

RÉVISION GÉNÉRALE

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe : TSE

2018 - 2019

Nombres complexes

Exercice 01 :

Soit le polynôme g défini par :

$$g(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1.$$

1. Exprimer $\frac{g(z)}{z^2}$ en fonction de $X = z + \frac{1}{z}$. (0, 75 pt)
2. Montrer que : $g(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = z + \frac{1}{z} \\ X^2 - (1 + \sqrt{2})X + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$ (0, 5 pt)
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $X^2 - (1 + \sqrt{2})X + \sqrt{2} = 0$. (0, 75 pt)
4. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $g(z) = 0$. (1 pt)

Exercice 02

Soit l'équation (E): $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$.

1. Montre que si z_0 est une solution de (E) alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de (E).
2. a. détermine les nombres réels a et b tels que :

$$(E) \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right] = 0.$$

b. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z , $Z^2 + aZ + b = 0$ puis l'équation (E).

Démontre que les points images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle (Γ) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 03 (composition 2014-2015 R.G.)

On considère le polynôme f défini par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que :
 $f(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$ (0, 75 pt)
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. (1 pt)
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :
 $z_A = i\sqrt{3}; z_B = -i\sqrt{3}; z_C = 3 - 2i\sqrt{3}; z_D = \bar{z}_C$.
a) Placer les points A, B, C, D . [la figure complète (1, 5 pts)]
b) Quelle est la nature du triangle ACD ? (0, 5 pt)
c) Montrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Donner une équation de (C). (1, 5 pts)
4. On note E le symétrique de C par rapport à O .
Préciser l'axe de E et déterminer la nature du triangle BED . (0, 75 pt)

Exercice 04

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (3 + 6i)z^2 - (9 - 15i)z + 22 - 6i$

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine réelle que l'on déterminera.

- En déduire une résolution dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = 0$.
- Soient A ; B ; C les images respectives des solutions de $P(z) = 0$. Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé ces points et en déduire la nature du triangle ABC .
- Donner une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC .

Exercice 05

On considère le polynôme suivant : $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$

- Ecrire $1 + i$ sous forme trigonométrique.
- Calculer $p(1 + i)$.
- Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$
- Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de cette équation.
- Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $z_0 \neq 0$ et $\frac{1}{z_0}$ est aussi une solution de cette équation.
- Déterminer toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 06

A. Soit $\alpha \in]0 ; 2\pi [$. On considère l'équation d'inconnue complexe z .

$$(E): z^2 - (2^{\alpha+1} \cos \alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$$

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . Donne la forme trigonométrique de chaque solution.

B. Soit $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. on considère l'équation d'inconnue complexe z .

$$(F): (\cos^2 \beta)z^2 - (4 \cos \beta)z + 5 - \cos^2 \beta = 0$$

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (F) . Précise pour quelle valeur de β l'équation (F) admet une solution double. Donne la valeur de cette racine double.

Exercice 7

Soit α un nombre réel.

- Montrer que l'équation $(E_1): z^2 - (2 \cos \alpha)z + 1 = 0$ d'inconnue z admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions complexes conjuguées, z_1 et $\bar{z}_1$. Donner leur expression en fonction de α . Quel est le module de z_1 ?
- Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On note de même z_2 et $\bar{z}_2$ les solutions de l'équation $(E_2): z^2 - (2 \cos \beta)z + 1 = 0$. Calculer en fonction de $\cos \alpha$ et $\cos \beta$ les coefficients a, b, c et d du polynôme $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ soit identique au polynôme $Q(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)$
- On considère l'équation $(E_3): X^2 + \frac{a}{2}X + \frac{b-2}{4} = 0$ où a et b sont les coefficients réels de la question 2.
 - Montrer que $\cos \alpha$ et $\cos \beta$ sont solutions de (E_3) .
 - Ecrire les inégalités que doivent vérifier a et b pour qu'il existe deux réels α et β répondant à la question.

Application : Soit $(E_4): z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0$. Déterminer α et β et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_4) .

Exercice 08 :

A. Extrait de Bac TSE 2005

1. Déterminer sous forme algébrique les racines sixième de l'unité, c'est-à-dire trouver les nombres complexes u tels que $u^6 = 1$.
2. Calculer $(1 - i)^6$.

En utilisant les questions a) et b) donner la forme algébrique des solutions de l'équation d'inconnue z : $8z^6 + i = 0$.

B.

1. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $-i$ sous forme trigonométrique et algébrique.
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $[(1 - 2i)z]^3 + i = 0$.

Exercice 09

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

1. Démontre que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.
2. Calcule les réels $\alpha + \beta$ et $\alpha \times \beta$. Déduis en que α et β sont solutions de l'équation (E): $z^2 + z - 1 = 0$.
3. Exprime α et β en fonction respectivement de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$. Puis précise le signe de α et celui de β .
4. Résous (E) et déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Exercice 10

On se propose de calculer la valeurs exacte de $\cos \left(2\frac{\pi}{5}\right)$.

On considère le nombre complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Calcule a^5 . (0,25 pt)
2. Démontre que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$. (0,75 pt)
3. Montre que $a^3 = (\bar{a})^2$ et $a^4 = \bar{a}$. (1 pt)
4. Déduis en que $(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0$. (0,75 pt)
5. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$. (0,50 pt)
6. Calcule $a + \bar{a}$ et déduis en la valeur exacte de $\cos \left(2\frac{\pi}{5}\right)$. (0,75 pt)

Exercice 11 (composition 2014-2015 R.D.)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 2cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b = \bar{a}$ et $c = 3$.

Partie A :

1. Place les points A, B et C .
2. Démontre que le triangle ABC est équilatéral.
3. Ecris les nombres complexes a, b et c sous forme exponentielle.

