n=8$; $n-4=6 \Rightarrow n=10$; $n-4=12 \Rightarrow n=16$.

$\boxed{S=\{5\,;\,6\,;7;8\,;10\,;16\}}$

b) (n^2-3n+6) soit divisible par 5 ;

$n^2-3n+6\equiv 0[5] \Leftrightarrow n^2-3n+\dot{6}=\dot{0} \Leftrightarrow n^2+\dot{2}n+\dot{1}=\dot{0} \Leftrightarrow (n+\dot{1})^2=\dot{0} \Leftrightarrow n+\dot{1}=\dot{0} \Leftrightarrow n=-\dot{1} \Leftrightarrow n=\dot{4} \Leftrightarrow n=5k+4$. $\boxed{S=\{5k+4\},k\in\mathbb{Z}.}$

c) $n+1$ divise n^2-n+3 ;

$\frac{n^2-n+3}{n+1}=n-2+\frac{5}{n+1}$; $n+1$ divise $n^2-n+3 \Leftrightarrow n+1$ est un diviseur de $5 \Rightarrow n\in\{0;4\}$ $\boxed{S=\{0;4\}.}$

n	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$n^6-\dot{1}$	$\dot{6}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$n(n^6-\dot{1})$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$

d) n^7-n est un multiple de 7.

$n^7-n\equiv 0[7] \Leftrightarrow n(n^6-1)\equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow n(n^6-\dot{1})=\dot{0}$. D'après le tableau de congruences, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n(n^6-\dot{1})=\dot{0}$

$\Leftrightarrow n(n^6-1)\equiv 0[7] \Leftrightarrow n^7-n$ est un multiple de 7.

4. Démontrons que pour tous entiers relatifs x et y, $xy(x^2-y^2)$ est divisible par 2.

- Si l'un des deux entiers naturels x ou y est pair et l'autre impair alors xy est pair $\Leftrightarrow xy\equiv 0[2] \Leftrightarrow xy(x^2-y^2)\equiv 0[2]$.
- Si les deux entiers x et y sont pairs, alors $xy\equiv 0[2] \Leftrightarrow xy(x^2-y^2)\equiv 0[2]$.
- Si les deux entiers soit impairs alors xy n'est pas divisible par 2. On a : $x=2k+1$ et $y=2k'+1 \Rightarrow x^2-y^2=(2k+1)^2-(2k'+1)=(4k^2+4k+1)-(4k'^2+4k'+1)=4k^2+4k-4k'^2-4k'=4(k^2+k-k'^2-k')$.

$4(k^2+k-k'^2-k')\equiv 0[2]$, alors $xy(x^2-y^2)\equiv 0[2]$.

Conclusion : $\forall (x,y)\in\mathbb{Z}$, $xy(x^2-y^2)\equiv 0[2]$.

5. Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$:

a) $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6 ;

$P(n)$: $n(2n+1)(7n+1)\equiv 0[6]$

- Vérifions $P(0)$: $0(1)(1)\equiv 0[6]$, $P(0)$ vraie.
- Montrons que si $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $n(2n+1)(7n+1)\equiv 0[6]$, alors

Scanné avec CamScanner

$P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $(n+1)(2n+3)(7n+8) \equiv 0[6]$.

$n(2n+1)(7n+1) = 14n^3 + 9n^2 + n$

$(n+1)(2n+3)(7n+8) = 14n^3 + 51n^2 + 61n + 24$

$= 14n^3 + 9n^2 + n + 42n^2 + 60n + 24$

$= 14n^3 + 9n^2 + n + 6(7n^2 + 10n + 4)$

$P(n)$ vraie $\Leftrightarrow$ $14n^3 + 9n^2 + n \equiv 0[6]$ et $6(7n^2 + 10n + 4) \equiv 0[6]$, alors $(n+1)(2n+3)(7n+8)$ est divisible par 6 $\Leftrightarrow$ $P(n+1)$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(2n+1)(7n+1) \equiv 0[6]$.

b) $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

On a : $4^n + \dot{15}n - \dot{1} = \dot{0} \Leftrightarrow 4^n = -\dot{15}n + \dot{1} \Leftrightarrow 4^n = \dot{3}n + \dot{1}$

$P(n)$: $4^n = \dot{3}n + \dot{1}$;

- Vérifions $P(0)$: $4^0 = \dot{3} \times \dot{0} + 1 \Leftrightarrow \dot{1} = \dot{1}$ $P(0)$ est vraie.
- Supposons $P(n)$ vraie $\Leftrightarrow$ $4^n = \dot{3}n + 1$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie :

$\Leftrightarrow$ $4^{n+1} = \dot{3}(n+1) + 1$.

$4^{n+1} = 4 \times 4^n = \dot{4} \times (\dot{3}n + 1) = \dot{12}n + \dot{4} = \dot{3}n + \dot{3} + \dot{1} = \dot{3}(n+1) + 1 \Leftrightarrow P(n+1)$ vraie, alors si $P(n)$ est vraie, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 15n - \dot{1} = \dot{0} \Leftrightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 0[9]$.

Remarque : Deux autres méthodes permettent de démontrer cette propriété : les restes de la division euclidienne par 9 de 4^n ou le tableau de congruences modulo 9.

c) $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111.

-Vérifions $P(0)$: $10^2 + 10 + 1 \equiv 0[111] \Leftrightarrow 111 \equiv 0[111]$. $P(0)$ vraie.

- Supposons $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1 \equiv 0[111]$ et montrons que

$10^{9n+11} + 10^{6n+7} + 1 \equiv 0[111]$.

$10^{9n+11} + 10^{6n+7} + 1 = 10^{9n+2} \times 10^9 + 10^{6n+1} \times 10^6 + 1$

$10^3 \equiv 1[111] \Rightarrow 10^6 \equiv 1[111]$ et $10^9 \equiv 1[111] \Rightarrow$

$10^{9n+2} \times 10^9 + 10^{6n+1} \times 10^6 + 1 \equiv 10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1 \equiv 0[111]$.

D'où si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1 \equiv 0[111]$.

d) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

- Vérifions $P(0)$: $3 + 2^2 = 7 \equiv 0[7]$. $P(0)$ est vraie
- Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ vraie

$P(n)$: $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0[7]$ vraie.

$P(n+1)$: $3^{2n+3} + 2^{n+3} = 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2 = (7+2) \times 3^{2n+1} + 2^{n+3} \times 2$

$= 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 7 \times 3^{2n+1} + 2(3^{2n+1} + 2^{n+2})$

$7 \times 3^{2n+1} \equiv 0[7]$ et $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0[7]$ alors $7 \times 3^{2n+1} + 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) \equiv 0[7]$.

D'où si $P(n)$ vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0[7]$.

e) $2 \times 6 \times \ldots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \times \ldots \times 2n$: $P(n)$ $n \neq 0$.

- Vérifions $P(1)$: $2 = 2$ vraie $P(0)$ est vraie.
- Supposons la propriété vraie au rang n c'est-à-dire

$2 \times 6 \times 10 \times \cdots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \times \ldots \times 2n$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire,

Scanné avec CamScanner

$2 \times 6 \times 10 \times \cdots \times (4n-2)(4n+2) = (n+2)(n+3) \times \ldots \times 2(n+1)$.
$2 \times 6 \times 10 \times \cdots \times (4n-2)(4n+2) = (n+1)(n+2) \times \ldots \times 2n(4n+2) =$
$= (n+1)(n+2) \times \ldots \times 2n(2n+1) \times 2$
$= (n+1)(n+2) \times \ldots \times 2n(2n+1) \times 2(n+1) = (n+2)(n+3) \times \ldots \times 2(n+1)$.
D'où $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \times 6 \times 10 \times \cdots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \times \ldots \times 2n$.

Exercice 8:

1. a) Démontrons que, $\forall n\mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}$ est divisible par 11.
Par récurrence : $P(n): 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv 0[11]$
- Vérifions $P(0)$: $3 + 2 \times 4 \equiv 0[11] \iff 11 \equiv 0[11]$ vraie.
- Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$ vraie.
$3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv 0[11]$ vraie $\Rightarrow$
$3^{2n+3} + 2 \times 4^{3n+4} = 3^{2n+1} \times 9 + 2 \times 4^{3n+1} \times 4^3 = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \times 64$
$= 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \times (55+9) = 9(3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}) + 2 \times 55 \times 4^{3n+1}$
$9(3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}) \equiv 0[11]$ et $2 \times 55 \times 4^{3n+1} \equiv 0[11]$, alors
$3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv 0[11]$. D'où si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv 0[11]$.

b) Déterminons l'ensemble des rationnels a tels que $3^{2n+1} + a \times 4^{3n+1}$ soit divisible par 11, $\forall n \in \mathbb{N}$.
$3^0 \equiv 1[11]$; $3 \equiv 3[11]$; $3^2 \equiv 9[11]$; $3^3 \equiv 5[11]$; $3^4 \equiv 4[11]$; $3^5 \equiv 1[11]$;
La période est 5.
$4^0 \equiv 1[11]$; $4 \equiv 4[11]$; $4^2 \equiv 5[11]$; $4^3 \equiv 9[11]$; $4^4 \equiv 3[11]$; $4^5 \equiv 1[11]$;
$3^{2n} \equiv 4^{3n}[11]$; $3^{2n+1} \equiv 4^{3n} \times 3[11]$; $3^{2n+1} \equiv 4^{3n} \times 4^4[11]$; $3^{2n+1} \equiv 4^{3n+1} \times 4^3[11]$;
$3^{2n+1} + a \times 4^{3n+1} \equiv 0[11] \iff (3^{2n+1} \equiv -a \times 4^{3n+1}[11] \iff$
$3^{2n+1} \equiv 4^3 \times 4^{3n+1}[11]$
$-a \equiv 4^3[11] \iff a \equiv -4^3[11] \iff a \equiv -64[11] \Rightarrow a \equiv 2[11]$; $\boxed{a = 11k+2, k \in \mathbb{Z}}$.

2. Etudions les restes successifs de la division euclidienne par 9 de 2^n.
$2^0 \equiv 1[9]$; $2 \equiv 2[9]$; $2^2 \equiv 4[9]$; $2^3 \equiv 8[9]$; $2^4 \equiv 7[9]$; $2^5 \equiv 5[9]$; $2^6 \equiv 1[9]$.
La période est 6 :
$2^{6k} \equiv 1[9]$; $2^{6k+1} \equiv 2[9]$; $2^{6k+2} \equiv 4[9]$; $2^{6k+3} \equiv 8[9]$; $2^{6k+4} \equiv 7[9]$; $2^{6k+5} \equiv 5[9]$;
- Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{2n}(2^{2n+1}-1) - 1$ est divisible par 9.
• Si $n = 6k$, $2^{2n}(2^{2n+1}-1) - 1 = (2^{6k})^2(2 \times (2^{6k})^2 - 1) - 1 \equiv 1(2-1) - 1[9] \equiv 0[9]$.
• Si $n = 6k+1$, $2^{2n}(2^{2n+1}-1) - 1 = (2^{6k+1})^2(2 \times (2^{6k+1})^2 - 1) - 1$
$\equiv 2^2(2 \times 2^2 - 1) - 1[9] \equiv 4(7) - 1[9] \equiv 27[9] \equiv 0[9]$.
• Si $n = 6k+2$, $2^{2n}(2^{2n+1}-1) - 1 = (2^{6k+2})^2(2 \times (2^{6k+2})^2 - 1) - 1$
$\equiv 4^2(2 \times 4^2 - 1) - 1[9] \equiv (16 \times 31) - 1[9] \equiv ((7 \times 4) - 1)[9] \equiv 28 - 1[9] \equiv 0[9]$.
• Si $n = 6k+3$, $2^{2n}(2^{2n+1}-1) - 1 = (2^{6k+3})^2(2 \times (2^{6k+3})^2 - 1) - 1$
$\equiv 8^2(2 \times 8^2 - 1) - 1[9] \equiv 7(2 \times 7 - 1) - 1[9] \equiv 7 \times 4 - 1[9] \equiv 27[9] \equiv 0[9]$.
• Si $n = 6k+4$, $2^{2n}(2^{2n+1}-1) - 1 = (2^{6k+4})^2(2 \times (2^{6k+4})^2 - 1) - 1$
$\equiv 7^2(2 \times 7^2 - 1) - 1[9] \equiv 4(2 \times 4 - 1) - 1[9] = 28 - 1[9] \equiv 27[9] \equiv 0[9]$.
• Si $n = 6k+5$, $2^{2n}(2^{2n+1}-1) - 1 = (2^{6k+5})^2(2 \times (2^{6k+5})^2 - 1) - 1$
$\equiv 5^2(2 \times 5^2 - 1) - 1[9] \equiv 7(2 \times 7 - 1) - 1[9] \equiv 7 \times 4 - 1[9] \equiv 0[9]$.

Scanné avec CamScanner

Alors, $\forall n\in\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de $2^{2n}(2^{2n+1}-1)-1$ par 9 est 0 ; donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $2^{2n}(2^{2n+1}-1)-1$ est divisible par 9.

3. $900 = 14n + r$. Déterminons les valeurs possibles de n et r

On a : $0 \le r < n$ et $n > 14$, d'où :

$900 = 14\times 64 + 4 \Rightarrow n = 64$ et $r = 4$

$= 14\times 63 + 18 \Rightarrow n = 63$ et $r = 18$

$= 14\times 62 + 32 \Rightarrow n = 62$ et $r = 32$

$= 14\times 61 + 42 \Rightarrow n = 61$ et $r = 42$

les valeurs possibles du couple $(n;r)$ sont : $(64;4)$, $(63;18)$, $(62;32)$, $(61;42)$.

4. a) Etudions, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.

$7^0 \equiv 1[10]$; $7 \equiv 7[10]$; $7^2 \equiv 9[10]$; $7^3 \equiv 3[10]$; $7^4 \equiv 1[10]$.

Si $n = 4k$, $r = 1$; si $n = 4k+1$, $r = 7$; si $n = 4k+2$, $r = 9$; si $n = 4k+3$, $r = 3$.

b) Déterminons le chiffre des unités de l'entier $A(n) = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$.

-Si $n = 4k$, $A(n) \equiv 1[10] \Rightarrow$ le chiffre des unités de $A(n)$ est 1.

-Si $n = 4k+1$, $A(n) \equiv (1+7)[10] \equiv 8[10] \Rightarrow$ le chiffre des unités de $A(n)$ est 8.

-Si $n = 4k+2$, $A(n) \equiv (1+7+9)[10] \equiv 7[10] \Rightarrow$ le chiffre des unités de $A(n)$ est 7.

-Si $n = 4k+3$, $A(n) \equiv (1+7+9+3)[10] \equiv 0[10] \Rightarrow$ le chiffre des unités de $A(n)$ est 0

5. Démontrons que pour tout entier naturel n

a) $n^2(n^4-1)$ est divisible par 60 ;

$n^2(n^4-1) \equiv 0[60] \Leftrightarrow n^2(n^4-1) \equiv 0[12]$ et $n^2(n^4-1) \equiv 0[5]$ car $60 = 12\times 5$.

$n^2(n^4-1) = n^2(n^2-1)(n^2+1)$ et on a montré que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n^2(n^2-1) \equiv 0[12]$ (Ex. 7), alors $n^2(n^2-1) \equiv 0[12]$; montrons que $n^2(n^4-1) \equiv 0[5]$.

D'après le tableau de congruence modulo 5,

n	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
n^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
$n^4-\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$n^2(n^4-\dot{1})$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n^2(n^4-1) \equiv 0[5]$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n^2(n^4-1) \equiv 0[60]$.

b) $n(n^6-1)$ est divisible par 42 ;

$n(n^6-1) \equiv 0[42] \Leftrightarrow n(n^6-1) \equiv 0[7]$ et $n(n^6-1) \equiv 0[6]$ car $7\times 6 = 42$. On a montré que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n(n^6-1) \equiv 0[7]$ (Ex. 7)

Montrons que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n(n^6-1) \equiv 0[6]$.

D'après le tableau de congruence modulo 6

n	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$n^6-\dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$
$n(n^6-\dot{1})$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n(n^6-1) \equiv 0[6]$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n(n^6-1) \equiv 0[42]$.

Exercice 9:

1. Résolvons :

a) Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $x^2 - \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$;

$x^2 - \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0} \Leftrightarrow x^2 + \dot{4}x + \dot{3} = \dot{0} \Leftrightarrow (x+\dot{1})(x+\dot{3}) = \dot{0}$; 6 n'étant pas premier, les diviseurs de $\dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont $\dot{2}$ et $\dot{3}$. On a : $\dot{2}\times\dot{3} = \dot{0}$

$x+\dot{1} = \dot{0}$ ou $x+\dot{3} = \dot{0}$ (1)

$x+\dot{1} = \dot{2}$ ou $x+\dot{3} = \dot{3}$ (2)

$x+\dot{1} = \dot{3}$ ou $x+\dot{3} = \dot{2}$ (3)

(1) donne $x = \dot{5}$ ou $x = \dot{3}$

(2) et (3) ne donnent rien $(x+\dot{1}) - (x+\dot{3}) \neq \dot{4}$.

$S = \{\dot{3}; \dot{5}\}$.

Scanné avec CamScanner

Remarque : on pourrait utiliser le tableau de congruences modulo 6.

b) Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $x^2 + \overline{17}x - \dot{4} = \dot{0}$.

$x^2 + \overline{17}x - \dot{4} = \dot{0} \Leftrightarrow x^2 + \dot{3}x - \dot{4} = \dot{0} \Leftrightarrow (x - \dot{1})(x + \dot{4}) = \dot{0}$;; 7 est premier $\Rightarrow$ $x - \dot{1} = \dot{0}$ ou $x + \dot{4} = \dot{0} \Leftrightarrow x = \dot{1}$ ou $x = \dot{3}$; $\boxed{S = \{\dot{1}\,;\,\dot{3}\}}$

On pourrait également utiliser le tableau de congruences modulo 7.

c) Dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$: $x^2 - \dot{4}x + \dot{1}\dot{1} = \dot{0}$.

$x^2 - \dot{4}x + \dot{1}\dot{1} = \dot{0} \Leftrightarrow x^2 + \dot{4}x + \dot{3} = \dot{0} \Leftrightarrow (x + \dot{1})(x + \dot{3}) = \dot{0}$; 8 n'est pas premier $\Rightarrow$ les diviseurs de $\dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont $\dot{2}, \dot{4}, \dot{6}$; on a $\dot{2} \times \dot{4} = \dot{0}$ et $\dot{4} \times \dot{6} = \dot{0}$.

On va résoudre les équations suivantes :

$x + \dot{1} = \dot{0}$ ou $x + \dot{3} = \dot{0}$ (1) ; $x + \dot{1} = \dot{2}$ ou $x + \dot{3} = \dot{4}$ (2) ; $x + \dot{1} = \dot{4}$ ou $x + \dot{3} = \dot{2}$ (3)

$x + \dot{1} = \dot{4}$ ou $x + \dot{3} = \dot{6}$ (4) ; $x + \dot{1} = \dot{6}$ ou $x + \dot{3} = \dot{4}$ (5) :

(1) donne $x = \dot{7}$ ou $x = \dot{5}$; (2) donne $x = \dot{1}$; (4) donne $x = \dot{3}$; (3) et (5) ne donnent rien $\Rightarrow$ $\boxed{S = \{\dot{1}\,;\dot{3}\,;\dot{5}\,;\dot{7}\}}$

2. Résolvons : a) Dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$: $\begin{cases} \dot{2}x + \dot{4}y = \dot{2} \\ x - \dot{3}y = \dot{3} \end{cases}$.

$\begin{cases} \dot{2}x + \dot{4}y = \dot{2} & (1) \\ x - \dot{3}y = \dot{3} & (2) \end{cases}$; résolvons par substitution ; (2) donne $x = \dot{3}y + \dot{3}$; (1) devient

$\dot{2}(\dot{3}y + \dot{3}) + \dot{4}y = \dot{2} \Leftrightarrow \dot{4}y = \dot{2}$

y	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{4}y$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$

D'après le tableau de congruences on a :

$\dot{4}y = \dot{2} \Leftrightarrow y = \dot{2}$ ou $y = \dot{5}$.

Pour $y = \dot{2}$, $x = \dot{3} \times \dot{2} + \dot{3} = \dot{3}$; pour $y = \dot{5}$, $x = \dot{3} \times \dot{5} + \dot{3} = \dot{0}$: $\boxed{S = \{(\dot{3}\,;\dot{2})\,,(\dot{0}\,;\dot{5})\}}$.

b) Dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$: $\begin{cases} x - \dot{2}y + z = \dot{0} & (1) \\ x + \dot{2}y - \dot{2}z = \dot{1} & (2) \end{cases}$;

(1) + (2) donne $\dot{2}x - z = \dot{1} \Leftrightarrow \dot{2}x = z + \dot{1} \Leftrightarrow x = \dot{3}z + \dot{3}$

(1) − (2) donne $-\dot{4}y + 3z = -\dot{1} \Leftrightarrow y = -\dot{3}z - \dot{1} \Leftrightarrow y = \dot{2}z + \dot{4}$

$\boxed{S = \{(\dot{3},\dot{4},\dot{0})\,,(\dot{1},\dot{1},\dot{1})\,,(\dot{4},\dot{3},\dot{2})\,,(\dot{2},\dot{0},\dot{3})\,,(\dot{0},\dot{2},\dot{4})\}}$

z	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
y	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$
x	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$

Chacun des triplets ci-dessus vérifie le système proposé.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

a) $\begin{cases} x \equiv -1\,[34] \\ x \equiv 1\,[15] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 34p - 1 \\ x = 15q + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 34p - 1 = 15q + 1 \Leftrightarrow 34p - 15q = 2,$

avec $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$: $34 \wedge 15 = 1$ et 1 divise 2 $\Rightarrow$ l'équation admet des solutions.

Déterminons une solution particulière $(p_0; q_0)$ par l'algorithme d'Euclide.

$34 = 15 \times 2 + 4 \Rightarrow 4 = 34 - 2 \times 15$

$15 = 4 \times 3 + 3 \Rightarrow 3 = 15 - 3 \times 4 = 15 - 3(34 - 2 \times 15) = 7 \times 15 - 3 \times 34$

$4 = 3 \times 1 + 1 \Rightarrow 1 = 4 - 1 \times 3 = 34 - 2 \times 15 - (7 \times 15 - 3 \times 34) = 4 \times 34 - 9 \times 15$

$4 \times 34 - 9 \times 15 = 1 \Leftrightarrow 8 \times 34 - 18 \times 15 = 2 \Rightarrow (p_0\,;\,q_0) = (8\,;18).$

$\begin{cases} 34p - 15q = 2 \\ 34p_0 - 15q_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow 34(p - p_0) - 15(q - q_0) = 0 \Leftrightarrow 34(p - p_0) = 15(q - q_0);$

34 divise $15(q - q_0)$ et 34 et 15 sont premiers entre eux alors, d'après le théorème de Gauss 34 divise $q - q_0 \Leftrightarrow q - q_0 = 34k \Leftrightarrow q = 34k + q_0 \Leftrightarrow q = 34k + 18 \Rightarrow$

Scanné avec CamScanner

$x = 15q + 1 = 15(34k + 18) + 1 = 510k + 271$; $\boxed{S = \{510k + 271\},\ k\epsilon\mathbb{Z}.}$

Remarque : on pourrait chercher p et le remplacer par sa valeur dans $x = 34p - 1$ pour trouver x. On trouvera le même résultat.

b) $x^2 \equiv -1[5] \Leftrightarrow x^2 \equiv 4[5] \Leftrightarrow x^2 - 4 \equiv 0[5] \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \equiv 0[5]$

5 est premier $\Rightarrow (\dot{x} - \dot{2})(\dot{x} + \dot{2}) = \dot{0} \Rightarrow \dot{x} = \dot{2}$ ou $\dot{x} = \dot{3} \Rightarrow x = 5k + 2$ ou $x = 5k + 3$; $\boxed{S = \{5k+2\,;\ 5k+3\},\ k\epsilon\mathbb{Z}}$.

