



COURS PRIAMS



PREPABAC 2021-TSE

OBJECTIF : OPERATION UN EXERCICE PAR JOURS SUR LES NOMBRES COMPLEXES 1

Exercice 1 : Lundi

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 8 = 0$.
- 2) On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.
 - a) Ecris z_A et z_C sous la forme trigonométrique.
 - b) Place les points A, B et C.
 - c) Détermine la nature du triangle ABC.
- 3) On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}} z$.
 - a) Caractérise géométriquement l'application f .
 - b) Détermine les images des points A et C par f .
En déduis l'image de la droite (AC) par f .

M. SARRE

70647469

65360170

Exercice 2 : Mardi

- 1) On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) : $z^3 + 8 = 0$
 - a) Détermine les nombres complexes a , b et c tels que $z^3 + 8 = (z + 2)(az^2 + bz + c)$.
 - b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E). (on donnera les solutions sous forme $x + iy$)
 - c) Ecris ces solutions sous forme de $re^{i\theta}$, où r est un réel positif.
- 2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -2$; $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 + i\sqrt{3}$; le point D milieu de [OB] et la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
 - a) Place les points A, B et C.
 - b) Montre que $\mathcal{R}(A) = B$, $\mathcal{R}(B) = C$ et $\mathcal{R}(C) = A$. En déduis le triangle ABC est équilatéral.
 - c) On considère le point L défini par $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OD}$. Détermine son affixe z_L .
Détermine un argument de $\frac{z_L}{z_D}$. En déduis que le vecteur $\overrightarrow{OL}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OD}$ et au vecteur $\overrightarrow{AL}$.
 - d) Montre que L est sur le cercle de diamètre [AO].

Exercice 3 : Mercredi

- 1) Pour tout nombre Z , on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.
 - a) Factorise $P(Z)$.
 - b) En déduis les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$.
 - c) Déduis de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z : $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.
- 2) a) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (l'unité graphique est 5 cm).
Place les points A, B et C d'affixes respectives : $a = -2$, $b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ et $c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.
 - b) Démontre que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.
- 3) Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.

Exprime sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{a-c}{d-c}$.

En déduis le rapport $\frac{CA}{CD}$. Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

M. SARRE

70647469

65360170

Exercice 4 : Jeudi

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

- 1) Détermine deux nombres réels a et b tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20)$.
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 3) Place dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4i, n = -2 - 4i, p = 2 + 3i$ et $q = 2 - 3i$.
- 4) a) Détermine le nombre complexe z vérifiant $\frac{z-p}{z-m} = i$. Place son image K .
b) En déduis que le triangle MPK est isocèle rectangle en K .
- 4) a) Détermine par le calcul l'abscisse du point L , quatrième sommet du carré $MKPL$.
b) Détermine l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.
c) Montre que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R .

M. SARRE
70647469
65360170

Exercice 5 : Vendredi

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (Unité graphique : 2 cm.)

- 1) a) Résous l'équation $(E) : z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.
b) On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . Détermine le module et l'argument de z_1 et z_2 , place M et N sur la figure.
c) Détermine les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Place P et Q sur la figure.
Montre que $MNPQ$ est un carré.
- 2) Soit R le symétrique de P par rapport à O , E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$. Place ces points sur la figure.
Calcule les affixes de R et de S . Montre que S appartient au segment $[MN]$.
- 3) On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.
a) Montre que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.
b) Exprime les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de α .
c) Montre que $|Z| = |Z'|$ et que $\frac{Z}{Z'} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
d) Déduis des questions précédentes la nature du triangle PRS .

Exercice 6 : Samedi

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
- 2) a) Détermine le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2 .
b) Détermine le module et un argument du nombre complexe $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.
- 3) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1 + i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1 - i)$ et le point A d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
a) Détermine l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3 .
b) Détermine l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
c) Place dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4 .
d) Calcule $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.
e) Soient I le milieu du segment $[M_3M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I .
Montre que les points M_1, M_3, M_5 et M_4 forment un carré.

M. SARRE
70647469
65360170

Exercice 7 : Dimanche

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm, on considère les points A et B , d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f de P privée du point A dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = i \left(\frac{z-3i}{z+1} \right) \quad (1).$$

1) Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$. Montre qu'il existe un seul point D tel que $f(D) = C$.

2) Détermine la nature du triangle ABC .

3) À l'aide de l'égalité (1), montre que, pour tout M distinct de A et de B : $OM' = \frac{BM}{AM}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$.

4) En déduis et construis les ensembles de points suivants :

a) L'ensemble E des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle (F) de centre O , de rayon 1.

b) L'ensemble F des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

5) On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note C_1 l'image de C par R .

a) Détermine l'affixe de C_1 .

b) Montre que C_1 appartient à l'ensemble F .

M. SARRE

70647469

65360170

Exercice 8 : Et si traite ça.....

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 2 cm).

On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3 + 2i$.

On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z-1+2i}{z-1}.$$

1) Calcule les affixes des points O' et B' images respectives des points O et B par f .

Place les points A , O' , B et B' dans le plan.

2) a) Calcule pour tout complexe z différent de 1, le produit $(z' - 1)(z - 1)$.

b) En déduis que pour tout point M distinct de A , on a : $AM \times AM' = 2$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3) Démontre que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O , alors M' appartient à un cercle (C') .

En précise le centre et le rayon.

Construire (C) et (C') .

4) a) Détermine l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

b) Démontre que si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A , passant par B , alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.

5) On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (d) . Place son image P' sur la figure.

M. SARRE

70647469

65360170

Exercice 9 : Et si traite ça.....

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm.

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2 , associe $Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

1) Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprime la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y .

$$\text{On vérifiera que } \mathcal{R}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2}.$$

En déduis la nature de :

a) L'ensemble E des points M d'affixe z , tels que Z soit un réel.

b) L'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.

c) Représente ces deux ensembles.

2) On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.

En remarquant que $Z = \frac{z-z_A}{z-z_B}$, retrouve les ensembles E et F par une méthode géométrique.

3) Calcule $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et en déduis que les points M' d'affixe Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

Traïtons des exercices
pour ne pas oublier!!!

COURS PRIMAIRE