Partie B :

Soit f l'application qui, à tout point M de P d'affixe z associe le point M' d'affixe z' :

$$z' = f(z) = \frac{1}{3}iz^2$$

On note A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points A, B et C .

1. a. Détermine la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C' .
b. Démontre l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A' .
c. Place les points A', B' et C' .
2. Détermine les points invariants par f , c'est-à-dire les points d'affixe z tels que $z' = z$. On donnera leurs affixes sous forme algébrique.
3. Démontre que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.

Exercice 12

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe $z \neq -2i$ associe le point M' d'affixe :

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$$

1. On pose $z = x + iy$, x et y étant deux réels.
 - a. Détermine les parties réelle et imaginaire de Z en fonction de x et y .
 - b. Détermine l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
 - c. Détermine l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.
2. On appelle A et B deux points d'affixes respectives $2 - i$ et $-2i$.

Retrouve les ensemble (E) et (F) par une méthode géométrique.

Calcule $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et déduis en que les points M' d'affixes Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et le centre.

Exercice 13 : Extrait de Bac TSE 2014 (Mali)

Les considère les points $A(2 - 4i)$; $B(-i)$; $M(z)$ et $M'(z')$ avec

$$z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}; \quad z \neq i$$

1. Exprime les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .
2. Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :
 - a. z' soit un réel.
 - b. z' soit un imaginaire pur.
3. On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifie que $ZZ' = -3 + 4i$.
4. a. Détermine l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.
b. Détermine r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Exercice 14

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé on considère les points A et B d'affixe respectives 1 et -2 . On appelle (τ) le cercle de diamètre $[AB]$ et I le milieu $[AB]$.

1. Soit C le point d'affixe $c = \frac{1+4i}{1-2i}$. Détermine la forme algébrique de c et prouve que le point C appartient à (τ) .

2. Soit D le point de (τ) tel que $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. On désigne par d l'affixe de D .
 - a. Détermine le module et un argument de $d + \frac{1}{2}$.
 - b. Dédus-en d .
 - c. Détermine le réel x telque $\frac{1+2xi}{1-xi} = \frac{1}{4} + i \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
3. Soit E un point d'affixe $e = \frac{1+2yi}{1-yi}$ où y est un réel non nul. On pose $Z = \frac{e-1}{e+2}$. Calcule Z et déduis en la nature du triangle ABE.
4. Soit F un point de (τ) autre que B et f son affixe. Démontre qu'il existe un réel t tel que $f = \frac{1+2ti}{1-ti}$.

Exercice 15

Soit $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

On définit de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ l'application f par : $f(z) = \frac{1}{z}$.

1. Détermine les parties réelles et imaginaires des images de $\alpha = 1 + i$ et de $\beta = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. a. Détermine les éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$.
 b. Détermine les éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = \bar{z}$.
 c. Détermine le module et un argument de $f(z)$ en fonction de ceux de z .
 d. Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de celles de z .
3. En étudiant $f \circ f$, montre que f est bijective.
4. Montre que $f(z) - 1 = \frac{1}{z}(1 - z)$.
 Dédus en que si $|z - 1| = 1$ alors $|f(z)| = |f(z) - 1|$.
5. Si $z \notin \mathbb{R}$, on définit $Q(z) = \frac{z-\frac{1}{z}}{z-2}$. Montre que $Q(z) Q(f(z))$ est un réel que l'on déterminera.
6. Dans le plan complexe, soit O le point d'affixe 0, A le point d'affixe 1, M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

Si M est sur le cercle de centre A et de rayon 1, donne une construction de M' .

Exercice 16 : Extrait du Bac Asie 2001

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$.

On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -1$) associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$f(z) = z' = \frac{-iz - 2}{z + 1}$$

Soient A, B et C les points d'affixe respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

1. Soit C' l'image du point C par f . Donne l'affixe c' du point C' sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. Calcule l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.
3. Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on note p le module de $z + 1$ (c'est-à-dire $|z + 1| = p$) et p' le module de $z' + i$ (c'est-à-dire $|z' + i| = p'$).
 - a. Démontre que pour tout nombre complexe z différent de -1 , on a : $pp' = \sqrt{5}$.

b. Si le point M appartient au cercle (r) de centre A et de rayon 2, montre qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (r') , dont on précisera le centre et le rayon.

4. Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on considère le nombre complexe

$$\omega = \frac{z-2i}{z+1}.$$

a. Interprète géométriquement le module et l'argument du nombre complexe ω .

b. Montre que $z' = -i\omega$.

c. Détermine géométriquement l'ensemble (F) des point M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul. Donne une équation de (F) .

d. Vérifie que le point D appartient aux ensembles (r) et (F) .

5. Représente les ensembles (r) et (F) et (r') en prenant 4 cm pour unité graphique.

Exercice 17 Extrait du Bac Inde 2001

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe $f(z) = \frac{z-iz}{1-z}$.

L'exercice étudie quelques propriétés de f .

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, dans lequel seront représentés les ensemble trouvés aux question 1 et 2.

A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe $-2i$.

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels.

a. Ecris $f(z)$ sous forme algébrique. Déduis en l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel.

b. Vérifie que A et B appartiennent à (E) et représente (E) .

2. On pose $z' = f(z)$.

a. Vérifie que i n'a pas d'antécédent par f et exprime, pour z' différent de i , z en fonction z' . f est-elle bijective ?

b. M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M' celui d'affixe z' (z' différent i).

Montrer que $OM = \frac{M'C}{M'D}$ ou C et D sont les point d'affixes respectifs 2 et i .

c. Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A , son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.

d. Montrer que si M est un point de l'axe réel, différent de O et de A alors M' appartient à la droite (CD) .