4. $\dot{x}\epsilon(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ et $\bar{x}\epsilon(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. Déterminons les entiers relatifs x tels que :

$$\begin{cases} \dot{x}^2 - 4\dot{x} + \dot{3} = \dot{0} \\ \bar{2}x - \bar{2} = \bar{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\dot{x} - \dot{1})(\dot{x} - \dot{3}) = \dot{0} \quad (1) \\ \bar{2}x = \bar{2} \qquad\qquad (2) \end{cases}$$

$\bar{x}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$2\bar{x}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

(1) : 5 est premier $\Rightarrow x = \dot{1}$ ou $x = \dot{3}$

(2) : le tableau de congruences modulo 4 donne : $x = \bar{1}$ ou $x = \bar{3}$.

On va résoudre les systèmes suivants :

$(a)\begin{cases} x = \dot{1} \\ x = \bar{1} \end{cases}$; $(b)\begin{cases} x = \dot{1} \\ x = \bar{3} \end{cases}$; $(c)\begin{cases} x = \dot{3} \\ x = \bar{1} \end{cases}$ ou $(d)\begin{cases} x = \dot{3} \\ x = \bar{3} \end{cases}$

$(a)\begin{cases} x = 5k+1 \\ x = 4k'+1 \end{cases}$; $(b)\begin{cases} x = 5k+1 \\ x = 4k'+3 \end{cases}$; $(c)\begin{cases} x = 5k+3 \\ x = 4k'+1 \end{cases}$ ou $(d)\begin{cases} x = 5k+3 \\ x = 4k'+3 \end{cases}$

(a) et (d) donnent : $5k = 4k'$; $5 \wedge 4 = 1 \Rightarrow$ d'après le théorème de Gauss $\exists q\epsilon\mathbb{Z}$ tel que $k = 4q \Rightarrow x = 5(4q) + 1$ ou $x = 5(4q) + 3 \Leftrightarrow x = 20q + 1$ ou $x = 20q + 3$.

(b) donne : $5k + 1 = 4k' + 3 \Leftrightarrow 5k - 4k' = 2$; $(2;2)$ est une solution particulière

$$+\begin{cases} 5k - 4k' = 2 \\ -5(2) + 4(2) = -2 \end{cases}$$
$$5(k-2) - 4(k'-2) = 0$$

$5(k-2) = 4(k'-2) \Rightarrow k - 2 = 4q \Rightarrow k = 4q + 2$

$\Rightarrow x = 5(4q+2) + 1 = 20q + 11$, $x = 20q + 11$, $q\epsilon\mathbb{Z}$.

(c) donne : $5k + 3 = 4k' + 1 \Leftrightarrow 5k - 4k' = -2$ une solution particulière est $(-2;-2)$

$$+\begin{cases} 5k - 4k' = -2 \\ 5(2) - 4(2) = 2 \end{cases}$$
$$5(k+2) - 4(k'+2) = 0$$

$5(k+2) = 4(k'+2) \Rightarrow k + 2 = 4q \Rightarrow k = 4q - 2$

$\Rightarrow x = 5(4q-2) + 3 = 20q - 10 + 3 = 20q - 7$.

$x = 20q - 7$; $\boxed{S = \{20q+1\ ;\ 20q+3\ ;\ 20q-7\ ;\ 20q+11\},\ q\epsilon\mathbb{Z}.}$

5. a) Démontrons que, pour tous entiers relatifs x et y et tous entiers naturels n et k, non nuls $x \equiv y[n] \Leftrightarrow kx \equiv ky[kn]$.

$x \equiv y[n] \Leftrightarrow \exists p\epsilon\mathbb{Z}$ tel que $x = np + y \Leftrightarrow kx = (kn)p + ky \Leftrightarrow kx \equiv ky[kn]$

avec $k\epsilon\mathbb{N}^*$, $n\epsilon\mathbb{N}^*$. CQFD

b) En utilisant la relation de congruence modulo 12 déterminons les entiers relatifs x tels que : $\begin{cases} x \equiv 1\,[3] \\ x \equiv 2\,[4] \end{cases}$ $\begin{cases} x \equiv 1\,[3] \\ x \equiv 2\,[4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \equiv 4[12] \\ 3x \equiv 6[12] \end{cases}$

$4x - 3x \equiv (4-6)[12] \Leftrightarrow x \equiv -2[12] \Leftrightarrow x \equiv 10[12] \Leftrightarrow \boxed{x = 12k + 10,\ k\epsilon\mathbb{Z}}$.

Exercice 10:

1. $\dot{a}$ et $\dot{b}\,\epsilon(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$.

a) Déterminons les couples $(\dot{a}, \dot{b})$ tels que $\dot{a}\dot{b} = \dot{0}$, $\dot{a} \neq \dot{0}$ et $\dot{b} \neq \dot{0}$;.

Les diviseurs de $\dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ sont : $\dot{3}\,;\dot{5}\,;\dot{6}\,;\dot{9}\,;\dot{12}$. On a

$\dot{3} \times \dot{5} = \dot{0}$; $\dot{5} \times \dot{6} = \dot{0}$; $\dot{5} \times \dot{9} = \dot{0}$; $\dot{5} \times \dot{12} = \dot{0}$, alors on obtient :

$$(\dot{a}, \dot{b})\epsilon\left\{(\dot{3};\dot{5}), (\dot{5};\dot{3}), (\dot{5};\dot{6}), (\dot{6};\dot{5}), (\dot{5};\dot{9}), (\dot{9};\dot{5}), (\dot{12};\dot{5}), (\dot{5};\dot{12})\right\}$$

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{x}^2 - \dot{6}\dot{x} + \dot{5} = \dot{0}$.

Scanné avec CamScanner

$x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0} \Leftrightarrow (x - \dot{1})(x - \dot{5}) = \dot{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \dot{1})(x - \dot{5}) = \dot{0} \\ (x - \dot{1}) - (x - \dot{5}) = \dot{4} \end{cases}$.

Seul le couple $(\dot{9}\,;\dot{5})$ vérifie : $\dot{a} \times \dot{b} = \dot{0}$ et $\dot{a} - \dot{b} = \dot{4}$; d'où on a :

- $x - \dot{1} = \dot{0}$ ou $x - \dot{5} = \dot{0} \Leftrightarrow x = \dot{1}$ ou $x = \dot{5}$. $\Leftrightarrow x = 15k + 1$ ou $x = 15k + 5$
- $x - \dot{1} = \dot{9}$ ou $x - \dot{5} = \dot{5} \Leftrightarrow x = \dot{10}$ ou $x = \dot{10} \Rightarrow x = 15k + 10$;

Conclusion : $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0} \Rightarrow \boxed{S = \{15k + 1\,;\ 15k + 5\,;\ 15k + 10\}\ k \epsilon \mathbb{Z}.}$

c) Résolvons dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ le système suivant : $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{3}y = \dot{3} \\ \dot{2}x + y = \dot{5} \end{cases}$.

Par substitution : $y = \dot{5} - \dot{2}x \Rightarrow \dot{3}x + \dot{3}(\dot{5} - \dot{2}x) = \dot{3} \Rightarrow \dot{3}x - \dot{6}x = \dot{3} \Leftrightarrow -\dot{3}x = \dot{3}$

$\Leftrightarrow -\dot{3}x - \dot{3} = \dot{0} \Leftrightarrow -\dot{3}(x + \dot{1}) = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{12}(x + \dot{1}) = \dot{0} \Rightarrow x + \dot{1} = \dot{5} \Leftrightarrow x = \dot{4} \Rightarrow$

$y = \dot{5} - \dot{2}(\dot{4}) = \dot{5} - \dot{8} = -\dot{3} = \dot{12} \Rightarrow x = 15k + 4$ et $y = 15k + 12$.

$\boxed{S = \{(15k + 4\,;\ 15k + 12)\}\ k \epsilon \mathbb{Z}.}$

2. a) Déterminons le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11.

$6^0 \equiv 1[11]$; $6 \equiv 6[11]$; $6^2 \equiv 3[11]$; $6^3 \equiv 7[11]$; $6^4 \equiv 9[11]$; $6^5 \equiv 10[11]$;

$6^6 \equiv 5[11]$; $6^7 \equiv 8[11]$; $6^8 \equiv 4[11]$; $6^9 \equiv 2[11]$; $\boxed{6^{10} \equiv 1[11]}$

b) Déterminons le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5.

$6^0 \equiv 1[5]$; $6 \equiv 1[5]$; $\forall n \epsilon \mathbb{N}$, $6^n \equiv 1[5] \Rightarrow 6^4 \equiv 1[5]$ le reste est $\boxed{r = 1}$

3. a) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation $7x \equiv 3[5]$.

5 est premier $\Rightarrow$ l'inverse de $\dot{7}$ est $\dot{3}$ $\Rightarrow 7x \equiv 3 \Leftrightarrow \dot{7} \times \dot{3}x = \dot{9} \Leftrightarrow x = \dot{4}$

$\Rightarrow x = 5k + 4$ $\boxed{S = \{5k + 4\}, k \epsilon \mathbb{Z}}$

- En déduisons la résolution de l'équation $7x + 5y = 3$.

$7x + 5y = 3 \Leftrightarrow 7x \equiv 3[5] \Rightarrow x = 5k + 4 \Rightarrow 7(5k + 4) + 5y = 3 \Leftrightarrow$

$35k - 28 + 5y = 3 \Leftrightarrow 5y = -35k - 28 + 3 \Leftrightarrow 5y = -35k - 25 \Rightarrow y = -7k - 5$

$\boxed{S = \{5k + 4\,;\ -7k - 5\},\ k \epsilon \mathbb{Z}.}$

b) Déduisons de a) la résolution du système $\begin{cases} x \equiv 1[5] \\ x \equiv -2[7] \end{cases}$.

$\begin{cases} x \equiv 1[5] \\ x \equiv -2[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5p + 1 \\ x = 7q - 2 \end{cases} \Leftrightarrow 5p + 1 = 7q - 2 \Leftrightarrow 5p - 7q = -3 \Leftrightarrow 7q - 5p = 3$

$\Leftrightarrow 7q = 5p + 3 \Rightarrow 7q \equiv 3[5] \Rightarrow q = 5k + 4 \Rightarrow x = 7(5k + 4) - 2 = 35k + 28 - 2$

$x = 35k + 26$; $\boxed{S = \{35k + 26\}, k \epsilon \mathbb{Z}.}$

4. a) Démontrons que le carré de tout nombre impair est congru à 1 modulo 8.

Le reste de la division euclidienne d'un entier impair par 8 est 1, 3, 5 ou 7 ;

$n = 2k + 1$: si $n \equiv 1[8] \Rightarrow n^2 \equiv 1[8]$; si $n \equiv 3[8] \Rightarrow n^2 \equiv 9[8] \equiv 1[8]$

si $n \equiv 5[8] \Rightarrow n^2 \equiv 25[8] \equiv 1[8]$; si $n \equiv 7[8] \Rightarrow n^2 \equiv 49[8] \equiv 1[8]$.

Conclusion : Si $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 \equiv 1[8], k \epsilon \mathbb{Z}$. CQFD

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$: $8x + 1 = y^2$.

On a $y^2 \equiv 1[8] \Rightarrow y = 2k + 1, k \epsilon \mathbb{Z} \Rightarrow 8x + 1 = (2k + 1)^2 \Leftrightarrow 8x = (2k + 1)^2 - 1$

$\Leftrightarrow 8x = (2k + 1 - 1)(2k + 1 + 1) \Leftrightarrow 8x = 2k(2k + 2) \Leftrightarrow 2x = k(k + 1) \Leftrightarrow$

$x = \frac{k(k+1)}{2}$; on remarquera que l'un des nombres k et $k + 1$ est divisible par 2.

$\boxed{S = \left\{\left(\frac{k(k+1)}{2}\,;\ 2k + 1\right)\right\}, k \epsilon \mathbb{Z}.}$

Scanné avec CamScanner

5. a) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$: $5x - 11y = 4$.

$5 \wedge 11 = 1$ et 1 divise 4, il y a donc solutions. Déterminons une solution particulière en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$11 = 5 \times 2 + 1 \Rightarrow 1 = 11 - 2 \times 5 \Leftrightarrow 4 = 5(-8) - 11(-4) \Rightarrow (-8\,;-4)$ est une solution particulière de l'équation $5x - 11y = 4$. On a :

$\begin{cases} 5x - 11y = 4 \\ 5(-8) - 11(-4) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 11y = 4 \\ 5(8) - 11(4) = -4 \end{cases}$, par addition membre à membre des deux équations on obtient : $5(x+8) = 11(y+4)$; $5 \wedge 11 = 1$ et 5 divise $11(y+4)$, alors d'après le théorème de Gauss, 5 divise $y+4$. Il existe donc un entier relatif k tel que $y + 4 = 5k \Leftrightarrow y = 5k - 4 \Leftrightarrow y = 5k + 1$. Remplaçons y par sa valeur dans la première équation : $5x - 11(5k+1) = 4 \Leftrightarrow 5x = 11(5k) + 15 \Leftrightarrow x = 11k + 3$.

$\boxed{S = \{(11k+3\,;\,5k+1)\}\ k \in \mathbb{Z}.}$

b) En déduisons la résolution du système $\begin{cases} 3\alpha \equiv 1[5] \\ 7\alpha \equiv 9[11] \end{cases}$.

$\begin{cases} 3\alpha \equiv 1[5] \\ 7\alpha \equiv 9[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha \equiv 6[5] \\ 7\alpha \equiv 42[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \equiv 2[5] \\ \alpha \equiv 6[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5p + 2 \\ \alpha = 11q + 6 \end{cases} \Rightarrow 5p + 2 = 11q + 6.$

$\Leftrightarrow 5p - 11q = 4 \Rightarrow$ d'après a), $p = 11k + 3 \Rightarrow \alpha = 5(11k+3) + 2 = 55k + 17$

$\alpha = 55k + 17$; $\boxed{S = \{55k + 17\}, k \in \mathbb{Z}.}$

6. Trouvons les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls dont le PGCD d et le PPCM m vérifient $3m - 2d = 30$.

Il existe deux entiers relatifs a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$ avec $a' \wedge b' = 1$, d'où $3m - 2d = 30 \Leftrightarrow 3da'b' - 2d = 30 \Leftrightarrow d(3a'b' - 2) = 30 \Rightarrow d$ et $3a'b' - 2$ sont des diviseurs de 30.

Seul le couple $(3\,;10)$ convient : on a

d	1	2	3	5
$3a'b' - 2$	30	15	10	6

$3(3a'b' - 2) = 30 \Leftrightarrow 3a'b' = 12 \Leftrightarrow a'b' = 4$

$a' \wedge b' = 1 \Rightarrow a' = 1$ et $b' = 4 \Rightarrow a = 3$ et $b = 12$. $\boxed{(a\,;b) \in \{(3\,;12)\,,(12;3)\}.}$

Exercice 11:

1. Déterminons les couples (a, b) d'entiers naturels tels que :

a) $\begin{cases} a + b = 60 \\ a \wedge b = 12 \end{cases}$; Posons $a = 12a'$ et $b = 12b'$. On obtient : $\begin{cases} 12(a' + b') = 60 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a' + b' = 5 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 48 \end{cases}$; $\begin{cases} a' = 3 \\ b' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 36 \\ b = 24 \end{cases}$

a'	1	3
b'	4	2

$(a, b) \in \{(12; 48), (48; 12), (36; 24), (24; 36)\}$

b) $\begin{cases} a + b = 105 \\ a \vee b = 12(a \wedge b) \end{cases}$; Posons $\delta = a \wedge b$, $m = a \vee b$, $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ avec $a' \wedge b' = 1$ on a : $\begin{cases} \delta(a' + b') = 105 \\ \delta a'b' = 12\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta(a' + b') = 105 \\ a'b' = 12 \end{cases}$

a'	1	2	3
b'	12	6	4

- $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 12 \end{cases}$; $a' + b' = 13$ et 13 ne divise pas 105 ;
- $\begin{cases} a' = 2 \\ b' = 6 \end{cases}$; 2 et 6 ne sont premiers entre eux ;
- $\begin{cases} a' = 3 \\ b' = 4 \end{cases}$; $a' + b' = 7$ et 7 divise 105 $\Rightarrow \delta = \frac{105}{7} = 15 \Rightarrow a = 45$ et $b = 60$.

$\boxed{(a; b) \in \{(45\,;60)\,,(60\,;45)\}}$

Scanné avec CamScanner

c) $\begin{cases} a^2+b^2=801 \\ a\vee b=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=801 \\ a\vee b=120 \end{cases}$; Posons $a=\delta a'$ et $b=\delta b'$ avec $a'\wedge b'=1$. On obtient : $\begin{cases} [\delta(a'+b')]^2=2\delta^2a'b'+801 \\ \delta a'b'=120 \end{cases}$. δ et $a'b'$ sont des diviseurs de 120.

δ	1	2	3	4	5	6	8	10
$a'b'$	120	60	40	30	24	20	15	12

- Si $\delta=1$ et $a'b'=120$, alors $2\delta^2a'b'+801=240+801=1041$ qui n'est pas un carré parfait ;
- Si $\delta=2$ et $a'b'=60$, alors $2\delta^2a'b'+801=1281$ n'est pas un carré parfait ;
- Si $\delta=3$ et $a'b'=40$, alors $2\delta^2a'b'+801=1521=39^2 \Leftrightarrow [3(a'+b')]^2=39^2$ $a'+b'=13$; le système devient $\begin{cases} a'+b'=13 \\ a'b'=40 \end{cases}$, on résoud l'équation : $a'^2-13a'+40=0$; $\Delta=169-160=9 \Rightarrow a'=\frac{13-3}{2}=5$ ou $a'=\frac{13+3}{2}=8$, d'où $\begin{cases} a'=5 \\ b'=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=15 \\ b=24 \end{cases}$; $\boxed{(a;b)\in\{(15;24),(24;15)\}.}$
- Pour les couples $(4;30),(5;24),(6;20),(8;15),(10;12)$, le nombre $2\delta^2a'b'+801$ n'est pas un carré parfait par conséquent ils ne donnent pas de solution.

d) $\begin{cases} a^2-b^2=5440 \\ a\wedge b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b)=5440 \\ a\wedge b=8 \end{cases}$; Posons $a=8a'$ et $b=8b'$ avec $a'\wedge b'=1$, alors on a : $\begin{cases} 64(a'-b')(a'+b')=5440 \\ a'\wedge b'=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a'-b')(a'+b')=85 \\ a'\wedge b'=1 \end{cases}$

$a'-b'$ et $a'+b'$ sont des diviseurs de 85 et $85=5\times17$;

$a'-b'$	1	5
$a'+b'$	85	17

$\begin{cases} a'-b'=1 \\ a'+b'=85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a'=86 \\ b'=a'-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'=43 \\ b'=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=344 \\ b=336 \end{cases}$

$\begin{cases} a'-b'=5 \\ a'+b'=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a'=22 \\ b'=a'-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'=11 \\ b'=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=88 \\ b=48 \end{cases}$

$\boxed{(a;b)\in\{(344;336),(88;48)\}.}$

2. a) Déterminons l'ensemble des diviseurs dans $\mathbb{N}$ de 124.

$124=2^2\times31 \Rightarrow \boxed{D(124)=\{1,2,4,31,62,124\}.}$

b) Déterminons les couples $(x\ y)$ de $(\mathbb{N}^*)^2$ tels que : $\begin{cases} m-4d=124 \\ 3<d<50 \end{cases}$, avec $m=x\vee y$ et $d=x\wedge y$.

Posons $x=dx'$ et $y=dy'$ avec $x'\wedge y'=1$. On obtient : $\begin{cases} dx'y'-4d=124 \\ 3<d<50 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} d(x'y'-4)=124 \\ 3<d<50 \end{cases}$;

x'	1	5
y'	35	7

x'	1	2
y'	8	4

Si $d=4$, $x'y'-4=31 \Leftrightarrow x'y'=35$

Si $d=31$, $x'y'-4=4 \Leftrightarrow x'y'=8$; x' et y' sont premiers entre eux, donc le couple $(2;4)$ ne convient pas. D'où :

Si $d=4$, alors $\begin{cases} x=4 \\ y=140 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=20 \\ y=28 \end{cases}$; si $d=31$, alors $\begin{cases} x=31 \\ y=248 \end{cases}$;

$\boxed{(x;y)\in\{(4;140),(20;28),(31;248),(140;4),(28;20),(248;31)\}.}$

3. Résolvons dans $\mathbb{N}^2$:

a) $\begin{cases} PPCM(x,y)=168 \\ xy=1008 \end{cases}$. Posons $x=dx'$ et $y=dy'$ avec $x'\wedge y'=1$. On a :

Scanné avec CamScanner

$\begin{cases} dx'y' = 168 \\ d^2x'y' = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx'y' = 168 \\ 168d = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ x'y' = 28 \end{cases}$; x' et y' sont des diviseurs de 28.

x'	1	2	4
y'	28	14	28

Seul le couple $(x';y') = (1;28)$ vérifie $x' \wedge y' = 1$; d'où

$\boxed{(x;y) \in \{(6;168),(168;6)\}.}$

b) $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$; $m = x \vee y$ et $d = x \wedge y$. Soit $x = dx'$ et $y = dy'$ avec $x' \wedge y' = 1$.

On a $\begin{cases} dx'y' + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(x'y' + 3) = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$; d et $(x'y' + 3)$ sont diviseurs de 276 et $276 = 2^2 \times 3 \times 23$; $10 < d < 30 \Rightarrow d \in \{12;23\}$:

x'	1	2	4
y'	20	10	6

- Si $d = 12$, alors $x'y' + 3 = 23 \Leftrightarrow x'y' = 20$;
  2 et 10 ne sont pas premiers entre eux d'où
- Si $d = 23$, alors $x'y' + 3 = 12 \Leftrightarrow x'y' = 9$; $x' \wedge y' = 1 \Rightarrow x' = 1$ et $y' = 9$ ou $x' = 9$ et $y' = 1 \Rightarrow (x;y) \in \{(23;207),(207;23)\}$. L'ensemble solution du système est donc $\boxed{S = \{(12;240),(48;60),(240;12),(60;48),(23;207),(207;23)\}}$

c) $x^3 - y^3 = 631$. On a : $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$; l'équation est équivalente à $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 631$.

