

COURS PRIAMS



PREPABAC 2025

MATHEMATIQUES



Sémaine 1

" du 23 au 29 décembre 2024 "

**Opération un exercice par jours
sur les nombres complexes et similitudes...**

M. MOUHAMAD SARRE

70647469 / 65360170

Exercice 1 : Lundi

On considère le polynôme P définie par : $P(z) = z^3 - (1 + 6i)z^2 + (-13 + 2i)z + 1 + 8i$ où $z \in \mathbb{C}$.

- 1) a) Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure notée z_0 que l'on déterminera.
b) Détermine les deux nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$.
c) Déduis-en l'ensemble des solutions de l'équation : $P(z) = 0$.
- 2) Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = -1 + 2i$.
a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.
b) Calcule $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ et déduis-en la nature du triangle ABC .
c) Calcule l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 2 : Mardi

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A :

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (2 + 6i)z - 16 + 12i = 0$.
- 2) Soit $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 - (12 - 24i)z + 32 - 24i$.
a) Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on déterminera.
b) Factorise $P(z)$ puis résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = -2 + 4i$.

- 1) a) Place les points A, B et C .
b) Calcule le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduis la nature du triangle ABC .
c) Montre que le point E d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$.
d) Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant l'équation suivante : $|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$.
- 2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.
a) Détermine le centre, le rapport k et l'angle θ la similitude S .
b) Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S .

M. SARRE
70647469
65360170

Exercice 3 : Mercredi

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme :

$$P(z) = z^3 + (-3 + 5i)z^2 - 2(4 + 5i)z + 10 - 10i.$$

- 1) Vérifie que $P(3 - i) = 0$.
- 2) a) Détermine les deux nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - 3 + i)(az^2 + bz + c)$.
b) En déduis les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.
- 3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $3 - i$, $1 - 3i$ et $-1 - i$.
a) Place les points A, B et C .
b) Calcule le rapport $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduis la nature du triangle ABC .
- 4) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C .
a) Détermine l'écriture complexe de S .
b) Détermine les éléments caractéristiques de S .

Exercice 4 : Jeudi

Soit P le polynôme de $\mathbb{C}$ défini par : $P(z) = z^3 + (-5 - i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$.

- 1) Vérifie que : $P(z) = (z - 2i)(z^2 + (-5 + i)z + 8 - 4i)$.
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
- 3) Dans le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm
On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $2i$, $3 + i$ et $2 - 2i$.
a) Place les points A, B et C dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
b) Détermine la nature du triangle ABC .
- 4) Soit s la similitude directe de centre A transformant B en C .
a) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe s .
b) Détermine les éléments caractéristiques de s .
c) Détermine l'affixe du point D qui est l'image du point C par s .

Exercice 5 : Vendredi

- 1) On considère l'équation (E): $z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.
 - a) Justifie que $2i$ est une solution de (E).
 - b) Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = (z-2i)(z^2 + (1+3i)z - 4)$.
 - c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.
On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i, 1-i, 2i$ et $-2-2i$.
 - a) Place les points A, B, C et D dans le plan complexe.
 - b) Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A .
- 3) Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B .
 - a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$
 - b) Justifie que $S(B) = C$.
 - c) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S .

Exercice 6 : Samedi

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) On pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 9z - 27$.
 - a) Calcule $P(3)$.
 - b) Factorise $P(z)$, puis résous $P(z) = 0$.
- 2) On nomme A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = 3; z_B = -3i; z_C = 3i$ et $z_D = 2 - \frac{5}{2}i$.
 - a) Détermine l'afixe du point E , image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - b) Détermine l'afixe du point I , symétrique de B par rapport à D puis celle du point J , symétrique de C par rapport à E .
 - c) Détermine l'afixe du point F , milieu du segment $[IJ]$.
 - d) Précise en justifiant, la nature du quadrilatère $ODFE$.
- 3) On pose $Z = \frac{z_J - z_A}{z_I - z_A}$.
 - a) Calcule Z .
 - b) En interprétant géométriquement le module et un argument de Z .
 - c) Détermine la nature du triangle AIJ .

M. SARRE
70647469
65360170

Exercice 7 : Dimanche

Soit P est un polynôme à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 + (1-9i)z^2 - (24+6i)z - 14 + 18i$.

- 1) a) Détermine le complexe z_0 tel que : $P(z) = (z - z_0)(z^2 - 4iz - 4 - 2i)$.
b) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z) = 0$.
- 2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + 5i, z_B = 1 + 3i$ et $z_C = -1 + i$.
 - a) Place les points A, B et C .
 - b) Calcule les distances AB et BC et détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$.
En déduis la nature du triangle ABC .
 - c) On note I le milieu du segment $[AC]$. Détermine l'afixe z_I du point I .
 - d) Détermine puis construis l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixes z tels que : $|z + 1 - 3i| = 2$.
- 3) Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point A et transforme le point C en B .
 - a) Détermine l'expression complexe ainsi que les éléments caractéristiques de S .
 - b) Détermine et construis l'ensemble $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par S .