$(x-y)$ et $(x^2 + xy + y^2)$ sont des diviseurs de 631, et 631 est premier d'où

(1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 631 \end{cases}$ ou (2) $\begin{cases} x - y = 631 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$

(1) donne : $\begin{cases} x - y = 1 \\ (x-y)^2 + 3xy = 631 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 1 + 3xy = 631 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 210 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = y + 1 \\ y^2 + y - 210 = 0 \end{cases}$; $\Delta = 1 + 4 \times 210 = 29^2 \Rightarrow y = \frac{-1+29}{2} = 14$, la deuxième valeur de y n'étant pas un entier naturel $\Rightarrow x = 15$.

(2) donne : $\begin{cases} x - y = 631 \\ 631^2 + 3xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 631 \\ 3xy = 1 - 631^2 \end{cases}$; puisque $xy > 0$ ce système ne n'a pas de solution. D'où $\boxed{S = \{(15;14)\}.}$

4. Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$:

a) $\begin{cases} xy = -1 \\ 2x + y^3 = 1 \end{cases}$; x et y sont des diviseurs de $-1 \Rightarrow x = 1$ et $y = -1$ ou $x = -1$ et $y = 1$; le couple $(-1;1)$ ne vérifie pas la deuxième équation du système, alors $\boxed{S = \{(1;-1)\}.}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2 [5] \end{cases}$. Résolvons la première équation : $3x - 5y = 6$:

$(12;6)$ est une solution particulière de cette équation ; alors on a :

$\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ 3(-12) - 5(-6) = -6 \end{cases} \Rightarrow 3(x-12) = 5(y-6)$; $3 \wedge 5 = 1$, alors le théorème de Gauss permet d'écrire : $x = 5k + 12 \Leftrightarrow x = 5k + 2$ et $y = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

La deuxième équation donne : $y \equiv (5k+2)^2 [5] \Leftrightarrow y \equiv 4[5] \Leftrightarrow y = 5k' + 4, k' \in \mathbb{Z}$.

Déterminons k et k' en résolvant le système suivant :

$\begin{cases} y = 3k \\ y = 5k' + 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3k - 5k' = 4$; $(8;4)$ est une solution particulière d'où on a : $3(k-8) = 5(k'-4)$; d'après le théorème de Gauss $k = 5p + 8 \Leftrightarrow k = 5p + 3$

Scanné avec CamScanner

et $k' = 3p + 4$, alors $x = 5(5p + 3) + 2 = 25p + 17$ et $y = 3\ (5p + 3) = 15p + 9$.

L'ensemble solution du système est : $\boxed{S = \{(25p + 17\,;\, 15p + 9)\}, p \in \mathbb{Z}.}$

c) $xy - 4y = 42$.

$xy - 4y = 42 \iff y(x - 4) = 42$; y et $(x - 4)$ sont des diviseurs de 42.

$42 = 2 \times 3 \times 7$

$\boxed{S = \{(46\,;1), (25\,;2), (18\,;3), (10\,;7)\}.}$

y	1	2	3	7
$x-4$	42	21	14	6

5. a) Résolvons dans $\mathbb{N}$ l'équation : $3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0\ [11]$.

$3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 = 3^{2x}(3^x - 5) - (3^x - 5) = (3^x - 5)(3^{2x} - 1)$; alors

$3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0\ [11] \iff (3^x - 5)(3^{2x} - 1) \equiv 0[11] \iff 3^x - 5 \equiv 0[11]$ ou $3^{2x} - 1 \equiv 0[11]$ car 11 est premier $\iff 3^x \equiv 5[11]$ ou $3^x \equiv 1[11]$

Déterminons les restes de la division euclidienne par 11 de 3^n

$3^0 \equiv 1[11]$; $3 \equiv 3[11]$; $3^2 \equiv 9[11]$; $3^3 \equiv 5[11]$; $3^4 \equiv 4[11]$; $3^5 \equiv 1[11]$

$3^{5k} \equiv 1[11]$; $3^{5k+3} \equiv 5[11]$. D'où : $x = 5k$ ou $x = 5k + 3$; $\boxed{S = \{5k\,;5k + 3\}, k \in \mathbb{Z}.}$

b) Déterminons l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels non nuls tels que :

$\mathrm{PGCD}(a\,;b) + \mathrm{PPCM}(a\,;b) = b + 9$.

Soit $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ avec $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = \delta$, $\mathrm{PPCM}(a\,;b) = \delta a'b'$ et $a' \wedge b' = 1$; d'où

$\mathrm{PGCD}(a\,;b) + \mathrm{PPCM}(a\,;b) = b + 9 \iff \delta + \delta a'b' = \delta b' + 9 \iff \delta[1 + b'(a' - 1)] = 9$

δ et $1 + b'(a' - 1)$ sont des diviseurs de 9.

- Si $\delta = 1$ et $1 + b'(a' - 1) = 9$, alors $b'(a' - 1) = 8$;

b' et $a' - 1$ sont des diviseurs de 8 : on a donc

$\begin{cases} b' = 1 \\ a' = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} b' = 8 \\ a' = 2 \end{cases}$ et $2 \wedge 8 \neq 1$;

$\begin{cases} b' = 2 \\ a' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} b' = 4 \\ a' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 3 \end{cases}$

δ	1	3
$1+b'(a'-1)$	9	3

b'	1	2
$a'-1$	8	4

- Si $\delta = 9$ et $1 + b'(a' - 1) = 1$, alors $b'(a' - 1) = 0 \Rightarrow a' = 1$ et $b' \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = 9$ et $b = 9b'$

- Si $\delta = 3$ et $1 + b'(a' - 1) = 3$, alors $b'(a' - 1) = 2$;

$\begin{cases} b' = 1 \\ a' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} b' = 2 \\ a' = 2 \end{cases}$, $2 \wedge 2 \neq 1$. L'ensemble des couples (a, b) est :

$\boxed{S = \{(3\,;4), (5\,;2), (9\,;1), (9\,;3), (9\,;9b')\}, b' \in \mathbb{N}^*.}$

c) Déterminons $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $\mathrm{PPCM}(a; b) - 16\,\mathrm{PGCD}(a; b) = 1977$.

Soit : $\mathrm{PGCD}(a; b) = \delta$, $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ avec $a' \wedge b' = 1 \Rightarrow \mathrm{PPCM}(a\,;b) = \delta a'b'$.

$\mathrm{PPCM}(a; b) - 16\,\mathrm{PGCD}(a; b) = 1977 \iff \delta a'b' - 16\delta = 1977 \iff \delta(a'b' - 16) = 1977$.

δ et $a'b' - 16$ sont des diviseurs de 1977:

$\begin{cases} \delta = 1 \\ a'b' = 1993 \end{cases}$; 1993 est premier $\Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 1993 \end{cases} \Rightarrow$

$\boxed{(a\,;b) \in \{(1\,;1993), (1993\,;1)\}.}$

δ	1	3
$a'b'-16$	1977	659

$\begin{cases} \delta = 1977 \\ a'b' = 17 \end{cases}$; 17 est premier $\Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 17 \end{cases} \Rightarrow (a\,;b) = (1977\,;33609)$

ou $(a\,;b) = (33609\,;1977)$;

$\begin{cases} \delta = 3 \\ a'b' = 675 \end{cases}$; seuls les couples $(1\,;675)$ et $(25\,;27)$ vérifient $a' \wedge b' = 1$,

a'	1	3	5	9	15	25
b'	675	225	135	75	45	27

Scanné avec CamScanner

$\begin{cases} a'=1 \\ b'=675 \end{cases} \Rightarrow (a\,;b)=(3\,;2025)$ ou $(a\,;b)=(2025\,;3)$;

$\begin{cases} a'=25 \\ b'=27 \end{cases} \Rightarrow (a\,;b)=(75\,;81)$ ou $(a\,;b)=(81\,;75)$. L'ensemble des paires d'entiers naturels est $\boxed{S=\{(1\,;1993),(1977\,;33609),(3\,;2025),(75\,;81)\}.}$

Exercice 12:

1. a) Montrons que l'équation $(E): 7x-11y=1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
On a $7\wedge 11=1 \Rightarrow$ d'après le théorème de Bézout, il existe au moins deux entiers relatifs u et v tels que $7u-11v=1$, donc l'équation admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation : $\dot{7}x=\dot{11}y$.
$\dot{7}x=\dot{11}y \Leftrightarrow \dot{7}x=\dot{0} \Rightarrow 7x\equiv 0[11] \Rightarrow x=11k$ et $y=k$ $\boxed{S=\{(11k\,;k),k\in\mathbb{Z}\}}$

c) Donnons toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
$7x\equiv 1[11] \Leftrightarrow 7x\times 8\equiv 8[11] \Leftrightarrow x\equiv 8[11] \Rightarrow x=11k+8$
$11y\equiv -1[7] \Leftrightarrow 11y\equiv 6[7] \Leftrightarrow 11y\equiv 55[7] \Leftrightarrow y\equiv 5[7] \Rightarrow y=7k+5.$
$\boxed{S=\{(11k+8\,;7k+5),k\in\mathbb{Z}\}.}$

2. $a\in\mathbb{N}^*$; montrons que le reste de la division euclidienne de $[a^2+(a-1)^2]^2$ par $4a^2$ est $(2a-1)^2$.
$[a^2+(a-1)^2]^2=(2a^2-2a+1)^2=[2a(a-1)+1]^2=4a^2(a-1)^2+4a(a-1)+1$
$=4a^2(a-1)^2+4a^2-4a+1=4a^2(a-1)^2+(2a-1)^2=4a^2q+r$
avec $q=(a-1)^2$ et $r=(2a-1)^2$. Le reste de la division euclidienne par $4a^2$ de $[a^2+(a-1)^2]^2$ est donc $(2a-1)^2$.

3. a) Déterminons les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1998.
Les diviseurs de 1998 sont : 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 222, 333, 666, 999, 1998.
Les carrés parfaits ici sont 1 et 9 ; alors les entiers naturels a tels que $a^2/1998$ sont 1 et 3.

b) Déterminons les couples d'entiers naturels $(a;b)$ tels que $\mu^2-3\delta^2=1998$ avec $PPCM(a;b)=\mu$ et $PGCD(a;b)=\delta$.
Soit $a=\delta a'$ et $b=\delta b'$ avec $a'\wedge b'=1$; on a $\delta^2(a'b')^2-3\delta^2=1998 \Leftrightarrow$
$\delta^2[(a'b')^2-3]=1998$

- Si $\delta=1$, $(a'b')^2=1998+3=2001$; 2001 n'est pas un carré parfait.
- Si $\delta=3$, $(a'b')^2=225 \Leftrightarrow a'b'=15$
$a'=1$ et $b'=15 \Rightarrow a=3$ et $b=45$ ou $a=45$ et $b=3$;
$a'=3$ et $b'=5 \Rightarrow a=9$ et $b=15$ ou $a=15$ et $b=9$;
$\boxed{(a;b)\in\{(3;45),(45;3),(9;15),(15;9)\}.}$

δ^2	1	9
$(a'b')^2-3$	1998	222

a'	1	3
b'	15	5

4. a) Trouvons l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 5929.
$5929=7^2\times 11^2 \Rightarrow D(5929)=\{7^\alpha,11^\beta\}$ avec $\alpha\in\{0,1,2\}$ et $\beta\in\{0,1,2\} \Rightarrow$
$\boxed{D(5929)=\{1,7,11,49,77,121,539,847,5929\}.}$

b) Résolvons dans $\mathbb{N}$ l'équation : $x^2-91x+588=0$.
$\Delta=91^2-4\times 588=8281-2352=5929=77^2$; $x=\frac{91-77}{2}=7$ ou $x=\frac{91+77}{2}=84$
$\boxed{S=\{7;84\}.}$

Scanné avec CamScanner

c) Déterminons les couples (a,b) d'entiers naturels dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (1).

$\begin{cases} PGCD(a,b) = 7 \\ PPCM(a,b) = 84 \end{cases}$; $ab = 84 \times 7 \Leftrightarrow 49\,a'b' = 84 \times 7$ avec $a' \wedge b' = 1 \Leftrightarrow a'b' = 12$.

a' et b' sont des diviseurs de 12;

$2 \wedge 6 \neq 1 \Rightarrow (a';b') \in \{(1;12),(12;1)(3;4),(4;3)\} \Rightarrow$

a'	1	2	3
b'	12	6	4

$\boxed{(a;b) \in \{(7;84),(84;7),(21;28),(28;21)\}.}$

5. $n \in \mathbb{N}$ et $n > 1$.

a) Déterminons le PGCD des entiers $n(n+1)$ et $(n-1)(n+2)$.

Posons $A = n(n+1)$ et $B = (n-1)(n+2) = n(n+1) - 2$. On sait que :

$PGCD(A;B) = PGCD(A - B\,;B) \Rightarrow PGCD[n(n+1);n(n+1)-2] = PGCD[2;n(n+1)-2]$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $n > 1$, $n(n+1)$ est divisible par 2 $\Rightarrow$ $n(n+1) - 2$ est un multiple de 2 $\Rightarrow$ $PGCD[2;n(n+1)-2] = 2$; $\boxed{PGCD[n(n+1)\,;(n-1)(n+2)] = 2.}$

b) En déduisons une propriété des nombres a et b tels que :

$2a = n(n+1)$ et $2b = (n-1)(n+2)$.

On a $PGCD[n(n+1)\,;(n-1)(n+2)] = 2 \Leftrightarrow PGCD(2a;2b) = 2 \Leftrightarrow 2PGCD(a\,;b) = 2$

$\Leftrightarrow PGCD(a\,;b) = 1 \Leftrightarrow$ a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Exercice 13:

1. Montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'entier $2n^2 + 2n$ est premier avec l'entier $2n+1$.

$2n^2 + 2n = (2n+1)n + n \Rightarrow PGCD(2n^2 + 2n\,;2n+1) = PGCD(2n+1;n)$;

$2n + 1 = n \times 2 + 1 \Rightarrow PGCD(2n+1\,;n) = PGCD(n;1) = 1 \Rightarrow$

$PGCD(2n^2 + 2n\,;\,2n+1) = 1$, alors $2n^2 + 2n$ est premier avec l'entier $2n+1$.

2. Déterminons l'entier naturel n pour que $(2n+3)$ et $(n+7)$ soient étrangers.

$2n + 3 = (n+7) \times 2 - 11 \Rightarrow PGCD(2n+3\,;n+7) = PGCD(n+7\,;11) =$

$PGCD(n-4\,;11)$; ce PGCD est égal à 1 si 11, qui est premier, ne divise pas $n-4$

$\Leftrightarrow n - 4 \neq 11k \Rightarrow n \neq 11k + 4, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \boxed{n \in \mathbb{Z} - \{11k+4, k \in \mathbb{Z}\}.}$

3. Trouvons les nombres a,b,c,d strictement positifs, non nuls, et en progression géométrique, sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

La raison q de la progression est premier avec $a \Leftrightarrow a \wedge q = 1$.

$b = aq$; $c = aq^2$; $d = aq^3$. $10a^2 = d - b \Leftrightarrow 10a^2 = aq^3 - aq \Leftrightarrow 10a^2 = a(q^3 - q)$

$10a = q(q^2 - 1)$ $a \wedge q = 1$ et q divise $10a \Rightarrow q$ divise 10 d'après Gauss.

Les diviseurs de 10 sont : 1 ; 2 ; 5 ; 10. • Si $q = 1 \Rightarrow 10a = 0 \Rightarrow a = 0$ or $a \neq 0$;

• Si $q = 2 \Rightarrow 10a = 2(3) = 6$; 6 ne divise pas 10 ;

• Si $q = 5 \Rightarrow 10a = 5(24) = 120 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow b = 60$; $c = 300$ et $d = 1500$;

• Si $q = 10 \Rightarrow 10a = 10(100-1) \Leftrightarrow 10a = 10(99) \Rightarrow a = 99$; $b = 990$; $c = 9900$ $d = 99000$.

$\boxed{(a,b,c,d) = (12,60,300,1500) \text{ ou } (a,b,c,d) = (99,990,9900,99000).}$

4. $n \geq 5$. $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

a) Montrons que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

$a = n^3 - n^2 - 12n = (n^2 + 3n)(n-4)$; $b = 2n^2 - 7n - 4 = (2n+1)(n-4) \Rightarrow$

alors a et b sont divisibles par $n-4$.

Scanné avec CamScanner

b) On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$. On note $\delta = \text{PGCD}(\alpha\,;\beta)$.

- Etablissons une relation entre α et β indépendante de n.

$\alpha = 2n+1 = 2(\beta-3)+1 = 2\beta-5$; $\boxed{\alpha = 2\beta-5.}$

- Démontrons que δ est un diviseur de 5.

On a : $\delta = \text{PGCD}(\alpha,\beta) = \text{PGCD}(\beta\,;-5) \Rightarrow \delta$ divise 5 et β.

- Démontrons que : α et β multiples de 5 $\Leftrightarrow$ $n-2$ multiple de 5.

• α et β multiples de 5 $\Leftrightarrow$ $2n+1 = 5k$ et $n+3 = 5k'$

$\alpha-\beta = 2n+1-n-3 = 5k-5k' = 5(k-k') = 5q \Leftrightarrow n-2 = 5q \Rightarrow$ $n-2$ est un multiple de 5 ; réciproquement,

• $n-2$ est un multiple de 5 $\Rightarrow n-2 = 5k \Leftrightarrow n = 5k+2$ d'où

$\alpha = 2n+1 = 2(5k+2)+1 = 10k+5$ est un multiple de 5 et

$\beta = n+3 = 5k+2+3 = 5k+5$ est un multiple de 5.

Conclusion : α et β sont multiples de 5 $\Leftrightarrow$ $(n-2)$ est un multiple de 5.

c) Montrons que $2n+1$ et n sont étrangers.

On a : $1\times(2n+1)+(-2)n = 1 \Leftrightarrow u(2n+1)+v(n) = 1$ avec $u = 1$ et $v = -2$

alors $2n+1$ et n sont étrangers $\Leftrightarrow$ $\text{PGCD}(n\,;2n+1) = 1$.

d)-Déterminons suivant les valeurs de n et en fonction de n, le $\text{PGCD}(a\,;b)$.

$\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}\big((n-4)(n^2+3n);(n-4)(2n+1)\big) =$

$= (n-4)\text{PGCD}(n(n+3);2n+1)$.

On sait que, si a et c sont premiers entre eux, alors $\text{PGCD}(a\,;bc) = \text{PGCD}(a\,;b)$

n et $2n+1$ sont premiers entre eux $\Rightarrow (n-4)\text{PGCD}(n(n+3);2n+1) =$

$(n-4)\text{PGCD}(2n+1;\,n+3) = (n-4)\text{PGCD}(n-2;\,n+3) = (n-4)\text{PGCD}(n-2;5)$

$\text{PGCD}(a\,;b) = (n-4)\text{PGCD}(n-2\,;\,5)$

• Si $n-2$ est un multiple de 5, $\text{PGCD}(n-2\,;\,5) = 5 \Rightarrow \text{PGCD}(a;\text{b}) = 5(n-4)$;

• Si $n-2$ n'est pas un multiple de 5, $\text{PGCD}(n-2\,;\,5) = 1 \Rightarrow \text{PGCD}(a\,;\text{b}) = n-4$.

- Vérifions les résultats obtenus pour $n = 11$ et $n = 12$.

• $n = 11 \Rightarrow n-2 = 9$ qui n'est pas un multiple de 5 : $a = 1078$ et $b = 161 \Rightarrow$

$\text{PGCD}(a;b) = 11-4 = 7$.

On a bien $a = 2\times7^2\times11$ et $b = 7\times23 \Rightarrow a\wedge b = 7$.

• $n = 12 \Rightarrow n-2 = 10$ qui est multiple de 5 : $a = 1440$ et $b = 200 \Rightarrow$

$\text{PGCD}(a;b) = 5(12-4) = 40$. On a bien $a = 2^3\times5\times31$ et $b = 2^3\times5^2$; $a\wedge b = 40$.

5. b est un entier strictement positif supérieur à 1.

a) Déterminons le PGCD de b^2 et $(b-1)$.

$b^2-1 = (b-1)(b+1) \Leftrightarrow b^2 = (b-1)(b+1)+1 \Rightarrow \text{PGCD}(b^2\,;\,b-1) =$

$= \text{PGCD}(b-1\,;1) = 1$; $\boxed{\text{PGCD}(b^2\,;\,b-1) = 1.}$

b) Déterminons l'ensemble solution, dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation $b^2x+(b-1)y = 1$.

On a $b^2 = (b-1)(b+1)+1 \Rightarrow 1 = b^2-(b-1)(b+1) \Rightarrow$ une solution particulière de l'équation est $(x_0;y_0) = (1\,;-b-1)$, d'où

$$\begin{cases} b^2x+(b-1)y = 1 \\ b^2x_0+(b-1)(y_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow b^2(x-x_0) = (b-1)(y_0-y)\,;$$

$(b-1)$ divise $b^2(x-x_0)$ et $(b-1)\wedge b^2 = 1$, alors $(b-1)$ divise $(x-x_0)$, d'après le théorème de Gauss $\Rightarrow x-x_0 = (b-1)k \Leftrightarrow x = (b-1)k+x_0 = (b-1)k+1$.

b^2 divise $(b-1)(y_0-y)$ et $(b-1)\wedge b^2 = 1$, alors b^2 divise (y_0-y), d'après le

Scanné avec CamScanner

théorème de Gauss $\Rightarrow y_0 - y = b^2k \Leftrightarrow y = -b^2k + y_0 = -b^2k - (b+1)$

$\boxed{S = \{((b-1)k+1\,;\,-b^2k-(b+1))\}.}$

A.N : Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $9x + 2y = 1$.

$b^2 = 9$ et $b - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{S = \{(2k+1\,;\,-9k-4)\},\ k\epsilon\mathbb{Z}.}$

Exercice 14:

1. $A = 2n+3$, $B = 5n-2$, $n\epsilon\mathbb{N}$.

a) Déterminons deux entiers naturels u et v premiers entre eux tels que $Au - Bv$ soit indépendant de n.

On a $5(2n+3) - 2(5n-2) = 19 \Leftrightarrow 5A - 2B = 19$ et $5 \wedge 2 = 1$, alors $(u,v) = (5,2)$.

b) En déduisons que si A et B ne sont pas étrangers alors $A \wedge B = 19$.

Soit $\delta = A \wedge B$, alors $Au + Bv = \delta$; si $\delta \neq 1$, c'est-à-dire si A et B ne sont pas étrangers, $5A - 2B = 19 \Rightarrow \delta = 19$.

c) En déduisons l'ensemble des entiers n tels que $PGCD(A,B) = 19$.

$5n - 2 = (2n+3) \times 2 + n - 8 \Rightarrow PGCD(A,B) = PGCD(2n+3, n-8)$

$2n + 3 = (n-8) \times 2 + 19 \Rightarrow PGCD(A,B) = PGCD(n-8, 19)$

$PGCD(n-8, 19) = 19$ si $n-8$ est un multiple de 19 $\Leftrightarrow n - 8 = 19k, k\epsilon\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\boxed{PGCD(A,B) = 19 \Leftrightarrow n = 19k + 8, k\epsilon\mathbb{Z}.}$

2. Déterminons tous les entiers naturels a et b dont le PGCD δ et le PPCM μ vérifient l'égalité $\mu - 2\delta = 20$.

Soit $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ avec $a' \wedge b' = 1$; $\mu - 2\delta = 20 \Leftrightarrow \delta a'b' - 2\delta = 20 \Leftrightarrow$

$\delta(a'b' - 2) = 20 \Rightarrow \delta$ et $(a'b' - 2)$ sont des diviseurs de 20 : $D(20) = \{1,2,4,5,10,20\}$.

δ	1	2	4
$a'b'-2$	20	10	5

- $\begin{cases} \delta = 1 \\ a'b' = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 22 \end{cases}, \begin{cases} a' = 22 \\ b' = 1 \end{cases}, \begin{cases} a' = 2 \\ b' = 11 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a' = 11 \\ b' = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow (a\,;b) \epsilon \{(1\,;22),(22\,;1),(2\,;11),(11\,;2)\}$.

- $\begin{cases} \delta = 22 \\ a'b' = 1 \end{cases}$ ne donne pas de solution.

- $\begin{cases} \delta = 2 \\ a'b' = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 12 \end{cases}, \begin{cases} a' = 12 \\ b' = 1 \end{cases}, \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a' = 4 \\ b' = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$(a\,;b) \epsilon \{(2\,;24),(24\,;2),(6\,;8),(8\,;6)\}$.

- $\begin{cases} \delta = 12 \\ a'b' = 2 \end{cases}$ ne donne pas de solution.

- $\begin{cases} \delta = 4 \\ a'b' = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a' = 7 \\ b' = 1 \end{cases} \Rightarrow (a\,;b) \epsilon \{(4\,;28),(28\,;4)\}$.

- $\begin{cases} \delta = 7 \\ a'b' = 4 \end{cases}$ ne donne pas de solution.

Les couples $(a;b)$ tels que $PPCM(a;b) - 2PGCD(a;b) = 20$ sont les couples

$\boxed{(1;22),(22;1),(2;11),(11;2),(2\,;24),(24\,;2),(6\,;8),(8\,;6),(4\,;28),(28\,;4).}$

3. a) Déterminons l'ensemble des couples d'entiers relatifs (α,β) dans chacun des cas suivants : $17\alpha - 19\beta = 2$; $17\alpha - 19\beta = -2$;

- $17\alpha - 19\beta = 2$: une solution particulière $(\alpha_0;\beta_0) = (-1;-1)$;

$\begin{cases} 17\alpha - 19\beta = 2 \\ 17\alpha_0 - 19\beta_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow 17(\alpha - \alpha_0) - 19(\beta - \beta_0) = 0 \Leftrightarrow$

Scanné avec CamScanner

$17(\alpha-\alpha_0)=19(\beta-\beta_0) \Leftrightarrow 17\wedge 19=1 \Rightarrow$ le théorème de Gauss donne

$\begin{cases}\alpha-\alpha_0=19k\\ \beta-\beta_0=17k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=19k+\alpha_0\\ \beta=17k+\beta_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=19k-1\\ \beta=17k-1\end{cases}$; $\boxed{S=\{(19k-1;17k-1)\},k\epsilon\mathbb{Z}.}$

• $17\alpha-19\beta=-2$: une solution particulière est $(\alpha_0;\beta_0)=(1;1)$;

$\begin{cases}17\alpha-19\beta=-2\\ 17\alpha_0-19\beta_0=-2\end{cases} \Rightarrow 17(\alpha-\alpha_0)-19(\beta-\beta_0)=0 \Leftrightarrow$

$17(\alpha-\alpha_0)=19(\beta-\beta_0) \Leftrightarrow 17\wedge 19=1 \Rightarrow$ le théorème de Gauss donne

$\begin{cases}\alpha=19k+\alpha_0\\ \beta=17k+\beta_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=19k+1\\ \beta=17k+1\end{cases}$; $\boxed{S=\{(19k+1\,;\,17k+1)\},k\epsilon\mathbb{Z}.}$

b) Déterminons l'ensemble des entiers n tels que : $\begin{cases}n\equiv 0[17]\\ n\equiv -2[19]\end{cases}$

$\begin{cases}n\equiv 0[17]\\ n\equiv -2[19]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n=17p\\ n=19p-2\end{cases} \Rightarrow 17p-19p=-2 \Rightarrow$ d'après a), $p=19k+1$

$\Rightarrow n=17(19k+1)=323k+17$; $\boxed{S=\{323k+17;k\epsilon\mathbb{Z}\}.}$

c) En déduisons l'ensemble des entiers n tels que $n^2+2n\equiv 0[323]$.

$n^2+2n\equiv 0[323] \Leftrightarrow \begin{cases}n^2+2n\equiv 0[17]\\ n^2+2n\equiv 0[19]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n(n+2)\equiv 0[17]\\ n(n+2)\equiv 0[19]\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}n\equiv 0[17 \;\; ou \;\; n+2\equiv 0[17]]\\ n\equiv 0[19] \;\; ou \;\; n+2\equiv 0[19]\end{cases}$, ce qui donne 4 systèmes :

(1) $\begin{cases}n\equiv 0[17]\\ n\equiv 0[19]\end{cases}$; (2) $\begin{cases}n\equiv 0[17]\\ n+2\equiv [19]\end{cases}$; (3) $\begin{cases}n+2\equiv 0[17]\\ n\equiv 0[19]\end{cases}$; (4) $\begin{cases}n+2\equiv 0[17]\\ n+2\equiv 0[19]\end{cases}$

(1) et (4) donnent $17p=19q \Rightarrow p=19k$ et $q=17k \Rightarrow n=323k, k\epsilon\mathbb{Z}.$

(2) donne $\begin{cases}n\equiv 0[17]\\ n\equiv -2[19]\end{cases} \Rightarrow n=323k+17, k\epsilon\mathbb{Z}$

(3) donne $\begin{cases}n\equiv 0[19]\\ n\equiv -2[17]\end{cases} \Rightarrow 17p-2=19q \Leftrightarrow 17p-19q=2 \Rightarrow p=19k-1$

$\Rightarrow n=17(19k-1)-2 \Leftrightarrow n=323k-19, k\epsilon\mathbb{Z}.$

$n^2+2n\equiv 0[323] \Leftrightarrow \boxed{S=\{323k\,;\,323k+17\,;\,323k-19\},\; k\epsilon\mathbb{Z}.}$

4. a) Trouvons par la méthode de l'algorithme d'Euclide le PGCD des nombres 24101 et 18780.

On a : $24101=18780\times 1+5321$

$18780=5321\times 3+2817$

$5321=2817\times 1+2504$

$2817=2504\times 1+313$

$2504=313\times 8+0.$

Le PGCD de 24101 et 18780 est le dernier reste non nul c'est-à-dire 313

$\boxed{PGDC(24101,18780)=313.}$

b) Trouvons les couples (x,y) d'entiers naturels vérifiant $18780x-24101y=313$ sachant que le couple $(9,7)$ est une solution.

$18780x-24101y=313 \Leftrightarrow 60x-77y=1$. $(x_0\,,\,y_0)=(9\,,7)$ est une solution $\Rightarrow$

$\begin{cases}60x-77y=1\\ 60x_0-77y_0=1\end{cases} \Rightarrow 60(x-x_0)=77(y-y_0)$; $60\wedge 77=1$ et 77 divise $60(x-x_0)$,

d'après le théorème de Gauss, 77 divise $x-x_0 \Rightarrow x-x_0=77k \Leftrightarrow x=77k+x_0$,

$\Rightarrow y=60k+y_0$. $\boxed{(x,y)=(77k+9\,,60k+7),k\epsilon\mathbb{Z}.}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 15:

I - α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple de diviseurs de N.

1) Prouvons que $(\alpha-1)(\beta-1) = 3$.

$N = 2^\alpha \times 3^\beta$ et $N^2 = (2^\alpha \times 3^\beta)^2 = 2^{2\alpha} \times 3^{2\beta}$, alors le nombre de diviseurs de N est égal à $(\alpha+1)(\beta+1)$ et celui de N^2 est égal à $(2\alpha+1)(2\beta+1)$.

On a : $(2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1) \Leftrightarrow$

$4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 2 = 3\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 3 \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 3 \Leftrightarrow$

$\beta(\alpha-1) - (\alpha-1) = 3 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\beta-1) = 3$. CQFD

2) Déduisons en les valeurs de N.

$(\alpha-1)(\beta-1) = 3 \Rightarrow (\alpha-1)$ et $(\beta-1)$ sont des diviseurs de 3.

$\begin{cases} \alpha-1=1 \\ \beta-1=3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha-1=3 \\ \beta-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=2 \end{cases} \Rightarrow N = 2^2 \times 3^4 = 324$ ou $N = 2^4 \times 3^2 = 144$. $\boxed{N = 144 \text{ ou } N = 324.}$

II - $\begin{cases} x \equiv 10\,[23] \\ x \equiv 4\,[7] \end{cases}$. (S)

1) Déterminons un couple d'entiers $(\alpha\,;\beta)$ solution de $23\alpha - 7\beta = 1$.

$23 = 7\times 3 + 2 \Rightarrow 2 = 23 - 3\times 7$; $7 = 2\times 3 + 1 \Rightarrow 1 = 7 - 3\times 2 = 7 - 3(23 - 3\times 7)$

$\Leftrightarrow 7 = 23(-3) + 7(10) \Rightarrow \boxed{(\alpha\,;\beta) = (-3\,;10)}$

2) En déduisons un couple $(u_0; v_0)$ solution de l'équation $23u - 7v = -6$ puis résolvons complètement cette équation.

On a $23(3) - 7(10) = -1 \Leftrightarrow 23(18) - 7(60) = -6 \Rightarrow (u_0; v_0) = (18; 60)$.

$\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ 23u_0 - 7v_0 = -6 \end{cases} \Rightarrow 23(u - u_0) = 7(v - v_0)$; $23 \wedge 7 = 1$ et 7 divise $23(u-u_0)$

$\Rightarrow$ d'après le théorème de Gauss, 7 divise $u - u_0 \Rightarrow u = 7k + u_0 = 7k + 18$ et $v = 23k + 60 \Leftrightarrow u = 7k + 4$ et $v = 23k + 14$. $\boxed{S = \{(7k+4\,;\,23k+14), k\in\mathbb{Z}.\}}$

3) Démontrons que x est solution de (S) si et seulement si, il existe $(u\,;v)$ couples d'entiers vérifiant le système $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$.

$\begin{cases} x \equiv 10\,[23] \\ x \equiv 4\,[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23u + 10 \\ x = 7v + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u \\ 23u + 10 = 7v + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u \\ 23u - 7v = -6 \end{cases}$

En déduisons l'ensemble solution de (S).

$3u - 7v = -6$ donne $u = 7k + 4 \Rightarrow x = 10 + 23(7k+4) = 161k + 14$

$\boxed{S = \{\,161k + 14\,\}, k\in\mathbb{Z}.}$

4) Déterminons la plus petite solution $x_0 \in \mathbb{N}$ divisible par 16.

On a $14 \equiv 14[16]$; $161 \equiv 1[16]$; $161k \equiv k[16]$; $161k + 14 \equiv (k+14)[16] \Leftrightarrow$

$x \equiv (k+14)[16]$; $x \equiv 0[16] \Leftrightarrow (k+14) \equiv 0[16] \Leftrightarrow k \equiv -14[16] \Leftrightarrow k \equiv 2[16]$

$\Leftrightarrow k = 16p + 2$, $p\in\mathbb{N}$. La plus petite valeur de p étant 0, on a $k = 2 \Rightarrow$

$x_0 = 161 \times 2 + 14 = 336$. $\boxed{x_0 = 336.}$

III – Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, A(12; 18), B un point de l'axe $(O;\vec{u})$ et C un point de $(O,\vec{v})$ tels que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$, $x_B = x$ et $y_C = y$.

1) Démontrons que le couple $(x;y)$ est solution de l'équation (E): $2x + 3y = 78$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x-12 \\ -18 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -12 \\ y-18 \end{pmatrix}$. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -12(x-12) - 18(y-18) = 0$

Scanné avec CamScanner

$-12x + 144 - 18y + 324 = 0 \iff 12x + 18y = 468 \iff 2x + 3y = 78$, d'où $(x; y)$ est solution de (E).

2) Détermination de tous les couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a) Montrons que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y des entiers relatifs. L'abscisse de C et l'ordonnée de B étant nuls, trouver les couples de points (B, C) revient à trouver l'abscisse et l'ordonnée des points B et C respectivement, donc à résoudre l'équation $2x + 3y = 78$, où $(x, y) \epsilon \mathbb{Z}^2$.

b) Trouvons une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E) à partir de la définition de B et C. On a $2\times 12 + 3 \times 18 = 78 \iff$ les coordonnées du point A vérifient (E), donc une solution particulière de (E) est $(x_0; y_0) = (12,18)$.

c) Démontrons qu'un couple (x, y) est solution de (E) si et seulement si $(x, y) = (12 + 3k, 18 - 2k)$ où k est un entier relatif.

Résolvons le système $\begin{cases} 2x + 3y = 78 \\ 2x_0 + 3y_0 = 78 \end{cases}$. On a $2(x - x_0) = 3(y_0 - y)$; $2 \wedge 3 = 1$ et 3 divise $2(x - x_0)$, d'après le théorème de Gauss 3, divise $x - x_0 \implies x = 3k + x_0$

2 divise $3(y_0 - y)$, d'après le théorème de Gauss, 2 divise $y_0 - y \implies y = -2k + y_0$.

$(x, y) = (3k + 12; -2k + 18), k \epsilon \mathbb{Z}$.

d) Déterminons le nombre de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$.

$\begin{cases} -6 \leq x \leq 21 \\ -5 \leq y \leq 14 \end{cases} \iff \begin{cases} -6 \leq 3k + 12 \leq 21 \\ -5 \leq -2k + 18 \leq 14 \end{cases} \iff \begin{cases} -18 \leq 3k \leq 9 \\ -23 \leq -2k \leq -4 \end{cases} \iff \begin{cases} -6 \leq k \leq 3 \\ 2 \leq k \leq 11,5 \end{cases}$

$\iff k = 2$ ou $k = 3$: Si $k = 2$, $x = 3 \times 2 + 12 = 18$ et $y = -2 \times 2 + 18 = 14$;

Si $k = 3$, $x = 3 \times 3 + 12 = 21$ et $y = -2 \times 3 + 18 = 12$; $(x, y) \epsilon \{(18,14), (21,12)\}$.

On a deux couples de points (B, C) de coordonnées : $\left(\binom{18}{0}, \binom{0}{14}\right)$; $\left(\binom{21}{0}, \binom{0}{12}\right)$.

Exercice 16:

1. a) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5x + 7y = 123$.

PGCD(5,7) = 1 et 1 divise 123 donc l'équation a des solutions.

On a $5\times 5 + 7 \times 14 = 123$, d'où une solution particulière de l'équation est (5,14).

$\begin{cases} 5x + 7y = 123 \\ 5 \times 5 + 7 \times 14 = 123 \end{cases} \implies 5(x - 5) + 7(y - 14) = 0 \implies 5(x - 5) = 7(14 - y)$;

Le théorème de Gauss permet d'écrire :

$\begin{cases} x = 7k + 5 \\ y = -5k + 14 \end{cases}, k \epsilon \mathbb{Z}$; $S = \{(7k + 5; -5k + 14)\}, k \epsilon \mathbb{Z}$.

b) Déterminons le nombre de voiture de 7 places et de voitures de 5 places qu'il faut pour transporter en même temps 123 passagers.

Soit x le nombre de voiture de 5 places et y le nombre de voiture de 7 places : (x, y) est alors solution de l'équation $5x + 7y = 123$ avec $(x, y) \epsilon \mathbb{N}^2 \implies k \epsilon \{0,1,2\}$.

Si $k = 0, \implies x = 5$ *et* $y = 14$: 5 voitures de 5 places et 14 de 7 places soit 19 voitures au total ; si $k = 1$ ou $k = 2$, le nombre de voitures est supérieur à 19.

Il faut donc 5 voitures de 5 places et 14 voitures de 7 places pour transporter en même temps 123 passagers.

2. On considère les nombres $A = 7k + 2$ et $B = 3k + 5$ où k est un entier naturel.

Scanné avec CamScanner

a) Montrons que PGCD(A, B) divise 29.

L'algorithme d'Euclide permet d'écrire:

$7k+2 = (3k+5)\times 2 + k - 8 \iff A = 2B + k - 8$

$3k+5 = (k-8)\times 3 + 29 \iff B = (k-8)\times 3 + 29$, d'où

$PGCD(A,B) = PGCD(B, k-8) = PGCD(k-8, 29)$; si $\delta = PGCD(A,B)$, alors δ divise 29.

b) Déterminons l'entier naturel k tel que $PGCD(A,B) = 29$.

$PGCD(k-8, 29) = 29 \implies k-8$ est un multiple de $29 \iff k-8 = 29p \iff$ $\boxed{k = 29p+8, p\in\mathbb{Z}.}$

3. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $11x + 8y = 79$.

a) Montrons que si (x,y) est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$

(x,y) est solution de $(E) \iff 11x + 8y = 79 \iff 8y = -11x + 79 \iff 8y \equiv 79[11]$

$\iff 8y \equiv 2[11] \iff 8y \equiv 24[11] \iff y \equiv 3[11]$.

b) Résolvons alors l'équation (E).

$y \equiv 3[11] \iff y = 11k+3 \implies 11x + 8(11k+3) = 79 \iff 11x + 8(11k) = 55 \iff$

$x = -8k+5 \implies \boxed{S = \{(-8k+5\,;11k+3)\}, k\in\mathbb{Z}.}$

c) Déterminons le nombre de pièces de chaque lot.

Soit x le nombre de pièces du premier lot, y le nombre de pièces du deuxième lot et z le nombre de pièces du troisième lot.

On a $\begin{cases} x+y+z = 41 \\ 4800x + 3600y + 400z = 48000 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 41-x-y \\ 48x + 36y + 4(41-x-y) = 480 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} z = 41-x-y \\ 44x + 32y = 316 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 41-x-y \\ 11x + 8y = 79 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -8k+5 \\ y = 11k+3 \\ z = -3k+33 \end{cases} (x,y,z)\in\mathbb{N}^3$ pour $k = 0$,

d'où $x = 5$; $y = 3$; $z = 33$.

On a 1er lot : 5 pièces ; 2ème lot : 3 pièces et 3ème lot : 33 pièces.

4. a) Déterminons les couples (x,y) d'éléments de $(\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant le système $\begin{cases} x+y = 40 \\ x\wedge y = 5 \end{cases}$.

Soit $x = 5x'$ et $y = 5y'$ avec $x'\wedge y' = 1$, alors on a $\begin{cases} x'+y' = 8 \\ x'\wedge y' = 1 \end{cases} \implies$

$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' = 7 \\ y' = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 35 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 35 \\ y = 5 \end{cases}$;

$\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' = 5 \\ y' = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 15 \\ y = 25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 25 \\ y = 15 \end{cases}$.

$S = \{(5,35), (35,5), (15,25), (25,15)\}$.

b) Le nombre maximum de lots identiques qu'il peut former est $PGCD(15,25) = 5$

c) Déterminons le nombre de cahiers et de bics.

Soit x le nombre de cahiers et y le nombre de bics ;

On a $x+y = 40$, avec $x < y$ et le nombre de lots est $5 \implies x = 15$ et $y = 25$.

Exercice 17:

I-1) a) Déterminons le reste de la division par 7 de l'entier 3^n, $n\in\mathbb{N}$.

$3^0 \equiv 1[7]$; $3 \equiv 3[7]$; $3^2 \equiv 2[7]$; $3^3 \equiv 6[7]$; $3^4 \equiv 4[7]$; $3^5 \equiv 5[7]$; $3^6 \equiv 1[7]$

Si $n = 6k$, $r = 1$; Si $n = 6k+1$, $r = 3$; Si $n = 6k+2$, $r = 2$;

Si $n = 6k+3$, $r = 6$; Si $n = 6k+4$, $r = 4$; Si $n = 6k+5$, $r = 5$.

Scanné avec CamScanner

En déduisons le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$.
$506390 = 72341 \times 7 + 3 \Rightarrow 506390 \equiv 3[7] \Leftrightarrow (506390)^{128} \equiv 3^{128}[7] \Leftrightarrow$
$(506390)^{128} \equiv 3^{21\times 6+2}[7] \equiv 2[7] \Rightarrow$ le reste de la division euclidienne par 7 de $(506390)^{128}$ est 2.

b) Déterminons x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.
$\overline{651x} = 6 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 10 + x$; $10 \equiv 3[7]$, $10^2 \equiv 2[7]$, $10^3 \equiv 6[7] \Rightarrow$
$(506390)^{128} + \overline{651x} \equiv 0[7] \Leftrightarrow (2 + 6 \times 6 + 5 \times 2 + 3 + x) \equiv 0[7] \Leftrightarrow$
$(2 + 1 + 3 + 3 + x) \equiv 0[7] \Leftrightarrow (x + 2) \equiv 0[7] \Leftrightarrow x \equiv 5[7] \Leftrightarrow x = 7k + 5,\ k\epsilon\mathbb{Z}$
et $0 \leq x \leq 9 \Rightarrow 0 \leq 7k + 5 \leq 9 \Leftrightarrow -5 \leq 7k \leq 4 \Leftrightarrow -0{,}71 \leq k \leq 0{,}57 \Rightarrow$
$k = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5.}$

2) a) Déterminons le PGCD de 21590 et 9525.
Après décomposition en produit de facteurs premiers on trouve :
$21590 = 2 \times 5 \times 17 \times 127$ et $9525 = 3 \times 5^2 \times 127 \Rightarrow$ PGCD $(21590; 9525) = 5 \times 127$
$= 635$; $\boxed{\text{PGCD}\,(21590\,;9525) = 635.}$

b) Déterminons l'ensemble des entiers relatifs x pour lesquels $34x \equiv 2\,[15]$.
$34x \equiv 2\,[15] \Leftrightarrow 17x \equiv 1[15] \Leftrightarrow 2x \equiv 1[15] \Leftrightarrow 2x \equiv 16[15] \Leftrightarrow x \equiv 8[15] \Leftrightarrow$
$\boxed{x = 15k + 8,\ k\epsilon\mathbb{Z}.}$

c) Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $21590x + 9525y = 1270$.
PGCD $(21590\,;9525) = 635$ et $635 / 1270$, alors l'équation devient : $34x + 15y = 2$
$34x \equiv 2[15] \Rightarrow x = 15k + 8$ (d'après b)) d'où $34(15k + 8) + 15y = 2 \Leftrightarrow$
$15y = 2 - 34(15k + 8) \Leftrightarrow 15y = 2 - 34\times 8 - 34(15k) \Leftrightarrow 15y = -270 - 34(15k)$
$15y = -34(15k) + 15 \times 18 \Leftrightarrow y = -34k - 18$; $\boxed{S = \{(15k + 8\,; -34k - 18), k\epsilon\mathbb{Z}\}.}$

d) le chiffre des unités de l'entier naturel 7^{1980} dans le système décimal.
$7^0 \equiv 1[10]$; $7 \equiv 7[10]$; $7^2 \equiv 9[10]$; $7^3 \equiv 3[10]$; $7^4 \equiv 1[10]$
$7^{1980} = 7^{4\times 495} = (7^4)^{495}$; $7^{1980} \equiv (1)^{485}[10] \Leftrightarrow 7^{1980} \equiv 1[10] \Rightarrow$ le chiffre des unités de l'entier 7^{1980} est 1.

II - 1) Le système de numération est le système décimal.

a) Déterminons l'entier naturel $N = \text{PGCD}\,(17787\,;689\,;297)$
$17787 = 3 \times 7^2 \times 11$; $689 = 13 \times 53$; $297 = 3^3 \times 11 \Rightarrow \boxed{N = 1}$

b) Résolvons l'équation : $(x, y)\epsilon\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $13x - 84y = 7$.
(7,1) est une solution de l'équation proposée car $13 \times 7 - 84 = 7 \Rightarrow$
$13(x - 7) - 84(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 13(x - 7) = 84(y - 1)$; $13 \wedge 84 = 1$ et 13 divise $84(y - 1) \Rightarrow 13$ divise $y - 1 \Rightarrow y = 13k + 1 \Rightarrow x = 84k + 7,\ k\epsilon\mathbb{Z}$.
$\boxed{S = \{(84k + 7\,;\ 13k + 1)\},\ k\epsilon\mathbb{Z}.}$

2) a) Déterminons tous les couples (a, b) d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tels que : $\begin{cases} a \times b = \dot{0} \\ a - b = \dot{5} \end{cases}$.
a et b sont les diviseurs de $\dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. On a : $\dot{6} \times \dot{2} = \dot{0}$; $\dot{4} \times \dot{3} = \dot{0}$
$\dot{6} \times \dot{4} = \dot{0}$; $\dot{8} \times \dot{3} = \dot{0}$; $\dot{8} \times \dot{6} = \dot{0}$; $\dot{9} \times \dot{4} = \dot{0}$; $\dot{9} \times \dot{8} = \dot{0}$; $\dot{10} \times \dot{6} = \dot{0}$.
Seuls les couples (8 , 3) et (9 , 4) vérifient $a - b = \dot{5}$, alors l'ensemble des couples (a, b) de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ vérifiant le système est $\boxed{S = \{(8\,,3), (9\,,4)\}.}$

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + \dot{3}x - \dot{4} = \dot{0}$.

Scanné avec CamScanner

$x^2 + \dot{3}x - \dot{4} = \dot{0} \Leftrightarrow (x - \dot{1})(x + \dot{4}) = \dot{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \dot{1})(x + \dot{4}) = \dot{0} \\ (x + \dot{4}) - (x - \dot{1}) = \dot{5} \end{cases}$

• $x - \dot{1} = \dot{0}$ ou $x + \dot{4} = \dot{0} \Leftrightarrow x = \dot{1}$ ou $x = \dot{8}$;

• $x + \dot{4} = \dot{8}$ et $x - \dot{1} = \dot{3} \Rightarrow x = \dot{4}$; • $x + \dot{4} = \dot{9}$ et $x - \dot{1} = \dot{4} \Rightarrow x = \dot{5}$

$\boxed{S = \{\dot{1}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{8}\}.}$

c) Démontrons que, pour tout entier naturel n, on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$.

Démontrons par récurrence $P(n)$: $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$;

- vérifions $P(0)$: $3 \times 5 + 2 = 17 \equiv 0[17]$, donc $P(0)$ est vraie ;
- démontrons que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

$P(n)$ vraie $\Leftrightarrow 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k$, $k \in \mathbb{Z}$;

$P(n+1)$: $3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4} = 3 \times 25 \times 5^{2n+1} + 8 \times 2^{3n+1} =$

$= 3(17 + 8) \times 5^{2n+1} + 8 \times 2^{3n+1} = 17 \times 3 \times 5^{2n+1} + 8(3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}) =$

$= 17 \times 3 \times 5^{2n+1} + 8 \times 17k = 17(3 \times 5^{2n+1} + 8k) \equiv 0[17] \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Alors si $P(n)$ est vraie, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, , on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$.

III –1) Déterminons la distance entre deux poteaux.

Les poteaux sont à égale distance avec un poteau à chaque sommet du lot de forme trapézoïdale, alors la distance entre deux poteaux est d = PGCD(30,21,18,12) et PGCD(30, 21, 18, 12) = 3 ; $\boxed{d = 3m.}$

2) Déterminons le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

Soit n ce nombre ; $n = \frac{1}{3}(30 + 21 + 18 + 12) = 27$, $\boxed{n = 27 \text{ poteaux.}}$

Exercice 18:

1. a) Déterminons le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

$4^0 \equiv 1[7]$; $4 \equiv 4[7]$; $4^2 \equiv 2[7]$; $4^3 \equiv 1[7]$; si $n = 3k$, $r = 1$; si $n = 3k + 1$, $r = 4$; si $n = 3k + 2$, $r = 2$.

b) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7.

$851 = 121 \times 7 + 4 \Rightarrow 851 \equiv 4[7] \Rightarrow 851^n \equiv 4^n[7]$; $851^{2n} \equiv 4^{2n}[7]$;

$851^{3n} \equiv 4^{3n}[7] \equiv 1[7] \Rightarrow A \equiv (1 + 4^{2n} + 4^n + 2)[7]$;

- $n = 3k$, $A \equiv (1 + 1 + 1 + 2)[7] \equiv 5[7]$;
- $n = 3k + 1$, $A \equiv (1 + 2 + 4 + 2)[7] \equiv 2[7]$;
- $n = 3k + 2$, $A \equiv (1 + 4 + 2 + 2)[7] \equiv 2[7]$.

Le reste de la division euclidienne de A par 7 est 2 ou 5 ; $A \equiv r[7]$ avec $r \in \{2, 5\}$.

c) $B = \overline{2103211}^4$.

Déterminons dans le système décimal le reste de la division du nombre B par 7.

$B = 2 \times 4^6 + 4^5 + 3 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 4 + 1 = 2 \times 4^{3\times2} + 4^{3+2} + 3 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 4 + 1$

$B \equiv (2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 2 + 4 + 1)[7] \equiv 16[7] \equiv 2[7]$

Le reste de la division euclidienne de B par 7 est 2.

2. a) Trouvons trois naturels a, b, c différents de 1, premiers entre eux deux à deux et tels que $a \times b \times c = 495$.

$495 \equiv 5 \times 9 \times 11$ et en plus $5 \wedge 9 = 9 \wedge 11 = 5 \wedge 11 = 1$, alors $\boxed{(a, b, c) = (5, 9, 11)}$

Scanné avec CamScanner

b) x, y, z sont des chiffres de la base dix, $A = \overline{x13y8z}$ en base dix.

Déterminons tous les triplets (x, y, z) pour lesquels A est multiple de 495.

$$A \equiv 0[495] \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv 0[5] \\ A \equiv 0[9] \\ A \equiv 0[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \text{ ou } z = 5 \\ (x+1+3+y+8+z) \equiv 0[9] ; \\ 1+y+z-x-3-8 \equiv 0[11] \end{cases}$$

- si $z = 0$, $\begin{cases} x+y+3 \equiv 0[9] \\ y-x-10 \equiv 0[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3 \equiv 0[9] \\ y-x+1 \equiv 0[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3 = 9p \\ x-y+1 = 11q \end{cases}$

$0 \le x \le 9$ et $0 \le y \le 9 \Rightarrow 0 \le x+y \le 18 \Leftrightarrow 3 \le x+y+3 \le 21 \Leftrightarrow$

$-3 \le 9p \le 21 \Rightarrow p \in \{1,2\}$; $-9 \le -x \le 0 \Leftrightarrow -9 \le y-x \le 9 \Leftrightarrow -8 \le 11q \le 10$

$\Rightarrow q = 0$. On résoud les systèmes (1) $\begin{cases} x+y+3 = 9 \\ y-x+1 = 0 \end{cases}$ ou (2) $\begin{cases} x+y+3 = 18 \\ y-x+1 = 0 \end{cases}$

(1) donne $2y = 5 \Rightarrow$ pas de solution

(2) donne $2y = 14 \Rightarrow y = 7$ et $x = 8$;

- si $z = 5$, $\begin{cases} x+y+8 = 9k \\ y-x+6 = 11k' \end{cases}$; $8 \le x+y+8 \le 26 \Leftrightarrow 8 \le 9k \le 26 \Rightarrow k \in \{1,2\}$

$-9 \le x-y \le 9 \Leftrightarrow -3 \le x-y+6 \le 15 \Leftrightarrow -3 \le 11k' \le 15 \Rightarrow k' \in \{0,1\}$

On résoud les systèmes suivants : (3) $\begin{cases} x+y+8 = 9 \\ y-x+6 = 0 \end{cases}$; (4) $\begin{cases} x+y+8 = 18 \\ y-x+6 = 0 \end{cases}$;

(5) $\begin{cases} x+y+8 = 9 \\ y-x+6 = 11 \end{cases}$; (6) $\begin{cases} x+y+8 = 18 \\ y-x+6 = 11 \end{cases}$

(3), (5) et (6) ne donnent pas de solution dans $\mathbb{N}$;

(4) donne $2y = 4 \Rightarrow y = 2$ et $x = 8$;

$\boxed{(x,y,z) \in \{(8,7,0),(8,2,5)\}.}$

3. a) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17q - 11p = 2$.

Une solution particulière de cette équation est le couple $(q_0, p_0) = (4,6)$; on a :

$\begin{cases} 17q - 11p = 2 \\ 17q_0 - 11p_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow 17(q-q_0) = 11(p-p_0)$; $17 \wedge 11 = 1$, le théorème de Gauss permet d'écrire : $p = 17k + p_0$ et $q = 11k + q_0 \Rightarrow \boxed{S = \{(11k+4 ; 17k+6)\}.}$

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \bar{1} = \bar{0}$.

$x^2 - \bar{1} = \bar{0} \Leftrightarrow (x-\bar{1})(x+\bar{1}) = \bar{0}$; 187 n'est pas premier, on a donc :

$x - \bar{1} = \bar{0}$ ou $x + \bar{1} = \bar{0} \Leftrightarrow x = \bar{1}$ ou $x = \overline{-1} = \overline{186}$; d'autre part, on a

$(x-\bar{1})(x+\bar{1}) = \bar{0} \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0[187] \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0[11 \times 17]$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = (11 \times 17)\alpha$; posons $\alpha = q \times p$ avec $(q,p) \in \mathbb{Z}^2$, on a donc

(1) $\begin{cases} x-1 = 11p \\ x+1 = 17q \end{cases}$ ou (2) $\begin{cases} x-1 = 17q \\ x+1 = 11p \end{cases}$; (1) donne $17q - 11p = 2 \Rightarrow$

$p = 17k + 6 \Rightarrow x = 11(17k+6) + 1 = 187k + 67 \Leftrightarrow x \equiv \overline{67}$

(2) donne $17q - 11p = -2 \Rightarrow (q_0, p_0) = (-4, -6) \Rightarrow p = 17k - 6 \Rightarrow$

$x = 11(17k-6) - 1 = 187k - 67 \Leftrightarrow x = \overline{-67} \Leftrightarrow x = \overline{120}$; l'ensemble solution de l'équation $x^2 - \bar{1} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ est $\boxed{S = \{\bar{1}, \overline{67}, \overline{120}, \overline{186}\}}$

4. a) Soit l'entier naturel $N = \overline{25x3}^{13}$.

- Déterminons les valeur de x pour lesquelles N est divisible par 6.

$N = 2 \times 13^2 + 5 \times 13^2 + 13x + 3$; $13 \equiv 1[6] \Rightarrow 13^n \equiv 1[6]$, $n \in \mathbb{Z}$.

$N \equiv 0[6] \Leftrightarrow (2+5+x+3) \equiv 0[6] \Leftrightarrow (x+4) \equiv 0[6] \Leftrightarrow x \equiv 2[6] \Leftrightarrow x = 6k+2$

Scanné avec CamScanner

avec $k\epsilon\mathbb{Z}$ et $0 \le x \le 12 \Leftrightarrow 0 \le 6k+2 \le 12 \Leftrightarrow -2 \le 6k \le 10 \Leftrightarrow k\epsilon\{0,1\}$.
$k=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \Rightarrow N=\overline{2523}^{13}$; $k=1 \Rightarrow \boxed{x=8} \Rightarrow N=\overline{2583}^{13}$.

• Déterminons les valeurs de x pour lesquelles N est divisible par 4.
$13 \equiv 1[4] \Rightarrow 13^n \equiv 1[4]$, $n\epsilon\mathbb{Z}$. $N \equiv 0[4] \Leftrightarrow (2+5+x+3) \equiv 0[4] \Leftrightarrow x \equiv 2[4]$
$\Leftrightarrow x = 4k+2$ avec $k\epsilon\mathbb{Z}$ et $0 \le x \le 12 \Leftrightarrow 0 \le 4k+2 \le 12 \Leftrightarrow -2 \le 4k \le 10$
$\Leftrightarrow k\epsilon\{0,1,2\}$. $k=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \Rightarrow N=\overline{2523}^{13}$; $k=1 \Rightarrow \boxed{x=6} \Rightarrow N=\overline{2563}^{13}$
$k=2 \Rightarrow \boxed{x=10=A} \Rightarrow N=\overline{25A3}^{13}$

• Déterminons x pour que N soit divisible par 24.
$N \equiv 0[24] \Leftrightarrow \begin{cases} N \equiv 0[6] \\ N \equiv 0[4] \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=2.}$

5. a) Déterminons l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}$ qui vérifient $3x \equiv 23[7]$.
$3x \equiv 23[7] \Leftrightarrow 3x \equiv 30[7] \Leftrightarrow x \equiv 10[7] \Leftrightarrow x \equiv 3[7] \Leftrightarrow \boxed{x=7k+3, k\epsilon\mathbb{Z}.}$

b) En déduisons l'ensemble des couples $(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2$ tels que : $3x-7y=23$.
$3x-7y=23 \Leftrightarrow 3x=7y+23 \Leftrightarrow 3x \equiv 23[7] \Rightarrow x=7k+3$, $k\epsilon\mathbb{Z} \Rightarrow$
$3(7k+3)-7y=23 \Leftrightarrow 3(7k)+9-23=7y \Leftrightarrow 7y=3(7k)-2\times 7 \Leftrightarrow$
$y=3k-2$; $\boxed{S=\{(7k+3\,;3k-2), k\epsilon\mathbb{Z}\}.}$

Exercice 19:

I- $A=\overline{211}$, $B=\overline{312}$ et $C=\overline{133032}$ dans le système de numération de base a.

1) Expliquons pourquoi a doit être strictement supérieur à 3.
Dans le système de numération de base a les a chiffres nécessaires sont tous inférieurs à a. Dans notre cas le plus grand chiffre étant 3 alors $a > 3$.

2) a) Sachant que $C = A \times B$, montrons que $a^3-3a^2-2a-8=0$
Dans le système décimal on a : $A=2a^2+a+1$; $B=3a^2+a+2$ et
$C=a^5+3a^4+3a^3+3a+2$. $C=A\times B \Leftrightarrow$
$a^5+3a^4+3a^3+3a+2=(2a^2+a+1)(3a^2+a+2)=6a^4+5a^3+8a^2+3a+2$
$\Leftrightarrow a^5-3a^4-2a^3-8a^2=0 \Leftrightarrow a^2(a^3-3a^2-2a-8)=0$, $a\neq 0 \Rightarrow$
$a^3-3a^2-2a-8=0$. (R)

b) En déduisons que a divise 8.
$a^3-3a^2-2a-8=0 \Leftrightarrow a^3-3a^2-2a=8 \Leftrightarrow a(a^2-3a-2)=8 \Leftrightarrow aq=8$
$\Rightarrow a$ divise 8.

c) Déterminons alors a.
a est un diviseur de 8 supérieur à 3 et qui vérifie la relation $(R) \Rightarrow \boxed{a=4.}$

3) Écrivons 214 en base 4. Après divisions successives par 4 on a $214=\overline{3112}^4$.

4) a) Écrivons A, B et C dans le système décimal
$a=4 \Rightarrow A=\overline{211}^4=2\times 16+5=37$; $B=\overline{312}^4=3\times 16+6=54$ et .
$C=37\times 54=1998$. $\boxed{A=37\ ;\ B=54\ ;\ C=1998}$

b) Montrons alors que $C=A\times B=ppcm(A,B)$.
On a : $pgcd(37,54)=1$ et $pgcd(37,54)\times ppcm(37,54)=37\times 54 \Leftrightarrow$
$1\times ppcm(37,54)=37\times 54 \Leftrightarrow ppcm(37,54)=37\times 54 \Leftrightarrow ppcm(A,B)=C$.
En déduisons que l'équation $Ax+By=1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
On a $pgcd(A,B)=1$ et 1 divise 1, alors l'équation $Ax+By=1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Scanné avec CamScanner

5) Dans $\mathbb{Z}^2$: $37x + 54y = 1$.

a) Vérifions que $(19\,;-13)$ est une solution de cette équation.

$37 \times 19 + 54(-13) = 703 - 702 = 1$, donc $(19;-13)$ est solution.

b) Résolvons cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.

$\begin{cases} 37x + 54y = 1 \\ 37(19) + 54(-13) = 1 \end{cases} \Rightarrow 37(x-19) + 54(y+13) = 0 \Leftrightarrow$

$37(x-19) = 54(-y-13)$; $pgcd(37,54) = 1 \Rightarrow$ le théorème de Gauss permet d'écrire $x - 19 = 54k$ et $-y - 13 = 37k \Leftrightarrow x = 54k + 19$ et $y = -37k - 13$.

$\boxed{S = \{(54k+19; -37k-13), k \epsilon \mathbb{Z}.\}}$

II - $m_1 = \overline{1x00y2^8}$; $m_2 = \overline{x1y003^7}$; une mangue coute 5F.

1) Déterminons les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puissent, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

On pose $\begin{cases} m_1 \equiv 0[5] \\ m_2 \equiv 0[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8^5 + 8^4 x + 8y + 2 \equiv 0[5] \\ 7^5 x + 7^4 + 7^3 y + 3 \equiv 0[5] \end{cases}$

$8 \equiv 3[5]$; $8^4 \equiv 1[5]$; $8^5 \equiv 3[5]$; $7 \equiv 2[5]$; $7^3 \equiv 3[5]$; $7^4 \equiv 1[5]$; $7^5 \equiv 2[5]$.

Le système devient $\begin{cases} (3 + x + 3y + 2) \equiv 0[5] \\ (2x + 1 + 3y + 3) \equiv 0[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3y) \equiv 0[5] \\ (2x + 3y + 4) \equiv 0[5] \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x + 3y \equiv 0[5] \\ 2x + 3y \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1[5] \\ 2y \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1[5] \\ 2y \equiv 6[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1[5] \\ y \equiv 3[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5k + 1 \\ y = 5k' + 3 \end{cases}$,

avec $(k, k') \epsilon \mathbb{Z}^2$. On a $\begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 5k + 1 \le 6 \\ 0 \le 5k' + 3 \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 5k \le 5 \\ -3 \le 5k' \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} k \epsilon \{0,1\} \\ k' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$; il faut donc $x = 6$ et $y = 3$ pour que les deux commerçantes puissent acheter un nombre maximum de mangues.

2) Déterminons le montant que dispose chacune des commerçantes.

$m_1 = 8^5 + 6 \times 8^4 + 3 \times 8 + 2 = 32768 + 24576 + 26 = 57370$F

$m_2 = 6 \times 7^5 + 7^4 + 3 \times 7^3 + 3 = 100842 + 2401 + 1032 = 104275$F

Awa a 57370F et Fanta 104275F.

En déduisons le nombre mangues que chacune d'elles peut acheter.

Awa peut acheter $57370 \div 5 = 11474$ mangues et Fanta peut acheter $104275 \div 5 =$ 20855 mangues.

3) a) Décomposons m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers.

$m_1 = 57370 = 2 \times 5 \times 5737$ et $m_2 = 5^2 \times 43 \times 97$

b) En déduisons le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 puis le pgcd (m_1, m_2).

Le nombre de diviseurs de m_1 est égal à $2 \times 2 \times 2 = 8$ et celui de m_2 est égal à $3 \times 2 \times 2 = 12$; pgcd $(m_1, m_2) = 5$

4) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1 u + m_2 v = 5$ où u et v sont deux entiers relatifs.

$m_1 u + m_2 v = 5 \Leftrightarrow 57370u + 104275v = 5 \Leftrightarrow 11474u + 20855v = 1$.

Trouvons une solution particulière.

	1	1	4	2	13	2	4	1	6
20855	11474	9381	2093	1009	75	34	7	6	1
9381	2093	1009	75	34	7	6	1	0	

On a :

Scanné avec CamScanner

$20855 = \mathbf{11474} \times 1 + 9381 \implies 9381 = 20855 - 1 \times \mathbf{11474}$;
$11474 = 9381 \times 1 + 2093 \implies 2093 = \mathbf{11474} - 9381 \times 1 = 2 \times \mathbf{11474} - \mathbf{20855}$;
$9381 = 2093 \times 4 + 1009 \implies 1009 = -9 \times \mathbf{11474} + 5 \times \mathbf{20855}$;
$2093 = 1009 \times 2 + 75 \implies 75 = 2093 - 1009 \times 2 = 20 \times \mathbf{11474} - 11 \times \mathbf{20855}$;
$1009 = 75 \times 13 + 34 \implies 34 = 1009 - 75 \times 13 = -269 \times \mathbf{11474} + 148 \times \mathbf{20855}$;
$75 = 34 \times 2 + 7 \implies 7 = 75 - 34 \times 2 = 558 \times \mathbf{11474} - 307 \times \mathbf{20855}$;
$34 = 7 \times 4 + 6 \implies 6 = 34 - 7 \times 4 = -2501 \times \mathbf{11474} + 1376 \times \mathbf{20855}$;
$7 = 6 \times 1 + 1 \implies 1 = 7 - 6 = 3059 \times \mathbf{11474} - 1683 \times \mathbf{20855}$.
$\mathbf{11474}(3059) + \mathbf{20855}(-1683) = 1 \implies$ une solution particulière est donc $(3059 ; -1683)$; résolvons l'équation.

$\begin{cases} 11474u + 20855v = 1 \\ 11474(3059) + 20855(-1683) = 1 \end{cases} \implies 11474(u - 3059) = 20855(-v - 1683)$

$pgcd(11474; 20855) = 1$, alors le théorème de Gauss permet d'écrire :

$\begin{cases} u - 3059 = 20855k \\ -v - 1683 = 11474k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} u = 20855k + 3059 \\ v = -11474k - 1683 \end{cases}$

$$S = \{(20855k + 3059 ; -11474k - 1683), k \in \mathbb{Z}\}.$$

III-1 a) Démontrons que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés.

Soit $p = \frac{a^2+a}{2}$ et $q = \frac{b^2+b}{2}$ deux nombres triangulaires ; si $n = p + q$ alors

$4n + 1 = 4p + 4q + 1 = 2(a^2 + a) + 2(b^2 + b) + 1 =$

$= 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 2\left[\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2\right] =$

$= \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 =$

$= \left(a + \frac{1}{2} + b + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{1}{2}\right) + \left(a + \frac{1}{2} - b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{1}{2}\right) =$

$= (a + b + 1)^2 + (a - b)^2$ $\boxed{4n + 1 = (a + b + 1)^2 + (a - b)^2}$

b) $n = 3 \implies 4n + 1 = 4 \times 3 + 1 = 13 = 2^2 + 3^2 =$ *somme de deux carrés.*

Etudions la réciproque de la propriété a).

On vérifie facilement que si $4n + 1 = (a + b + 1)^2 + (a - b)^2$,

alors $n = \frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2} =$ somme de deux nombres triangulaires.

2. Déterminons les entiers naturels diviseurs stricts de 220.

$220 = 2^2 \times 5 \times 11 \implies$ les diviseurs stricts de 220 sont :1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110

3. Vérifions que : a) 220 et 284 sont amiables.

Les diviseurs strictes de $284 = 2^2 \times 71$ sont : 1,2,4,71,142 ;

$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$, et $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 =$

$= 284$; alors 220 et 284 sont amiables.

b) 17296 et 18416 sont amiables.

$17296 = 2^4 \times 23 \times 47 \implies$ les diviseurs stricts de 17296 sont : 1, 2, 4, 8, 16, 23, 46, 47, 92, 94, 184, 188, 368, 376, 752, 1081, 2162, 4324, 8648 ;

$18416 = 2^4 \times 1151 \implies$ les diviseurs stricts de 18416 sont : 1, 2, 4, 8, 16, 1151, 2302, 4604, 9208.

Scanné avec CamScanner

$1+2+4+8+16+23+46+47+92+94+184+188+368+376+752+1081$
$+2162+4324+8648=18416$ et
$1+2+4+8+16+1151+2302+4604+9208=17296$; alors les nombres 17296 et 18416 sont amiables.

4. a) Le nombre $28=2^2\times 7 \Rightarrow$ ses diviseurs stricts sont $1,2,4,7,14$;
$1+2+4+7+14=28$, donc 28 est parfait.

b) Déterminons un entier p premier tel que le nombre 2^4p soit parfait.
Les diviseurs stricts de 2^4p sont :
$1, 2, 4, 8, 16, p, 2p, 4p, 8p$. 2^4p est parfait $\Rightarrow$
$2^4p=1+2+4+8+16+p+2p+4p+8p$
$\Leftrightarrow 16p=31+15p \Leftrightarrow \boxed{p=31}$

	0	1	2	3	4
2^α	1	2	4	8	16
p^β	1	p			

c) n et p deux entiers naturels, avec p premier.
Trouvons l'expression de p en fonction de n pour que 2^np soit parfait.
Les diviseurs stricts de 2^np sont $1, 2, 2^2, \dots, 2^n, p, 2p, 2^2p, \dots, 2^{n-1}p$;
2^np parfait $\Leftrightarrow 2^np=1+2+\cdots+2^n+p(1+2+\cdots+2^{n-1}) \Rightarrow$
$2^np=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}+\frac{1-2^n}{1-2}p \Leftrightarrow 2^np=2^{n+1}-1+(2^n-1)p \Rightarrow \boxed{p=2^{n+1}-1}$
Donnons la liste des nombres parfaits de cette forme pour $n<10$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
2^np		6	28		496		8128			

1 ; 15 ; 63 ; 255 ; 511 et 1023 ne sont pas premiers, donc les nombres parfaits pour $n<1$ sont 6 ; 28 ; 496 et 8128.

Exercice 20:

1. Déterminons le PPCM des couples d'entiers naturels suivants :
(4452 , 3604) ; (1455 , 335) ; (6974 , 9287) et (492, 180).
- $4452=2^2\times 3\times 7\times 53$ et $3604=2^2\times 17\times 53 \Rightarrow$
PPCM $(4452, 3604)=2^2\times 3\times 7\times 17\times 53=75684$
- $1455=3\times 5\times 97$ et $335=5\times 67 \Rightarrow$ PPCM $(1455, 335)=3\times 5\times 67\times 97=97485$
- $6974=2\times 11\times 317$ et $9287=37\times 251 \Rightarrow$
PPCM $(6974, 9287)=2\times 11\times 317\times 37\times 251=64767538$.
- $492=2^2\times 123$ et $180=2^2\times 3^2\times 5 \Rightarrow$ PPCM $(492, 180)=36\times 5\times 123=22140$.

2. Déterminons le PGCD des couples d'entiers naturels suivants :
(9287, 1455) ; (4452 , 3604) ; (7875 , 975) ; (28420 ; 4116) ; $(n\ ;\ 2n+1)$ et $(3n+1\ ;\ 2n+1)$.
- $9287=37\times 251$ et $1455=3\times 5\times 97 \Rightarrow$ PGCD$(9287, 1455)=1$.
- PGCD$(4452, 3604)=2^2\times 53=212$.
- $7875=3^2\times 5^3\times 7$ et $975=3\times 5^2\times 13 \Rightarrow$ PGCD$(7875, 975)=3\times 5^2=75$.
- $28420=2^2\times 5\times 7^2\times 29$ et $4116=2^2\times 3\times 7^3 \Rightarrow$
PGCD $(28420 ; 4116)=2^2\times 7^2=4\times 49=196$.
- $2n+1=n\times 2+1$ et $n=1\times n+0 \Rightarrow$ PGCD$(n\ ;\ 2n+1)=1$.
- $3n+1=(2n+1)\times 1+n$; $2n+1=n\times 2+1 \Rightarrow$ PGCD$(3n+1\ ;\ 2n+1)=1$.

Scanné avec CamScanner

3. Démontrons le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.
Soit a, b, c trois entiers relatifs non nuls.
Démontrons que si a divise bc et a et b sont étrangers, alors a divise c. (Th de Gauss)
Si a et b sont étrangers, alors le théorème de Bézout dit qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $au + bv = 1$; (1)
a divise $bc \Rightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $bc = ka$ (2).
Multiplions (1) par c ; il vient : $auc + bvc = c \Leftrightarrow auc + kav = c$ $(d'après\ (2)) \Leftrightarrow a(uc + kv) = c$, alors a divise c.

4. Le document comporte 4350 lignes sur plusieurs pages et une page comporte 34 lignes.
$4350 = 34 \times 127 + 32$
Le nombre de lignes figurant sur la dernière page est 32.
Il faut 2 lignes pour compléter la dernière page.
Le nombre de page utilisées par ce document est 128.

5. a) La taille maximale de ces dalles carrées est le PGCD de 361 et 475.
$361 = 19^2$ et $475 = 19 \times 25 \Rightarrow$ PGCD $(361, 475) = 19$.
La taille maximale des dalles carrées est 19cm.
b) Déterminons alors le nombre total de dalles.
Le nombre total de dalles est $19 \times 25 = 475$.

6. a) Il y a des moments (autres que le départ!) où les voitures se croisent sur la ligne de départ : ces moments correspondent aux multiples communs de 36 et 30.
Le PPCM de 26 et 30 étant 180, le premier croisement à lieu en 3heures.
b) $180 = 36 \times 5 \Rightarrow$ la voiture A aura effectué 5 tours
$180 = 30 \times 6 \Rightarrow$ la voiture B aura effectué 6 tours.

Exercice 21:

I- f l'application de $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ définie par $f(\dot{x}) = \dot{17}\dot{x} + \dot{9}$.

1) Trouvons l'inverse de $\dot{17}$.
On a $\dot{17} \times \dot{2} = \dot{34} = \dot{1} \Rightarrow$ l'inverse de $\dot{17}$ dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ est $\dot{2}$.

2) Résolvons l'équation $f(\dot{x}) = \dot{0}$.
$f(\dot{x}) = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{17}\dot{x} + \dot{9} = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{x} + \dot{9} \times \dot{2} = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{x} = -\dot{18} = \dot{15}$, $\boxed{S = \{\dot{15}\}}$

3) Montrons que f est une bijection puis donnons sa bijection réciproque.
$f(\dot{x}) = \dot{17}\dot{x} + \dot{9} \Leftrightarrow \dot{y} = \dot{17}\dot{x} + \dot{9} \Leftrightarrow \dot{2}\dot{y} = \dot{x} + \dot{18} \Leftrightarrow \dot{x} = \dot{2}\dot{y} + \dot{15}$; $\forall \dot{y} \in \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$, l'équation $f(\dot{x}) = \dot{y}$ admet une solution unique $\dot{x}$ dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$, alors f est une bijection de $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ et sa bijection réciproque est définie par
$\boxed{f^{-1}(\dot{x}) = \dot{2}\dot{x} + \dot{15}}$.

II-1) a) Démontrons qu'il existe un couple (a, b) d'entiers relatifs tel que $45a - 16b = 1$.
On a PGCD$(45, 16) = 1$, alors d'après le théorème de Bézout il existe un couple (a, b) d'entiers relatifs tel que $45a - 16b = 1$.

b) Résolvons alors dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $45x - 16y = 2$.
$45 = \mathbf{16} \times 2 + 13 \Rightarrow 13 = \mathbf{45} - 2 \times \mathbf{16}$
$16 = 13 \times 1 + 3 \Rightarrow 3 = \mathbf{16} - 13 = 3 \times \mathbf{16} - \mathbf{45}$
$13 = 3 \times 4 + 1 \Rightarrow 1 = 13 - 4 \times 3 = 5 \times \mathbf{45} - 14 \times \mathbf{16}$

Scanné avec CamScanner

$5\times 45-14\times 16=1 \Leftrightarrow 10\times 45-28\times 16=2 \Rightarrow$ une solution particulière de l'équation est $(x_0;y_0)=(10;28)$, d'où on a :

$\begin{cases}45x-16y=2\\45x_0-16y_0=2\end{cases} \Rightarrow 45(x-x_0)=16(y-y_0)$; $45\wedge 16=1 \Rightarrow$ le théorème de Gauss permet d'écrire $x-x_0=16k$ et $y-y_0=45k$ soit $x=16k+x_0$ et $y=45k+y_0$, $k\in\mathbb{Z}$. $\boxed{S=\{(16k+10;45k+28),k\in\mathbb{Z}\}}$

2) a) Démontrons que le couple (u,v) est une solution de (E).

Le nombre de jours effectués par le camion A entre j_1 et j_0 est $90u$ et celui effectué par le camion B entre j_1 et j_0 est $32v+4$;

$j_1-j_0=90u=32v+4 \Leftrightarrow 90u-32v=4 \Leftrightarrow 45u-16v=2$. On en déduit que le couple (u,v) est une solution de (E).

b) Déterminons le couple (u,v).

$(u,v)=(16k+10;45k+28), k\in\mathbb{N}$; la prochaine entrée simultanée des camions correspond à $k=0 \Rightarrow u=10$ et $v=28 \Rightarrow j_1-j_0=900$ jours.

III- 1) a) Démontrons que 193 est un nombre premier.

$\sqrt{193}=13{,}89$ et 193 n'est divisible par aucun des nombres premiers inferieur à 13,89, alors 193 est premier.

b) $a\in\mathbb{N}$ et $a<192$. Montrons que $a^{192}\equiv 1[193]$.

$a^{192}=a^{193-1}$; $a<193$ et 193 est premier $\Rightarrow a$ et 193 sont étrangers, alors d'après le petit théorème de Fermat, $a^{193-1}\equiv 1[193] \Leftrightarrow a^{192}\equiv 1[193]$.

2) (E): $83x-192y=1$.

a) Vérifions que le couple $(155,67)$ est solution de (E).

$83\times 155-192\times 67=12865-12864=1$, alors $(155,67)$ est solution de (E).

b) Résolvons l'équation (E).

$\begin{cases}83x-192y=1\\83(155)-192(67)=1\end{cases} \Rightarrow 83(x-155)=192(y-67)$; $83\wedge 192=1$, d'après le théorème de Gauss on a $x-155=192k$ et $y-67=83k$ soit $x=192k+155$ et $y=83k+67$; $\boxed{S=\{(192k+155;83k+67),k\in\mathbb{Z}\}.}$

3) A est l'ensemble des 193 entiers naturels inférieurs ou égaux à 192

$f: a\in A \longrightarrow$ le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193.

$g: a\in A \longrightarrow$ le reste de la division euclidienne de a^{155} par 193.

a) Démontrons $g(f(a))\equiv a^{83\times 155}[193]$.

$f(a)=a^{83}$ car $a^{83}\equiv a^{83}[193]$ et $g(a)=a^{155}$ car $a^{155}\equiv a^{155}[193]$

$g(f(a))=g(a^{83})=(a^{83})^{155}=a^{83\times 155} \Rightarrow g(f(a))\equiv a^{83\times 155}[193]$. CQFD

En déduisons que pour tout $a\in A$ on a : $g(f(a))=a$.

$a^{83\times 155}=a^{192\times 67+1}=(a^{192})^{67}\times a \Rightarrow g(f(a))\equiv 1\times a[193] \Rightarrow g(f(a))=a$.

b) Déterminons $f\circ g$:

$f\circ g=f(g(a))=f(a^{155})=a^{83\times 155} \Rightarrow f(g(a))=a$.

Exercice 22:

I- 1) (E) : $11x-7y=5$, $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.

a) Justifions, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u$ tels que $11u-7v=1$.

Scanné avec CamScanner

PGCD(11,7) = 1 ⇒ 11 et 7 sont premiers entre eux, alors le théorème de Bézout dit qu'il existe un couple (u,v) d'entiers relatifs tel que $11u - 7v = 1$.

Trouvons (u,v): on a $11 \times 2 - 7 \times 3 = 1 \Rightarrow (u,v) = (2,3)$.

b) En déduisons une solution particulière de l'équation (E).

$11 \times 2 - 7 \times 3 = 1 \Leftrightarrow 11 \times 10 - 7 \times 15 = 5 \Rightarrow (x_0, y_0) = (10,15)$

c) Résolvons l'équation (E).

$\begin{cases} 11x - 7y = 5 \\ 11x_0 - 7y_0 = 5 \end{cases} \Rightarrow 11(x - x_0) = 7(y - y_0) \Rightarrow$ le théorème de Gauss permet d'écrire $x = 7k + x_0$ et $y = 11k + y_0 \Rightarrow S = \{(7k + 10\,;\, 11k + 15),\ k \in \mathbb{Z}\}$

d) (D): $11x - 7y - 5 = 0$, (C) l'ensemble des points M(x,y) du plan tels que $0 \le x \le 50$ et $0 \le y \le 50$.

Déterminons le nombre de points de la droite (D) appartenant à (C) et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

$0 \le x \le 50 \Leftrightarrow 0 \le 7k + 10 \le 50 \Leftrightarrow -10 \le 7k \le 40 \Leftrightarrow k \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

$0 \le y \le 50 \Leftrightarrow 0 \le 11k + 15 \le 50 \Leftrightarrow -15 \le 11k \le 35 \Leftrightarrow k \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

$k = -1 \Rightarrow x = 3$ et $y = 4$; $k = 0 \Rightarrow x = 10$ et $y = 15$

$k = 1 \Rightarrow x = 17$ et $y = 26$; $k = 2 \Rightarrow x = 24$ et $y = 37$

$k = 3 \Rightarrow x = 31$ et $y = 48$. Il existe 5 points de la droite (D) appartenant à (C) de coordonnées $(3;4), (10;15), (17;26), (24;37), (31;48)$.

2) (F): $11x^2 - 7y^2 = 5$

a) Démontrons que si le couple (x,y) est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2[5]$.

(x,y) solution de $(F) \Rightarrow 11x^2 - 7y^2 = 5 \Rightarrow$

$11x^2 = 7y^2 + 5$ et $7y^2 = 11x^2 - 5 \Leftrightarrow 11x^2 \equiv 5[7]$ et $7y^2 \equiv 6[11] \Leftrightarrow 11x^2 \equiv 33[7]$ et $7y^2 \equiv 28[11] \Leftrightarrow x^2 \equiv 3[7]$ et $y^2 \equiv 4[11] \Leftrightarrow x^2 = 7k + 3$ et $y^2 = 11k + 4$; $x^2 - 2y^2 = 7k + 3 - 2(11k + 4) = 7k - 22k - 5 = -15k - 5 \equiv 0[5]$

$\Leftrightarrow x^2 \equiv 2y^2[5]$ CQFD

b) Recopions et complétons les deux tableaux.

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

c) Les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 5 sont 0, 1 ou 4 et les restes possibles de $2y^2$ par 5 sont 0, 2 ou 3.

d) En déduisons que si (x,y) est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

(x,y) est solution de $(F) \Leftrightarrow x^2 \equiv 2y^2[5] \Leftrightarrow x^2$ et $2y^2$ ont le même reste dans la division euclidienne par 5 et, d'après les tableaux, ce reste est forcement 0.

On en déduit que $x^2 \equiv 0[5]$ et $2y^2 \equiv 0[5] \Leftrightarrow x \equiv 0[5]$ et $y \equiv 0[5] \Leftrightarrow x$ et y sont des multiples de 5.

3) Démontrons que si x et y sont des multiples de 5, alors (x,y) n'est pas solution de (F).

x et y multiples de 5 $\Rightarrow x = 5\alpha$ et $y = 5\beta$, α et β des entiers relatifs ; alors (F) devient : $11(5\alpha)^2 - 7(5\beta)^2 = 5 \Leftrightarrow 55\alpha^2 - 35\beta^2 = 1$; PGCD(55;35) = 5 et 5 ne

Scanné avec CamScanner

divise pas 1, alors l'équation n'a pas de solution $\Rightarrow (x,y)$ n'est pas solution de (F).

Exercice 23:

I- La suite (U_n) est définie, pour tout entier naturel $n\epsilon\mathbb{N}^*$, par $U_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

1) Calculons les six premiers termes de la suite (U_n).

$U_0 = 1+1+1-1 = 2$; $U_1 = 2+3+6-1 = 10$; $U_2 = 4+9+36-1 = 48$

$U_3 = 8+27+216-1 = 250$; $U_4 = 16+81+1296-1 = 1392$;

$U_5 = 32+243+7776-1 = 8050$

2) Montrons que, $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*, U_n$ est pair.

On a : $2^n \equiv 0[2]$; $3^n \equiv 1[2]$; $6^n \equiv 0[2]$; $-1 \equiv 1[2] \Rightarrow U_n \equiv 0[2] \Rightarrow U_n$ est pair

3) Montrons que, pour tout entier naturel n pair et non nul, U_n est divisible par 4.

n pair $\Leftrightarrow n = 2k, k\epsilon\mathbb{N} \Rightarrow U_n = 2^{2k} + 3^{2k} + 6^{2k} - 1 \Leftrightarrow U_n = 4^k + 9^k + 36^k - 1 \Rightarrow$

$U_n \equiv (0+1+0+3)[4] \Leftrightarrow U_n \equiv 0[4] \Leftrightarrow U_n$ est divisible par 4.

(E) l'ensemble des nombres 1ers qui divisent au moins un terme de la suite (U_n).

4) D'après la question 1), 2 divise U_0 , 3 divise U_2 , 5 divise U_1 et 7 divise U_5 ; alors les entiers 2 , 3 , 5 , 7 appartiennent à (E).

5) p est un nombre premier strictement supérieur à 3.

a) Montrons que : $6\times 2^{p-2} \equiv 3[p]$ et $6\times 3^{p-2} \equiv 2[p]$.

- 2 et p étant deux nombres premiers alors ils sont étrangers ; d'après le petit théorème de Fermat $2^{p-1} \equiv 1[p] \Leftrightarrow 3\times 2^{p-1} \equiv 3[p] \Leftrightarrow 6\times 2^{-1}\times 2^{p-1} \equiv 3[p]$ $\Leftrightarrow 6\times 2^{p-2} \equiv 3[p]$.
- 3 et p étant deux nombres premiers alors ils sont étrangers ; d'après le petit théorème de Fermat $3^{p-1} \equiv 1[p] \Leftrightarrow 2\times 3^{p-1} \equiv 2[p] \Leftrightarrow 6\times 3^{-1}\times 3^{p-1} \equiv 2[p]$ $\Leftrightarrow 6\times 3^{p-2} \equiv 2[p]$.

b) En déduisons que $6U_{p-2} \equiv 0[p]$.

$6U_{p-2} = 6\times 2^{p-2} + 6\times 3^{p-2} + 6\times 6^{p-2} - 6 = 6\times 2^{p-2} + 6\times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$

$= 6\times 2^{p-2} + 6\times 3^{p-2} + 2^{p-1}\times 3^{p-1} - 6 \Rightarrow$

$6U_{p-2} \equiv (3+2+1\times 1-6)[p] \Leftrightarrow 6U_{p-2} \equiv 0[p]$.

c) $6U_{p-2} \equiv 0[p] \Rightarrow p$ divise $6U_{p-2}$ et $\mathrm{PGCD}(6,p) = 1$ (*car p est premier et* > 3), alors d'après le théorème de Gauss, p divise U_{p-2} d'où p appartient à (E).

II- Propriétés du nombre de Fermat F_n défini par : $F_n = 2^{2^n} + 1$, où $n\epsilon\mathbb{N}$.

1) a) Calculons F_0, F_1, F_2 *et* F_3 puis vérifions que ces nombres sont premiers.

$F_0 = 2+1 = 3$; $F_1 = 2^2 + 1 = 5$; $F_2 = 2^4 + 1 = 17$; $F_3 = 2^8 + 1 = 257$.

3 , 5 , 17 et 257 sont des nombres premiers.

b) Vérifions que F_5 est divisible par 641.

$F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 6700417\times 641 \Rightarrow F_5$ est divisible par 641.

2) Démontrons que, $\forall n\epsilon\mathbb{N}$, $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$.

$F_n = 2^{2^n} + 1 \Leftrightarrow 2^{2^n} = F_n - 1$; $F_{n+1} = 2^{2\times 2^n} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 = (F_n - 1)^2 + 1$.

3) Démontrons que, $\forall n\epsilon\mathbb{N}^* - \{1\}$, l'écriture décimale de F_n se termine par 7.

Démontrons par récurrence que, $\forall n\epsilon\mathbb{N}^* - \{1\}$, $F_n \equiv 7[10]$:

- Vérifions que la propriété est vraie pour $n = 2$.

$F_2 = 17 \equiv 7[10]$ vraie ;

Scanné avec CamScanner

• Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 2$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $F_{n+1} \equiv 7[10]$.
$F_n \equiv 7[10] \Leftrightarrow F_n - 1 \equiv 6[10] \Leftrightarrow (F_n - 1)^2 \equiv 6[10] \Leftrightarrow (F_n - 1)^2 + 1 = 7[10] \Leftrightarrow F_{n+1} \equiv 7[10]$, donc si $F_n \equiv 7[10]$, alors $F_{n+1} \equiv 7[10]$;
• Conclusion : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^* - \{1\}$, l'écriture décimale de F_n se termine par 7.

4) a) $k \epsilon \mathbb{N}^*$ et $a = 2^{2^n}$, démontrons que $\frac{F_{n+k}-2}{F_n} = \frac{a^{2^k}-1}{a+1}$.

$F_{n+k} = 2^{2^{n+k}} + 1 = 2^{2^n \times 2^k} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^{2^k} + 1 = a^{2^k} + 1 \Rightarrow F_{n+k} - 2 = a^{2^k} - 1$ et

$F_n = 2^{2^n} + 1 = a + 1 \Rightarrow \frac{F_{n+k}-2}{F_n} = \frac{a^{2^k}-1}{a+1}$.

b) en déduisons que F_n divise $F_{n+k} - 2$.

$F_{n+k} - 2 = \frac{a^{2^k}-1}{a+1} \times F_n \Leftrightarrow F_{n+k} - 2 = q \times F_n$, avec $q = \frac{a^{2^k}-1}{a+1} \Rightarrow F_{n+k} - 2$ est un multiple de $F_n \Leftrightarrow F_n$ divise $F_{n+k} - 2$.

5) Déduisons de la question précédente que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.
$F_{n+k} - 2 = qF_n \Leftrightarrow F_{n+k} = qF_n + 2 \Rightarrow \text{PGCD}(F_{n+k}; F_n) = \text{PGCD}(F_n; 2)$; 2 est premier et F_n n'est pas un multiple de 2, alors $\text{PGCD}(F_n; 2) = 1 \Leftrightarrow \text{PGCD}(F_{n+k}; F_n) = 1 \Rightarrow$ F_n et F_{n+k} sont alors deux nombres de Fermat distincts, premiers entre eux.

III–1) Salle à manger : L = 454cm ; l = 375cm ; c = 33cm (coté d'un carreau carré).
Calculons le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.
On a : $454 = 33 \times \mathbf{13} + 25$ et $375 = 33 \times \mathbf{11} + 12 \Rightarrow$ le nombre de carreaux non découpés posés est $13 \times 11 = 143$.

2) Cuisine : L = 455cm ; l = 385cm ;
a) Liste des diviseurs de 455 et de 385.
$455 = 5 \times 91 \Rightarrow \mathfrak{D}(455) = \{1; 5; 91; 455\}$
$385 = 5 \times 7 \times 11 \Rightarrow \mathfrak{D}(385) = \{1; 5; 7; 11; 35; 55; 77; 385\}$
b) Liste des diviseurs communs à 455 et 385 : $\mathfrak{D}(455) \cap \mathfrak{D}(385) = \{1; 5\}$.
c) Le plus grand côté de la dalle à utiliser est alors c = 5cm.

3) Dalles rectangulaires : L = 24cm ; l = 15cm
a) Liste des multiples de 24 inférieurs à 400.
$\mathcal{M}(24)$: 0; 24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216; 240; 264; 288; 312; 336; 360; 384
Liste des multiples de 15 inférieurs à 400.
$\mathcal{M}(15)$: 0 ;15 ;30 ;45 ;60 ;75 ;90 ;105 ;120 ;135 ;150 ;165 ;180 ;195 ;210 ;225 ;240 ; 255 ;270 ;285 ;300 ;315 ;330 ;345 ;360 ;375 ;390.
b) Liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400.
$\mathcal{M}(24) \cap \mathcal{M}(15) = \{0; 120; 240; 360\}$
c) la longueur du côté de la plus petite pièce carrée pouvant être carrelée est 1,2m.

Exercice 24:

I–1) a et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Démontrons que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
On a : $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})$; si $a^n - 1$ est premier alors 1 est

Scanné avec CamScanner

un diviseur de $a^n-1 \Rightarrow a-1=1 \Rightarrow a=2$, et $a-1$ est un diviseur de a^n-1 si et seulement si n est premier. (voir exercice 25,III- 2) a))

2) $M_n = 2^n - 1$, avec n premier.

a) Vérifions que M_2, M_3, M_5 et M_7 sont premiers.

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$; $M_3 = 2^3 - 1 = 7$; $M_5 = 2^5 - 1 = 31$; $M_7 = 2^7 - 1 = 127$.

On a bien $3 ; 7 ; 31 ; 127$ qui sont des nombres premiers.

b) $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89 \Rightarrow M_{11}$ n'est pas premier.

II–1) (E): $8x + 5y = 1$ où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Donnons une solution particulière de (E).

On a : $8 \times 2 + 5 \times (-3) = 1 \Rightarrow$ une solution particulière de (E) est $(2 ; -3)$.

b) Résolvons (E).

$\begin{cases} 8x + 5y = 1 \\ 8 \times 2 + 5 \times (-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 8(x-2) = 5(-y-3)$; $8 \wedge 5 = 1$ alors le théorème de Gauss permet d'écrire $x - 2 = 5k$ et $-y - 3 = 8k \Rightarrow S = \{(5k+2 ; -8k-3), k \in \mathbb{Z}\}$

2) $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$, $N \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

a) Montrons que le couple (a, b) est solution de (E).

On a $N = N \Leftrightarrow 8a + 1 = 5b + 2 \Leftrightarrow 8a - 5b = 1 \Rightarrow (a, b)$ est solution de (E).

b) Déterminons le reste de la division euclidienne de N par 40.

$N = 8a + 1 = 8(5k + 2) + 1 = 40k + 17 \Leftrightarrow N = 40k + 17 \Rightarrow$ le reste de la division euclidienne de N par 40 est 17.

3) a) Résolvons l'équation : $8x + 5y = 100$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

On a $8(5) + 5(12) = 100 \Rightarrow$ une solution particulière de l'équation est $(5; 12) \Rightarrow$

$\boxed{S = \{(5k + 5 ; -8k + 12), k \in \mathbb{Z}\}.}$

b) Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes.

On a $8x + 5y = 100 \Rightarrow x = 5k + 5$ et $y = -8k + 12$; alors $\boxed{(x; y) \in \{(5; 12), (15; 4)\}.}$

III–1) $168x + 20y = 4$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

On a $PGCD(168 ; 20) = 4$ et 4 divise 4 donc l'équation a des solutions.

2) a) Déterminons deux entiers relatifs m et p tels que : $42m + 5p = 1$.

$42 = 5 \times 8 + 2 \Rightarrow 2 = 42 - 8 \times 5$

$5 = 2 \times 2 + 1 \Rightarrow 1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2(42 - 8 \times 5) = -2 \times 42 + 17 \times 5 \Rightarrow$

$\boxed{(m; p) = (-2; 17)}$

b) En déduisons deux entiers relatifs u et v tels que : $42u + 5v = 2$.

$42(-2) + 5(17) = 1 \Leftrightarrow 42(-4) + 5(34) = 2 \Rightarrow \boxed{(u; v) = (-4 ; 34).}$

c) Démontrons que le couple (x, y) est solution de $42x + 5y = 2$ si et seulement si $42(x + 4) = 5(34 - y)$.

$\begin{cases} 42x + 5y = 2 \\ 42(-4) + 5(34) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 42(x + 4) + 5(y - 34) = 0 \Leftrightarrow 42(x + 4) = 5(34 - y).$

d) Déterminons tous les couples (x, y) solutions de l'équation $42x + 5y = 2$.

$42 \wedge 5 = 1$ en plus $42/5(34 - y)$ et $5/42(x + 4)$, alors $42/(34 - y)$ et $5/(x + 4) \Rightarrow x + 4 = 5k$ et $34 - y = 42k \Leftrightarrow x = 5k - 4$ et $y = -42k + 34$.

$\boxed{(x ; y) = \{(5k - 4 ; -42k + 34), k \in \mathbb{Z}\}.}$

Scanné avec CamScanner

3) Déduisons du 2) les couples d'entiers relatifs (x,y) solutions de l'équation $(42x+5y-3)(42x+5y+3)=-5$.

$(42x+5y-3)(42x+5y+3)=-5 \Leftrightarrow (42x+5y)^2-9=-5 \Leftrightarrow (42x+5y)^2=4$

$42x+5y=2$ ou $42x+5y=-2$

$42x+5y=2 \Rightarrow (x;y)=\{(5k-4\,;-42k+34), k\epsilon\mathbb{Z}\}$;

$42x+5y=-2 \Rightarrow (x;y)=\{(5k'+4\,;-42k'-34), k'\epsilon\mathbb{Z}\}$.

$\boxed{S=\{(5k-4\,;-42k+34),(5k'+4\,;-42k'-34), k \text{ et } k'\epsilon\mathbb{Z}\}.}$

Exercice 25:

I- 2003 est un nombre premier.

1) a)Déterminons deux entiers relatifs u et v tels que $123u-2003v=1$.

$2003=123\times16+35 \Rightarrow 35=\mathbf{2003}-\mathbf{123}\times16$;

$123=35\times3+18 \Rightarrow 18=123-35\times3=49\times\mathbf{123}-3\times\mathbf{2003}$;

$35=18\times1+17 \Rightarrow 17=35-18=-65\times\mathbf{123}+4\times\mathbf{2003}$;

$18=17\times1+1 \Rightarrow 1=18-17=\mathbf{123}\times114-\mathbf{2003}\times7 \Rightarrow \boxed{(u;v)=(114;7)}$

b)En déduisons un entier relatif k_0 tel que : $123k_0\equiv1[2003]$.

$123\times114-2003\times7=1 \Leftrightarrow 123\times114=2003\times7+1 \Leftrightarrow 123\times114\equiv1[2003]$

$\Rightarrow \boxed{k_0=114}$

c) Montrons que, pour tout entier relatif x, $123x\equiv456[2003] \Leftrightarrow x\equiv456k_0[2003]$.

$123x\equiv456[2003] \Leftrightarrow 123k_0x\equiv456k_0[2003] \Leftrightarrow (2003\times7+1)x\equiv456k_0[2003]$

$\Leftrightarrow x\equiv456k_0[2003]$.

d) Déterminons l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x\equiv456[2003]$.

$123x\equiv456[2003] \Leftrightarrow x\equiv456\times114[2003] \Leftrightarrow x\equiv1909[2003] \Leftrightarrow$

$x=1909+2003k \Rightarrow \boxed{S=\{2003k+1909, k\epsilon\mathbb{Z}\}.}$

e) Montrons qu'il existe un unique entier n tel que : $1\leq n\leq2002$ et $123n\equiv456[2003]$.

$1\leq n\leq2002 \Leftrightarrow 1\leq2003k+1909\leq2002 \Leftrightarrow -1909\leq2003k\leq93 \Leftrightarrow$

$-0{,}95\leq k\leq0{,}04 \Rightarrow k=0 \Rightarrow \boxed{n=1909.}$

2) Soit a un entier tel que : $1\leq a\leq2002$.

a) Déterminons PGCD $(a,2003)$.

$a\leq2002 \Rightarrow a$ n'est pas un multiple de 2003 $\Rightarrow$ PGCD $(a,2003)=1$.

En déduisons qu'il existe un entier m tel que : $am\equiv1[2003]$.

D'après le théorème de Gauss, si PGCD $(a,2003)=1$, alors il existe un couple $(m;p)$ d'entiers relatifs tels que $am+2003p=1 \Leftrightarrow am=-2003p+1 \Leftrightarrow am\equiv1[2003]$.

b) Montrons que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que : $0\leq x\leq2002$; $ax\equiv b[2003]$.

$am\equiv1[2003] \Leftrightarrow amb\equiv b[2003] \Leftrightarrow ax\equiv b[2003]$, avec $x=mb$.

II- Démontrons le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Voir solution exercice 20.

1) $(S):\begin{cases}n\equiv13[19]\\ n\equiv6[12]\end{cases}$. Démontrons qu'il existe un couple (u,v) d'entiers relatifs tels que $19u+12v=1$. On a $19\wedge12=1$ et 1 divise 1, alors d'après le théorème de Bézout, il existe un couple (u,v) d'entiers relatifs tels que $19u+12v=1$.

Scanné avec CamScanner

Vérifions que $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

$\begin{cases} N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13(1 - 19u) + 6(19u) = 13 + 19(-7u) \equiv 13[19] \\ N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13(12v) + 6(1 - 12v) = 6 + 12(7v) \equiv 6[12] \end{cases} \Leftrightarrow$

N est solution de (S).

2) a) n_0 une solution de (S), vérifions que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ (S').

$\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n_0 \equiv 13[19] \end{cases} \Rightarrow n - n_0 \equiv 0[19]$; $\begin{cases} n \equiv 6[12] \\ n_0 \equiv 6[12] \end{cases} \Rightarrow n - n_0 \equiv 0[12]$,

$\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - n_0 \equiv 0[19] \\ n - n_0 \equiv 0[12] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$.

b) Démontrons que le système (S') équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

$\begin{cases} n - n_0 \equiv 0[19] \\ n - n_0 \equiv 0[12] \end{cases} \Leftrightarrow n - n_0$ est à la foi divisible par 19 et par 12, alors $n - n_0$ est divisible par $12 \times 19 \Leftrightarrow n - n_0 \equiv 0[12 \times 19] \Leftrightarrow n \equiv n_0[12 \times 19]$.

3) a) Trouvons un couple (u, v) solution de l'équation $19u - 12v = 1$ et calculons N.

$19 = 12 + 7 \Rightarrow 7 = 19 - 12$

$12 = 7 + 5 \Rightarrow 5 = 12 - 7 = 2 \times 12 - 19$

$7 = 5 + 2 \Rightarrow 2 = 7 - 5 = 19 - 12 - 2 \times 12 + 19 = 2 \times 19 - 3 \times 12$

$5 = 2 \times 2 + 1 \Rightarrow 1 = 5 - 2 \times 2 = 2 \times 12 - 19 - 4 \times 19 + 6 \times 12 = 19(-5) + 12(8)$

$(u, v) = (-5, 8) \Rightarrow N = 13 \times 12 \times 8 - 5 \times 6 \times 19 = 1248 - 570 = 678.$

b) Déterminons l'ensemble des solutions de (S).

N étant une solution de (S), on a $n \equiv N[12 \times 19] \Leftrightarrow n \equiv 678[228] \Leftrightarrow$

$n \equiv 222[228] \Leftrightarrow n = 228k + 222$; $\boxed{S = \{228k + 222, k \in \mathbb{Z}\}}$

4) On divise n par $228 = 12 \times 19$ le reste de cette division est $r = 222$.

III-1) Montrons que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{N}$, $(x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = x^k - 1$.

$1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison x, alors $1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} = \frac{1 - x^k}{1 - x} = \frac{x^k - 1}{x - 1} \Leftrightarrow$

$(x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = x^k - 1$.

2) a) $n \in \mathbb{N}^*$ et d un diviseur positif de n : $n = dk$; $a \geq 2$.

Montrons que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

$a^n - 1 = a^{dk} - 1 = (a^d)^k - 1 = (a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + \cdots + (a^d)^{k-1}) \Leftrightarrow$

$a^n - 1 = q(a^d - 1)$ avec $q = 1 + a^d + a^{2d} + \cdots + (a^d)^{k-1}$, alors $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b) En déduisons que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

$2^{2004} - 1 = (2^{12})^{167} - 1 = (2^{12} - 1)(1 + 2^{12} + 2^{24} + \cdots + 2^{12 \times 166}) = (2^{12} - 1)q$

$2^{12} - 1 = 4095$ et $4095 = 585 \times 7 = 455 \times 9 = 65 \times 63$, alors $2^{12} - 1$ est divisible par 7, par 63 et par 9, par conséquent $2^{2004} - 1$, qui est un multiple de $2^{12} - 1$, est divisible par 7, par 63 et par 9.

3) m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

a) $m = dm'$ et $n = dn'$. Montrons qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.

$m = dm'$ et $n = dn' \Rightarrow \text{PGCD}(m', n') = 1 \Rightarrow$ d'après le théorème de Bézout, il

Scanné avec CamScanner

existe un couple (u, v) tel que $m'u - n'v = 1 \iff dm'u - dn'v = d \iff mu - nv = d$.

b) On suppose u et v strictement positifs :

Montrons que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$.

$(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^{mu} - 1 - a^{nv+d} + a^d = a^{mu} - a^{nv+d} + a^d - 1 =$

$= a^{mu} - a^{mu} + a^d - 1 = a^d - 1$.

Montrons ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

$(a^{mu} - 1) = (a^{nv} - 1)a^d + a^d - 1$

PGCD$(a^{mu} - 1 ; a^{nv} - 1)$ = PGCD$(a^{nv} - 1 ; a^d - 1)$; nv est un multiple de d, d'après La question 2) a), $a^{nv} - 1 = a^{dkv} - 1 = (a^d)^{kv} - 1$ est un multiple de $a^d - 1$ $\Rightarrow$ PGCD$(a^{nv} - 1 ; a^d - 1) = a^d - 1$, alors PGCD$(a^{mu} - 1 ; a^{nv} - 1) = a^d - 1$.

c) Calculons, PGCD $(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1)$.

PGCD $(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1) = 2^{63-60} - 1 = 2^3 - 1 = 7$. PGCD $(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1) = 7$

Exercice 26:

I-1) a) p un entier naturel. Montrons que l'un des trois nombres p, $p + 10$, $p + 20$ et un seulement est divisible par 3.

1er cas : p est un multiple de 3 $\Rightarrow$ $p = 3k, k\epsilon\mathbb{N}$; $p + 10 = 3k + 10 \equiv 1[3]$; $p + 20 = 3k + 20 \equiv 2[3]$. Seul p est divisible par 3 dans ce cas.

2ème cas : p n'est pas un multiple de 3 $\Rightarrow$ $p = 3k + r, k\epsilon\mathbb{N}$ et $1 \leq r \leq 2$.

- $r = 1$, $p = 3k + 1 \equiv 1[3]$; $p + 10 = 3k + 11 \equiv 2[3]$; $p + 20 = 3k + 21 \equiv 0[3]$. Si $r = 1$, alors seul $p + 20$ est divisible par 3.
- $r = 2$, $p = 3k + 2 \equiv 2[3]$; $p + 10 = 3k + 12 \equiv 0[3]$; $p + 20 = 3k + 22 \equiv 1[3]$. Si $r = 2$, alors seul $p + 10$ est divisible par 3.

Conclusion : si p un entier naturel, seul un des trois nombres p, $p + 10$, $p + 20$ est divisible par 3.

b) Déterminons les trois nombres a, b, c sachant qu'ils sont premiers.

a, b, c sont, dans cet ordre, les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 10, alors les trois nombres sont a, $a + 10$, $a + 20$.

- Si a est premier et multiple de 3, alors $a = 3 \Rightarrow a + 10 = 13$ et $a + 20 = 23$ et 3, 13, 23 sont premiers.
- Si a n'est pas multiple de 3, l'un des nombres $a + 10$, $a + 20$ est un multiple de 3 par conséquent il n'est pas premier.

Conclusion : les trois nombres sont $a = 3$, $b = 13$, $c = 23$.

2) (E) l'ensemble des triplets d'entiers relatifs (u, v, w) tels que : $3u + 13v + 23w = 0$.

a) Montrons que, pour un tel triplet, $v \equiv w[3]$.

$3u + 13v + 23w = 0 \iff 13v + 23w = -3u$, ; $13 \wedge 23 = 1$ et 1 divise $-3u$:

$23 = 13 + 10 \Rightarrow 10 = 23 - 13$

$13 = 10 + 3 \Rightarrow 3 = 13 - 10 = 2 \times 13 - 23$

$10 = 3 \times 3 + 1 \Rightarrow 1 = 10 - 3 \times 3 = 23 - 13 - 6 \times 13 + 3 \times 23 = 13(-7) + 23(4) \iff$

$13(7 \times 3u) + 23(-4 \times 3u) = -3u \Rightarrow v = 21u$ et $w = -12u$. On a $v \equiv 0[3]$ et $w \equiv 0[3]$, alors $v \equiv w[3]$.

b) $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$; $0 \leq r \leq 2$.

Scanné avec CamScanner

Montrons que les éléments de (E) sont de la forme :
$(-13k-23k'-12r\ ;\ 3k+r\ ;\ 3k'+r)$.
$3u=-13v-23w=-13(3k+r)-23(3k'+r) \Leftrightarrow 3u=-13\times 3k-23\times 3k'-36r$
$\Leftrightarrow u=-13k-23k'-12r$, alors les éléments de (E) sont de la forme :
$(u,v,w)=(-13k-23k'-12r\ ,\ 3k+r\ ,\ 3k'+r)$.

II- Pour tout entier naturel $p\geq 2$, on pose $N_p=1\cdots 1$ où 1 apparait p fois.
On rappelle que $N_p=10^{p-1}+10^{p-2}+\cdots+10^0$.

1) $N_2=11$ est premier ; $N_3=111=3\times 37 \Rightarrow N_3$ n'est pas premier ;
$N_4=1111=11\times 101 \Rightarrow N_4$ n'est pas premier.

2) Prouvons que $N_p=\frac{10^p-1}{9}$.
$N_p=1+10+\cdots+10^{p-2}+10^{p-1} \Rightarrow N_p$ est la somme des p termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 10.
$N_p=\frac{1-10^p}{1-10}=\frac{10^p-1}{9}$. Il est certain que 10^p-1 est divisible par 9.

3) a) $p=2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrons que N_p est divisible par $N_2=11$.
$N_p=\frac{10^{2q}-1}{9}=\frac{(10^2)^q-1}{9}$; on a $10^2\equiv 1[11] \Leftrightarrow (10^2)^q\equiv 1[11] \Leftrightarrow (10^2)^q-1\equiv 0[11]$
$\Leftrightarrow N_p\equiv 0[11]$.

b) $p=3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrons que N_p est divisible par $N_3=111$.
$N_p=\frac{10^{3q}-1}{9}=\frac{(10^3)^q-1}{9}$; $10^3\equiv 1[111] \Leftrightarrow (10^3)^q-1\equiv 0[111] \Leftrightarrow N_p\equiv 0[11]$.

c) $p=kq$, où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
En déduisons que N_p est divisible par N_k.
$N_p=\frac{10^{kq}-1}{9}=\frac{(10^k)^q-1}{9}$; $10^k\equiv 1[N_k] \Leftrightarrow (10^k)^q-1\equiv 0[N_k] \Leftrightarrow N_p\equiv 0[N_k]$.

4) Enonçons une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
Pour que N_p soit premier il est nécessaire que p soit premier. Cette condition n'est pas suffisante car 3 est premier mais N_3 n'est pas premier.

III- On considère l'équation $78x^3+ux^2+vx-14=0$ (1), $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$.

1) On suppose, dans cette question, que $\frac{14}{39}$ est solution de (1).

a) Prouvons que u et v sont liés par la relation $14u+39v=1129$.
$\frac{14}{39}$ est solution de (1) $\Rightarrow 78\left(\frac{14}{39}\right)^3+u\left(\frac{14}{39}\right)^2+v\left(\frac{14}{39}\right)-14=0 \Leftrightarrow$
$78(14)^2+u(14\times 39)+v(39)^2-(39)^3=0 \Leftrightarrow u(14\times 39)+v(39)^2=39\times 1129$
$\Leftrightarrow 14u+39v=1129$.

b) Utilisons l'algorithme d'Euclide, pour trouver un couple (x,y) d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x+39y=1$.
$39=14\times 2+11 \Rightarrow 11=39-2\times 14$
$14=11+3 \Rightarrow 3=14-11=3\times 14-39$
$11=3\times 3+2 \Rightarrow 2=11-3\times 3=-11\times 14+4\times 39$

Scanné avec CamScanner

$3 = 2 + 1 \implies 1 = 3 - 2 = 14 \times 14 \times -5 \times 39$

$14(14) + 39(-5) = 1 \implies \boxed{(x, y) = (14, -5).}$

Vérifions que le couple $(-25\,;9)$ est solution de cette équation.

$14(-25) + 39(9) = -350 + 351 = 1$, alors $(-25\,;9)$ est solution de l'équation.

c) En déduisons un couple (u_0, v_0) solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1129$.

$14(-25) + 39(9) = 1 \iff 14(-25 \times 1129) + 39(9 \times 1129) = 1129 \iff$

$14(-28225) + 39(10161) = 1129 \iff (u_0, v_0) = (-28225\,, 10161).$

Donnons la solution générale de cette équation.

$\begin{cases} 14u + 39v = 1129 \\ 14(-28225) + 39(10161) = 1129 \end{cases} \implies 14(u + 28225) = 39(-v + 10161)$

$14 \wedge 39 = 1$, 14 divise $39(-v + 10161)$ et 39 divise $14(u + 28225)$, alors d'après le théorème de Gauss, 14 divise $(-v + 10161)$ et 39 divise $(u + 28225)$; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u + 28225 = 39k$ et $-v + 10161 = 14k \iff$

$u = 39k - 28225$ et $v = -14k + 10161$. $\boxed{S = \{(39k - 28225\,,\ -14k + 10161)\}}$

d) Déterminons parmi les couples (u, v) précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

Posons : $u > 0 \iff 39k - 28225 > 0 \iff 39k > 28225 \iff k > 723{,}72 \iff k = 724$

$\implies u = 11$ et $v = 20297 \implies \boxed{(u; v) = (11; 20297).}$

2) a) Décomposons 78 et 14 en facteurs premiers et en déduisons, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs positifs de 78 et 14.

$78 = 2 \times 3 \times 13$ et $14 = 2 \times 7 \implies \mathcal{D}(14) = \{1; 2; 7; 14\}$ et

$\mathcal{D}(78) = \{1; 2; 3; 6; 13; 26; 39; 78\}$

b) Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1).

Montrons que, si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

$\frac{P}{Q}$ une solution de l'équation (1) $\iff 78\left(\frac{P}{Q}\right)^3 + u\left(\frac{P}{Q}\right)^2 + v\left(\frac{P}{Q}\right) - 14 = 0 \iff$

$78P^3 + u(P^2 \times Q) + v(P \times Q^2) - 14Q^3 = 0 \iff u(P^2 \times Q) + v(P \times Q^2) = 14Q^3 - 78P^3$

$\iff u(P) + v(Q) = \frac{14Q^3 - 78P^3}{PQ} \iff u(P) + v(Q) = \frac{14Q^2}{P} - \frac{78P^2}{Q}$;

Si $P \wedge Q = 1$, alors $P \wedge Q^2 = 1$ et $P^2 \wedge Q = 1 \implies \frac{14Q^2}{P}$ et $\frac{78P^2}{Q}$ sont des entiers relatifs si et seulement si P est un diviseur de 14 et Q un diviseur de 78.

c) En déduisons le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de (1).

Il y a 36 rationnels, non entiers, pouvant être solutions de (1).

P	1	2	7	14			
Q	1	2	3	13	26	39	78

Parmi ces rationnels, l'ensemble S de ceux qui sont positifs est :

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{13}; \frac{1}{26}; \frac{1}{39}; \frac{1}{78}; \frac{2}{3}; \frac{2}{13}; \frac{2}{39}; \frac{7}{2}; \frac{7}{3}; \frac{7}{13}; \frac{7}{26}; \frac{7}{39}; \frac{7}{78}; \frac{14}{3}; \frac{14}{13}; \frac{14}{39}\right\}.}$$

Exercice 27:

Etant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv (2^n - 1)[2^n]$ (1).

A- 1) On suppose ici $n = 2$. Montrons que 1, 3 et 5 satisfont à la condition (1).

Scanné avec CamScanner

$x^2+y^2+z^2=1+9+25=35$; $(2^n-1)=2^2-1=3$; on a bien $35\equiv 3[4]$.

2) On suppose ensuite ici $n=3$.

a) Soit $m\in\mathbb{N}$. Reproduisons et complétons le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

b) Il n'existe pas d'entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2\equiv 7[8]$.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

B- On suppose qu'il existe trois entiers naturels x,y et z tels que :
$x^2+y^2+z^2\equiv(2^n-1)[2^n]$.

1) Justifions le fait que les trois entiers sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

Considérons quatre cas.

1er cas : les trois nombres sont impairs $\Rightarrow x\equiv 1[2]$, $y\equiv 1[2]$ et $z\equiv 1[2]$.
$x^2+y^2+z^2\equiv 3[2] \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\equiv 1[2] \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\equiv(2-1)[2] \Rightarrow$ x,y et z vérifient dans ce cas la condition (1).

2e cas : les trois nombres sont pairs $\Rightarrow x\equiv 0[2]$, $y\equiv 0[2]$, et $z\equiv 0[2]$. On a $x^2+y^2+z^2\equiv 0[4] \Rightarrow x,y$ et z ne vérifient pas la condition (1).

3e cas : deux des nombres sont impaires $\Rightarrow x\equiv 1[2]$, $y\equiv 1[2]$ et $z\equiv 0[2]$. On a $x^2+y^2+z^2\equiv 0[2] \Rightarrow x,y$ et z ne vérifient pas (1).

4e cas : deux des nombres sont paires $\Rightarrow x\equiv 0[2]$, $y\equiv 0[2]$, et $z\equiv 1[2]$. On a $x^2+y^2+z^2\equiv 1[2] \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\equiv(2-1)[2] \Rightarrow x$, y et z vérifient (1).

Conclusion : Si $x^2+y^2+z^2\equiv(2^n-1)[2^n]$, alors les trois entiers x,y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2) On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x=2q$; $y=2r$; $z=2s+1$ où q,r,s sont des entiers naturels.

a) Montrons que $x^2+y^2+z^2\equiv 1[4]$.

$x^2+y^2+z^2=4(q^2+r^2+s^2+s)+1$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\equiv 1[4]$

b) En déduisons une contradiction.

$x^2+y^2+z^2\equiv 1[4] \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\equiv 1[2^2]$ et $2^2-1\neq 1$, alors (1) n'est pas vérifiée, d'où contradiction avec la proposition faite à la question 1).

3) On suppose x,y,z sont impairs.

a) Prouvons que, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, k^2+k est divisible par 2.

Pour tout entier naturel impair $k\neq 0$, $k\equiv 1[2] \Rightarrow k^2\equiv 1[2] \Rightarrow k^2+k\equiv 0[2]$.

b) En déduisons que $x^2+y^2+z^2\equiv 3[8]$.

x,y,z sont impairs $\Rightarrow x=2q+1$; $y=2r+1$ et $z=2s+1$, d'où on a :
$x^2+y^2+z^2=4(q^2+q)+4(r^2+r)+4(s^2+s)+3=4(2\alpha)+4(2\beta)+4(2\gamma)+3$
avec $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{Z}^3 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=8(\alpha+\beta+\gamma)+3\equiv 3[8]$.

c) Conclusion :

Si x,y,z sont trois entiers naturels impairs, alors le reste de la division euclidienne par 8 de $x^2+y^2+z^2$ est 3.

Scanné avec CamScanner

ercice 28:

Dans $\mathbb{Z}^2$, (E): $3x^2+3x+7=y^3$.

1. Vérifions que (E) est équivalente à : $3(x^2+x+2)=y^3-1$.

$3x^2+3x+7=y^3 \iff 3x^2+3x+6=y^3-1 \iff 3(x^2+x+2)=y^3-1$.

2. Résolvons l'équation (E).

$3(x^2+x+2)=y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)$

1er cas : $y\equiv 0[3] \iff y^3-1\equiv 2[3] \Rightarrow y^3-1$ n'est pas divisible par $3 \Rightarrow S=\emptyset$;

2è cas : $y\equiv 1[3] \iff y-1\equiv 0[3]$ et $(y^2+y+1)\equiv 0[3] \Rightarrow y-1=3k$ et $y^2+y+1=3k' \Rightarrow x^2+x+2=3kk'$ et x^2+x+2 n'est pas divisible par 3 car $(x^2+x+2)\equiv 1[3]$ ou $(x^2+x+2)\equiv 2[3]$, alors $S=\emptyset$.

3è cas : $y\equiv 2[3] \iff y-1\equiv 1[3]$ et $(y^2+y+1)\equiv 1[3] \Rightarrow S=\emptyset$.

1. p et q sont deux entiers relatifs premiers entre eux, n un entier naturel non nul.

-Démontrons que p et q^n sont premiers entre eux.

On sait que : si deux entiers relatifs p et q sont tels que $p\wedge q=1$ alors $p\wedge q^n=1$; d'où p et q^n sont premiers entre eux.

2. $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ un polynôme à coefficients entiers relatifs admettant une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ (p *et* q *sont deux entiers premiers entre eux*).

-Démontrons que p divise a_0 et que q divise a_n.

$\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle du polynôme $P(x) \iff a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+\cdots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0$

$\iff a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0 \iff$

$a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}=-a_np^n-a_0q^n \iff a_{n-1}p^{n-2}+\cdots+a_1q^{n-2}=\frac{-a_np^n-a_0q^n}{pq}$

$\iff a_{n-1}p^{n-2}+\cdots+a_1q^{n-2}=\frac{-a_np^n-a_0q^{n-1}}{p}$; le second membre de cette égalité est un entier relatif si a_n est un diviseur de q et a_0 un diviseur de p car on a $q\wedge p^{n-1}=1$ et $p\wedge q^{n-1}=1 \Rightarrow$ p divise a_0 et que q divise a_n.

3. Factorisons le polynôme : $3x^3+7x^2+7x+4$.

$3x^3+7x^2+7x+4=3x^3+7x^2+7x+7-3=3(x^3-1)+7(x^2+x+1)=$

$=3(x-1)(x^2+x+1)+7(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(3x+4)$;

$3x^3+7x^2+7x+4=(x^2+x+1)(3x+4)$.

4. Résolvons dans $\mathbb{Q}$ l'équation : $x^5+127x^4-12x^3+x^2+7x-1=0$.

$\frac{p}{q}$ étant une solution rationnelle de l'équation, d'après la question 2., p divise -1 et q divise $1 \Rightarrow \frac{p}{q}=-1$ ou $\frac{p}{q}=1$; -1 et 1 ne vérifient pas l'équation $\Rightarrow S=\emptyset$.

I- $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers naturels premiers.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{P}^2$ l'équation (E): $x^2-y^2=pq$, où p et q sont deux entiers naturels premiers.

1. Etudions le cas où $p=q=2$.

On a : $x^2-y^2=4 \iff (x-y)(x+y)=4 \Rightarrow (x-y)$ et $(x+y)$ sont des diviseurs de 4. Les diviseurs de 4 sont : 1 ; 2 ; 4 ; on résoud alors les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases}x-y=1\\x+y=4\end{cases}$; (2) $\begin{cases}x-y=4\\x+y=1\end{cases}$; (3) $\begin{cases}x-y=2\\x+y=2\end{cases}$. Ces trois systèmes ne donnent pas de solutions dans $\mathbb{P}^2$.

Scanné avec CamScanner

2. Etudions le cas où $p = 2$ et $q > 2$.

On a : $x^2 - y^2 = 2q \iff (x-y)(x+y) = 2q \iff (x-y) = 2$ et $(x+y) = q$ ou $(x-y) = q$ et $(x+y) = 2 \iff x = \frac{q+2}{2}$ et $y = \frac{q-2}{2}$, ou $x = \frac{q+2}{2}$ et $y = \frac{2-q}{2}$

2 est le seul nombre premier pair ; alors q étant premier, $q + 2$, $q - 2$ et $2 - q$ ne sont pas divisibles par 2, d'où l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{P}^2$.

3. a) On suppose que : $2 < q \leq p$.

- Démontrons que y est nécessairement égal à 2.

x, y, p et q sont des nombres premiers avec $2 < q \leq p$, alors p et q sont impairs.

$x^2 - y^2 = pq \iff \begin{cases} x+y = p \\ x-y = q \end{cases}$ avec $x > y \geq 2$, car $q \leq p$. On sait que la somme ou la différence d'un nombre impair et d'un nombre pair est un nombre impair ; alors y est nécessairement égal à 2.

- En déduisons que si $p - q \neq 4$, (E) n'a pas de solution.

$y = 2 \implies \begin{cases} x+2 = p \\ x-2 = q \end{cases} \implies p - q = 4$. Si $p - q \neq 4$, $2y \neq 4 \iff y \neq 2 \implies$ l'équation n'a pas de solution.

b) On suppose que $p - q = 4$.

- Démontrons que si $(x; 2)$ est une solution de (E), alors les nombres q, x et p forment une suite arithmétique de raison 2.

$(x; 2)$ est solution de $(E) \implies \begin{cases} x+2 = p \\ x-2 = q \end{cases} \iff \begin{cases} x = p-2 \\ x = q+2 \\ p = q+4 \end{cases}$; q, $q+2$, et $q+4$ sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $2 \iff q, x,$ et p forment une suite arithmétique de raison 2.

- En déduisons que (E) n'a de solution que si $q = 3$ et $p = 7$.

Les trois nombres premiers en progression arithmétique de raison 2 premier sont 3, 5 et 7 $\implies q = 3$, $x = 5$; $p = 7$, par conséquent l'équation n'a de solution que $q = 3$ et $p = 7$. Cette solution est $(5; 2)$.

Exercice 29:

I- On se propose de résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E): $5^x - 4^x = y^2$.

1. Vérifions que $(1 ; 1)$ est solution de (E).

On a : $5 - 4 = 1$ d'où $(1 ; 1)$ est une solution.

Dans la suite du problème, on suppose $x \neq 1$.

2. a) Trouvons les entiers naturels n tels que $n^2 \equiv 5[8]$?

Utilisons le tableau de congruence modulo 8.

n	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$
n^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$

Il n'existe pas d'entier naturel n tel que $n^2 \equiv 5[8]$.

b) Démontrons que si x est impair, alors $5^x - 4^x \equiv 5[8]$.

si x est impair, $x = 2p + 1 \implies 5^x - 4^x = 5(5^2)^p - 4(4^2)^p \equiv (5 - 0)[8] \equiv 5[8]$.

c) Conclusion : si x est impair et $x \neq 1$, l'équation n'a pas de solution.

3. On pose : $x = 2m$ $(m \epsilon \mathbb{N})$.

a) Démontrons que (E) est équivalente à : $(5^m - y)(5^m + y) = 2^{4m}$.

Scanné avec CamScanner

(E): $5^x - 4^x = y^2 \Leftrightarrow (5^m)^2 - (4^m)^2 = y^2 \Leftrightarrow (5^m)^2 - y^2 = (4^m)^2 \Leftrightarrow (5^m - y)(5^m + y) = 2^{4m}$

b) En déduisons qu'il existe deux entiers p et q tels : $5^m - y = 2^p$ et $5^m + y = 2^q$, avec $p + q = 4m$.

$(5^m - y)(5^m + y) = 2^{4m} \Leftrightarrow (5^m - y)(5^m + y) = 2^{p+q} = 2^p \times 2^q \Rightarrow 5^m - y = 2^p$ et $5^m + y = 2^q$ avec $p + q = 4m$.

c) Déduisons de la question précédente que : $\begin{cases} p = 1 \\ q = 4m - 1 \\ 5^m = 1 + 4^{2m-1} \end{cases}$.

$5^{2m} - 4^{2m} = y^2 \Leftrightarrow 5^{2m} - 4^{2m} = (5^m - 2^p)^2 \Leftrightarrow 5^{2m} - 4^{2m} = 5^{2m} - 5^m \times 2^{p+1} + 2^{2p}$

$\Leftrightarrow -4^{2m} = -5^m \times 2^{p+1} + 4^p \Leftrightarrow 4^{2m} + 4^p = 5^m \times 2^{p+1} \Leftrightarrow 5^m = 2^{-p-1}(4^{2m} + 4^p)$

$\Leftrightarrow 5^m = 2^{-p-1} \times 4^p(1 + 4^{2m-p}) = 2^{p-1}(1 + 4^{2m-p})$; 5^m n'étant pas un multiple de 2, on a nécessairement $p - 1 = 0 \Leftrightarrow p = 1$; alors $5^m = 1 + 4^{2m-1}$ et $q = 4m - 1$.

On admet que $m \leq 1$. Déterminons les solutions de (E).

$m \in \mathbb{N}$ et $m \leq 1 \Rightarrow m \in \{0,1\}$. On a : $x = 2m$ et $y = 5^m - 2^p = 5^m - 2$.

Si $m = 0$, $x = 0$ et $y = 0$; si $m = 1$, $x = 2$ et $y = 5 - 2 = 3$; $\boxed{S = \{(0;0),(2;3)\}}$

Soit dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E): $15x^2 - 7y^2 = 9$.

1. a) Démontrons que dans le système décimal le dernier chiffre d'un carré est 1, 4, 5, 6 ou 9.

Dressons le tableau de congruence modulo 10.

n	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{8}$	$\dot{9}$
n^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{9}$	$\dot{6}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{9}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$

Pour tout entier naturel n, non nul, le reste de la division euclidienne par 10, donc le dernier chiffre de est 1, 4, 5, 6 ou 9.

b) En déduisons que $7y^2 + 9$ n'est pas divisible par 5.

- Si $y^2 \equiv 1[10]$, $(7y^2 + 9) \equiv 6[10] \Rightarrow$ le dernier chiffre de $7y^2 + 9$ est 6;
- Si $y^2 \equiv 4[10]$, $(7y^2 + 9) \equiv 7[10] \Rightarrow$ le dernier chiffre de $7y^2 + 9$ est 7;
- Si $y^2 \equiv 5[10]$, $(7y^2 + 9) \equiv 4[10] \Rightarrow$ le dernier chiffre de $7y^2 + 9$ est 4 ;
- Si $y^2 \equiv 6[10]$, $(7y^2 + 9) \equiv 1[10] \Rightarrow$ le dernier chiffre de $7y^2 + 9$ est 1;
- Si $y^2 \equiv 9[10]$, $(7y^2 + 9) \equiv 2[10] \Rightarrow$ le dernier chiffre de $7y^2 + 9$ est 2.

Dans tous les cas, le chiffre des unités est différent de 0 et de 5, alors $7y^2 + 9$ n'est pas divisible par 5.

c) Résolvons l'équation (E).

On a $15x^2 \equiv 0[5], \forall x \in \mathbb{N}$ et $7y^2 + 9$ n'est pas divisible par 5 , $\forall y \in \mathbb{N}$; alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$; $S = \emptyset$.

Soit (x_n) et (y_n) deux suites définies par leurs premiers termes et les relations de récurrence :

1. Démontrons par récurrence que les points M_n de coordonnées (x_n , y_n) sont sur la droite (D) d'équation : $2x - y - 5 = 0$.

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} x_0 = 3 \ \ et \ \ y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}.$$

- Vérifions pour $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$: $2 \times 3 - 1 - 5 = 6 - 6 = 0$; la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $2x_n - y_n - 5 = 0$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $2x_{n+1} - y_{n+1} - 5 = 0$.
  $2x_{n+1} - y_{n+1} - 5 = 2\left(\frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1\right) - \left(\frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2\right) - 5 = 2x_n - y_n - 5 = 0$, alors la propriété est vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : les points M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la droite (D) d'équation $2x - y - 5 = 0$.

2. En déduisons x_{n+1} en fonction de x_n.
   $2x_n - y_n - 5 = 0 \iff y_n = 2x_n - 5 \implies x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}(2x_n - 5) + 1 = 2x_n - 1$

3. Démontrons que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatifs.
   $x_{n+1} = 2x_n - 1$; $y_{n+1} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}(y_n + 5) + \frac{9}{5}y_n + 2 = 2y_n + 3$ $\implies$ (x_n) et (y_n) sont deux suites d'entiers relatifs définies par les relations de récurrence :
   $$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}.$$

4. a) Démontrons que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.
   - Si $x_n \equiv 0[5]$, alors $(2x_n - 5) \equiv 0[5] \iff y_n \equiv 0[5]$;
   - Si $y_n \equiv 0[5]$, alors $(2x_n - 5) \equiv 0[5] \iff 2x_n \equiv 0[5] \iff x_n \equiv 0[5]$.

   Alors x_n est divisible par 5 $\iff$ y_n est divisible par 5.

   b) Démontrons que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont étrangers.
   $y_n = 2x_n - 5 \implies \text{PGCD}(x_n, y_n) = \text{PGCD}(x_n, 5)$; si x_n n'est pas un multiple de 5, alors $\text{PGCD}(x_n, 5) = 1 \iff \text{PGCD}(x_n, y_n) = 1 \iff x_n$ *et* y_n sont étrangers.

5. a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 2^{n+1} + 1$.
   - Vérifions pour $n = 0$; $x_0 = 2 + 1 = 3$
   - Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $x_n = 2^{n+1} + 1$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $x_{n+1} = 2^{n+2} + 1$.
     $x_{n+1} = 2x_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$, alors la propriété est vraie au rang $n+1$.
   - Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 2^{n+1} + 1$.

   b) Démontrons que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}.
   $x_{n+4} = 2^{n+5} + 1 = 2^4(2^{n+1} + 1) + 1 - 2^4 = 16x_n - 15 \implies x_{n+4}$ est divisible par 5 si et seulement si x_n est divisible par 5 car 15 est divisible par 5.

   c) En déduisons les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5.
   $x_n \equiv 0[5] \iff 2^{n+1} + 1 \equiv 0[5] \iff 2^{n+1} \equiv 4[5] \iff 2^n \equiv 2[5]$
   Déterminons les restes successifs de la division euclidienne par 5 de 2^n.
   $2^0 \equiv 1[5]$; $2 \equiv 2[5]$; $2^2 \equiv 4[5]$; $2^3 \equiv 3[5]$; $2^4 \equiv 1[5] \implies$ la période est 4.
   $2^n \equiv 2[5] \implies \boxed{n = 4k + 1.}$

Scanné avec CamScanner

« L' effort bien fourni est infiniment moins pénible que l'insuffisance en présence du devoir »

HAMIDOU KONE

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner